الرياضيات

البحتة

الجزء الخاص

بالشرح و التمارين

امتحانات الكترونية باستخدام تقنية QR

هدية مجانية ليست مخصصة للبيع

معاك

Ma3ak App

تطبيق التعلّم التفاعلي



المعاصر 2023

إعداد نخبة من خبراء التعليم

الصف الثانى الثانوى

القسم العلمى

الفصل الدراسى الأول

أولًا : الجـبـر

الوحدة 1 الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات

متطلبات قبلية على الوحدة الأولى ١٣

الـدرس الأول الدوال الحقيقية (تحديد المجال والمدى – بحث الاطراد) ١٧

الـدرس الثانى العمليات على الدوال – تركيب دالتين ٣٤

الـدرس الثالث بعض خواص الدوال (الدوال الزوجية والفردية – الدوال الأحادية) ٥٢

الـدرس الرابع التمثيل البيانى للدوال الأساسية ورسم الدالة مجزأة المجال ٧٢

الدرس الخامس التحويلات الهندسية لمنحنيات الدوال الأساسية ٨٣

الدرس السادس حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة ١٠٦

الوحدة 2 الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

الـدرس الأول الأسس الكسرية والمعادلات الأسية ١٣٤

الـدرس الثانى الدالة الأسية وتطبيقاتها ١٤٨

الـدرس الثالث الدالة العكسية ١٦٥

الـدرس الرابع الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البيانى ١٧٨

الدرس الخامس بعض خواص اللوغاريتمات ١٩٤

ثانيًا : التفاضل وحساب المثلثات

الوحدة 1 النهايات والاتصال

الـــدرس الأول | مقدمة فى النهايات ، تقدير النهاية عدديا و بيانياً ٢١٩

الــدرس الثانى | إيجاد نهاية الدالة جبرياً ٢٣١

الــدرس الثالث | نظرية (٤) ، القانون ٢٤٦

الــدرس الرابـع | نهاية الدالة عند اللانهاية ٢٥٨

الدرس الخامس | نهايات الدوال المثلثية ٢٧٠

الدرس السادس | بحث وجود نهاية للدالة مجزأة المجال ٢٨٣

الدرس السابــع | الاتصال ٢٩٩

الوحدة 2 حساب المثلثات

مراجعة على أهم القوانين التى سبقت دراستها ٣٢٤

الـــدرس الأول | قانون الجيب ، قاعدة الجيب ٣٢٦

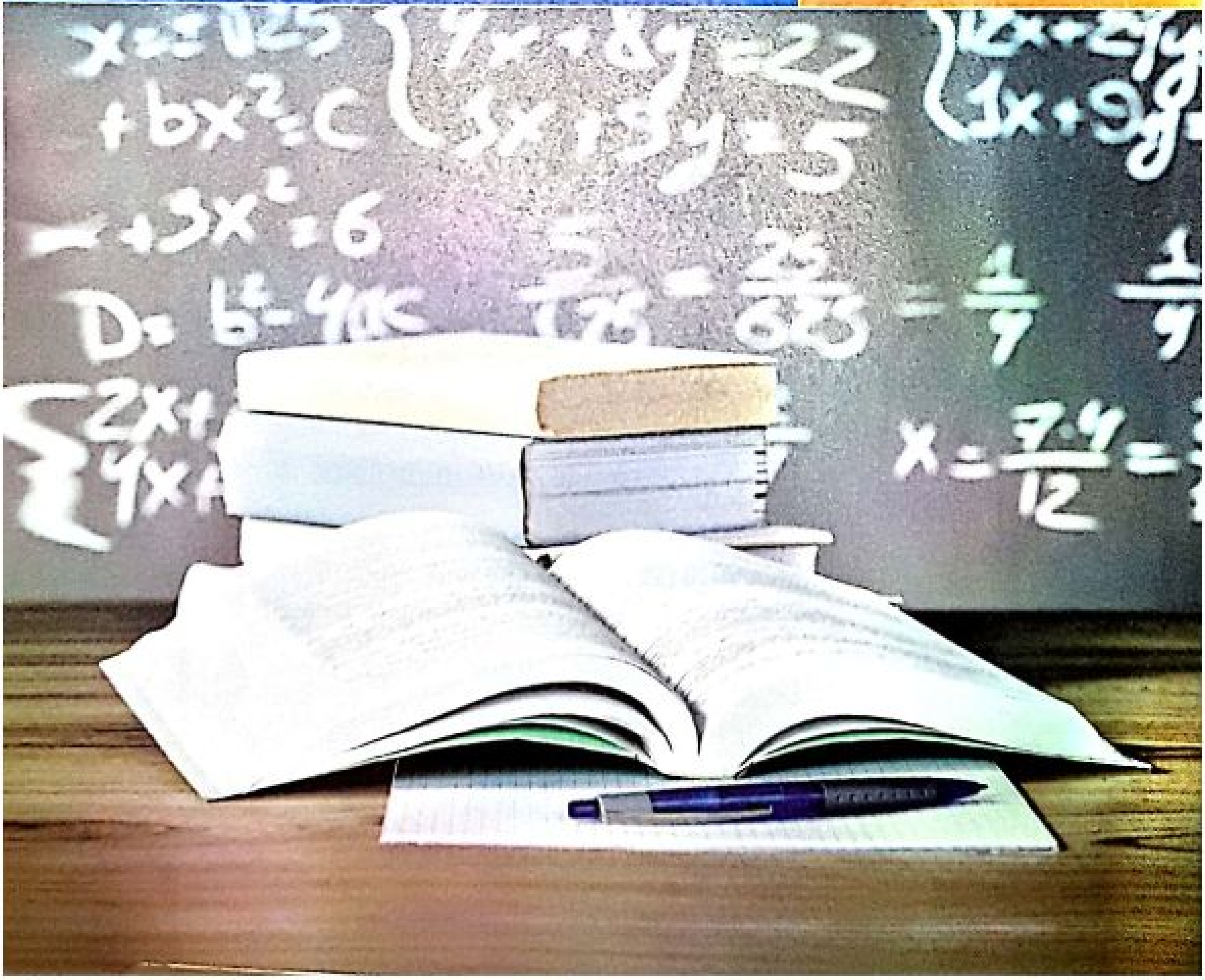
الــدرس الثانى | قانون جيب التمام ، قاعدة جيب التمام ٣٤٢

الــدرس الثالث | حل المثلث ٣٥٧

أولًا الجبــــر

الوحدة الأولى الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات.

الوحدة الثانية الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها.



الوحدة الأولى

الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات

دروس الوحدة

متطلبات قبلية على الوحدة الأولى

الدرس 1 الدوال الحقيقية (تحديد المجال والمدى - بحث الاطراد).

الدرس 2 العمليات على الدوال - تركيب دالتين.

الدرس 3 بعض خواص الدوال (الدوال الزوجية والفردية - الدوال الأحادية).

الدرس 4 التمثيل البيانى للدوال الأساسية ورسم الدالة مجزأة المجال.

الدرس 5 التحويلات الهندسية لمنحنيات الدوال الأساسية.

الدرس 6 حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة.

فى نهاية الوحـــدة : تطبيقات حياتية على الوحدة الأولى.

* **إذا كانت س ، ص مجموعتين غير خاليتين فإن :**

الدالة من المجموعة س إلى المجموعة ص هى علاقة تربط كل عنصر من عناصر س بعنصر واحد فقط من عناصر ص وتسمى س بمجال الدالة ، ص بالمجال المقابل.

، مجموعة صور عناصر مجموعة المجال س بـ «مدى الدالة» وهى مجموعة جزئية من المجال المقابل ص

* الدالة د تكتب رياضيًا د : س ⟵ ص ، قاعدة الدالة تكتب ص = د (س)

* بيان الدالة = {(س ، ص) ، س ∈ س ، ص ∈ ص ، ص = د (س)}

* يمكن تمثيل الدالة بالمخطط السهمى أو البيانى (الديكارتى)

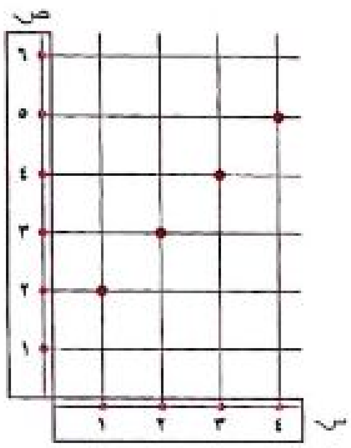
فمثلًا : إذا كانت : س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}

، ص = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

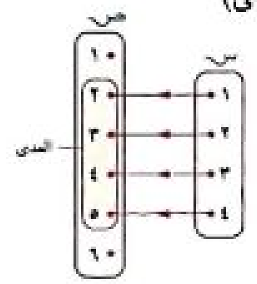
وكانت الدالة د : س ⟵ ص

حيث د (س) = س + ١

فإن بيان الدالة = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٤ ، ٥)}



المخطط البيانى (الديكارتى)



المخطط السهمى

* **لاحظ أن :**

ليس كل علاقة من س إلى ص دالة ولكن كل الدوال من س إلى ص هى علاقات تحقق أن :

– كل عنصر من س يظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط فى الأزواج المرتبة فى بيان العلاقة.

– كل عنصر من س يخرج منه سهم واحد وواحد فقط إلى أحد عناصر ص فى المخطط السهمى.

– كل خط رأسى يمر بنقطة واحدة فقط من النقط التى تمثل العلاقة فى المخطط البيانى.

* الدالة د : د (س) = $أ_0 + أ_1 س + أ_2 س^2 + أ_3 س^3 + \dots + أ_ن س^ن$

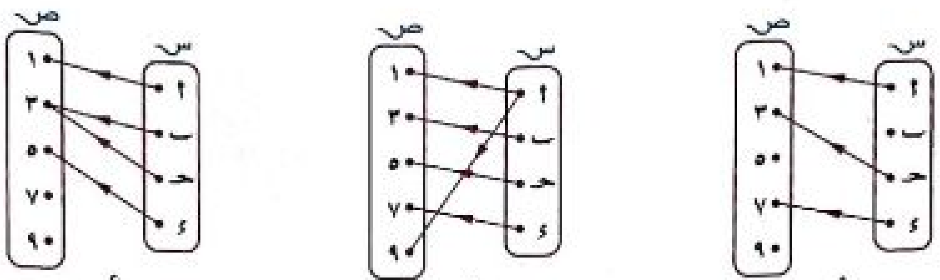
حيث $أ_0$ ، $أ_1$ ، $أ_2$ ، ... ، $أ_ن$ ثوابت ، $أ_ن$ ∈ ح − {٠} ، ن ∈ ط تسمى كثيرة حدود من الدرجة ن وكل من مجالها والمجال المقابل هو ح ما لم يذكر خلاف ذلك.

* الدالة د : ح ⟵ ح ، د (س) = أ $س^ن$ حيث أ ∈ $ح^*$ ، ن ∈ $ص_+$ تسمى دالة قوى لذلك عند جمع أو طرح دوال قوى مع ثوابت نحصل على دالة كثيرة حدود.

* مجموعة أصفار الدالة كثيرة الحدود د هى مجموعة قيم س التى تجعل د (س) = صفر وهى تساوى مجموعة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع الشكل البيانى للدالة مع محور السينات.

مثال ١

بين مع ذكر السبب أى العلاقات المبينة بالمخططات السهمية الآتية يمثل دالة وأيها لا يمثل دالة وإذا كانت دالة اذكر المجال والمدى :



$ع_1$ $ع_2$ $ع_3$

الحـــل

- $ع_1$ لا تمثل دالة   لأن العنصر ب $\in$ س لم يخرج منه أى سهم
- $ع_2$ لا تمثل دالة   لأن العنصر أ $\in$ س خرج منه سهمان
- $ع_3$ تمثل دالة   لأن كل عنصر من س خرج منه سهم واحد فقط إلى أحد عناصر ص

، مجال الدالة = {أ ، ب ، حـ ، ء} ، مدى الدالة = {١ ، ٣ ، ٥}

مثال ٢

حدد قيم أ ، ب ، حـ التى تجعل د (س) = ر (س) حيث :

د (س) = (أ + ب) $س^2$ − ٣ س − ٤ ، ر (س) = $س^2$ + (أ + حـ) س + ب

الحـــل

∵ د (س) = ر (س) عندما تتساوى معاملات قوى س المتناظرة

∴ أ + ب = ١   (١)   ، (أ + حـ) = −٣   (٢)   ، ب = −٤

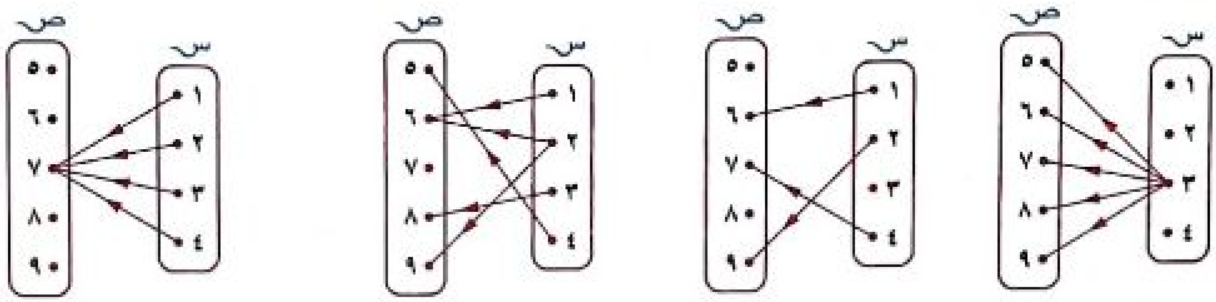
، بالتعويض عن قيمة ب فى (١)   ∴ أ − ٤ = ١   ∴ أ = ٥

وبالتعويض عن قيمة أ فى (٢)   ∴ ٥ + حـ = −٣   ∴ حـ = −٨

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① أى المخططات السهمية الآتية يمثل دالة من س إلى ص ؟



(أ) (ب) (جـ) (د)

② العلاقة المبينة بمجموعة الأزواج المرتبة والتى لا تمثل دالة هى ....

(أ) {(١ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ، (٥ ، ٧) ، (٧ ، ٩)}

(ب) {(٢ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٢ ، ١) ، (٣ ، ٥)}

(جـ) {(٠ ، ٣) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٣)}

(د) {(−٣ ، ٥) ، (−١ ، ٥) ، (٠ ، ٥) ، (٢ ، ٥)}

③ إذا كانت د : ح ← ح وكانت د تربط العدد بنصف مربعه مضافًا إليه ٢

فإن : د (٢) = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) ٣ (د) ٥

④ إذا كانت ط هى مجموعة الأعداد الطبيعية أى مما يأتى يمثل دالة من ط ← ط ؟

(أ) د (س) = $\frac{٢ س}{٣}$ (ب) ر (س) = ١ − س

(جـ) هـ (س) = ٢ س + ٣ (د) ن (س) = $\frac{١}{س - ٢}$

⑤ إذا كانت د : {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} ← ح حيث د (س + ٢) = ٣ س + ١

فإن : د (٣) = ...

(أ) ١٠ (ب) ٩ (جـ) ٤ (د) ١

⑥ مجال الدالة د حيث د (س) = $\frac{س^2 - ٨}{٤}$ هو ....

(أ) ح　　(ب) ح - {٨}　　(جـ) ح - {٢}　　(د) ح - {٤}

⑦ إذا كانت د : $ح^+$ ⟵ ح ، د (س) = $\frac{س^2 + ١}{س}$ فإن مجال الدالة هو ....

(أ) ح　　(ب) ح - {٠}　　(جـ) $ح^+$　　(د) ح - {-١}

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ إذا كانت د ، ر كثيرتي حدود حيث د (س) = $(أ س + ٥)^2$ ،

ر (س) = ٩ $س^2$ + ٣٠ س + حـ - ٤ وكانت د (س) = ر (س)

أوجد قيمتي : أ ، حـ　　٣ ، ٢٩، ٣٠

---

٢ حدد قيم أ ، ب ، حـ التي تجعل د (س) = ر (س) حيث :

① د (س) = (أ + ب) $س^2$ + ٣ س - ٢ ، ر (س) = ٥ $س^2$ + (أ + حـ) س + ب

② د (س) = (أ + ب) $س^2$ - ٢ ، ر (س) = $س^2$ + (أ + حـ) س + ب

③ د (س) = (أ + ٢ ب) $س^2$ - حـ س + ٤ ، ر (س) = ٧ $س^2$ + ٥ س + (أ - ب)

الدرس **1**

الدوال الحقيقية
(تحديد المجال والمدى - بحث الاطراد)



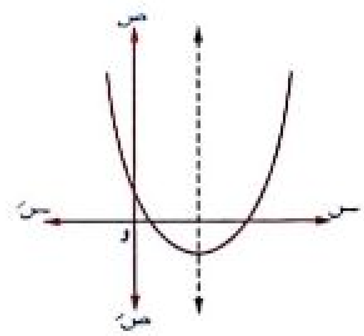
الدالة الحقيقية

الدالة د : س ⟵ ص تسمى دالة حقيقية إذا كان كل من المجال (س) والمجال المقابل (ص) هو مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية فعلية منها.

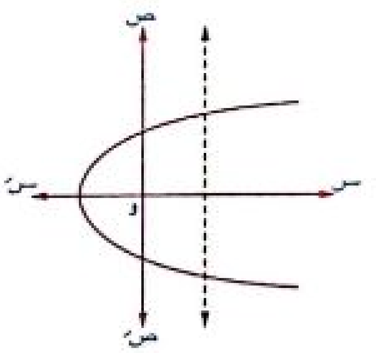
- **تحديد كون العلاقة من س ⟵ ص دالة أم لا :**

[١] **جبريًا** : العلاقة تكون دالة إذا كان كل قيمة للمتغير س $\in$ س يناظرها قيمة واحدة فقط للمتغير ص $\in$ ص

[٢] **بيانيًا (اختبار الخط الرأسى)** : العلاقة لا تمثل دالة إذا وجد خط مستقيم رأسى (يوازى محور الصادات) يقطع الشكل البيانى فى أكثر من نقطة :



التمثيل البيانى للعلاقة يمثل دالة من س ⟵ ص



التمثيل البيانى للعلاقة لا يمثل دالة من س ⟵ ص

مثال ❶

بين أيًا من العلاقتين الآتيتين تمثل دالة وأيهما لا تمثل دالة على ح مع ذكر السبب :

[١] ص = س^{٢} + ٣

[٢] ص^{٢} = س^{٢} + ٩

الحل

(١) العلاقة ص = $س^٢$ + ٣ تمثل دالة

لأن كل قيمة حقيقية للمتغير س يناظرها قيمة وحيدة فقط للمتغير ص

فمثلاً : عند س = ٣ ∴ ص = ١٢

، وعند س = -٢ ∴ ص = ٧ ، .... وهكذا

(٢) العلاقة $ص^٢$ = $س^٢$ + ٩ لا تمثل دالة

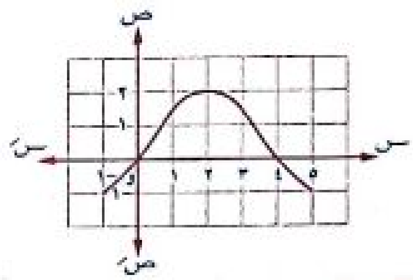
لأنه توجد على الأقل قيمة حقيقية للمتغير س يناظرها قيمتان مختلفتان للمتغير ص

فمثلاً : عند س = ٤ ∴ $ص^٢$ = ٢٥ ∴ ص = ± ٥

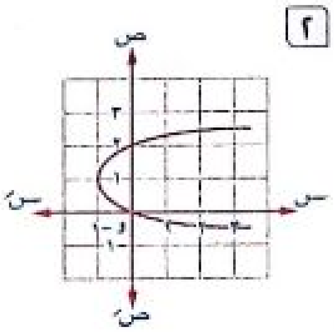
مثال ٢

بين أيًا من الأشكال البيانية الآتية يمثل دالة على ح وأيها لا يمثل دالة مع ذكر السبب :

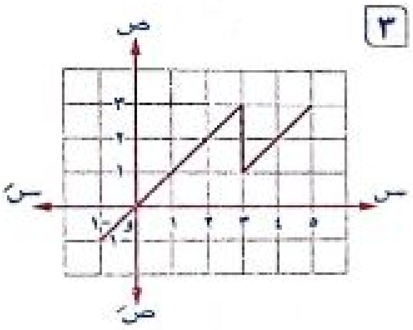
(١)



(٢)



(٣)



الحل

(١) يمثل دالة لأن كل خط رأسي يقطع المنحنى في نقطة واحدة على الأكثر.

(٢) لا يمثل دالة لأنه يوجد خط رأسي يقطع المنحنى في أكثر من نقطة واحدة.

(٣) لا يمثل دالة لأنه يوجد خط رأسي يمر بالنقطة (٣ ، ٠) ويقطع المنحنى في أكثر من نقطة واحدة.

ملاحظتان

(١) العلاقة ص = ٤ (تمثل بخط مستقيم أفقي يوازي محور السينات) تعبر عن دالة من س إلى ص لأن كل عنصر من س يرتبط بعنصر واحد فقط من ص

(٢) العلاقة س = ٤ (تمثل بخط مستقيم رأسي يوازي محور الصادات) لا تعبر عن دالة من س إلى ص لأن العنصر س = ٤ ارتبط بعدد لانهائي من عناصر ص

تحديد مجال الدوال الحقيقية

يتعين مجال الدالة من قاعدتها أو من الشكل البياني لها.

أولاً تعيين مجال الدالة إذا عُلمت قاعدتها

١ الدالة كثيرة الحدود

د : د (س) = $أ_٠$ + $أ_١$ س + $أ_٢$ $س^٢$ + ... + $أ_ن$ $س^ن$ حيث : $أ_٠$ ، $أ_١$ ، $أ_٢$ ، .... ، $أ_ن$ ثوابت حقيقية

، $أ_ن$ ∈ ح − {٠} كثيرة حدود من الدرجة ن

فإن مجال الدالة كثيرة الحدود يساوى ح ما لم تكن معرفة على مجموعة جزئية منها.

فمثلاً : د : د (س) = ٣ كثيرة حدود ثابتة مجالها = ح

، د : د (س) = ٢ س + ١ ، س ≥ ١

كثيرة حدود من الدرجة الأولى مجالها =]− ∞ ، ١]

، د : د (س) = $س^٢$ − ٤ س + ٣ كثيرة حدود من الدرجة الثانية مجالها = ح

٢ الدالة الكسرية

إذا كانت د دالة كسرية حيث د (س) = $\frac{هـ (س)}{ن (س)}$ ، هـ ، ن كثيرتى حدود

فإن : مجال الدالة د هو ح − مجموعة أصفار المقام.

مثال ٢

عين مجال كل من الدوال الكسرية المعرفة بالقواعد الآتية :

١ د (س) = $\frac{١}{س}$

٢ د (س) = $\frac{٣}{س − ٢}$

٣ د (س) = $\frac{س − ١}{٢ س^٢ + ٥ س}$

٤ د (س) = $\frac{س − ٣}{س^٢ − ٥ س + ٦}$

٥ د (س) = $\frac{س + ١}{س^٢ − ٤ س + ٤}$

٦ د (س) = $\frac{س}{س^٢ + ٢٥}$

الحل

١ المجال = ح − {٠}

٢ المجال = ح − {٢}

٣ بوضع ٢ $س^٢$ + ٥ س = ٠ ∴ س (٢ س + ٥) = ٠

∴ س = ٠ أ، س = $\frac{-٥}{٢}$ ∴ المجال = ح − {٠ ، $\frac{-٥}{٢}$}

٤ بوضع $س^٢$ − ٥ س + ٦ = ٠ ∴ (س − ٢) (س − ٣) = ٠

∴ س = ٢ أ، س = ٣ ∴ المجال = ح − {٢ ، ٣}

٥ بوضع $س^٢$ − ٤ س + ٤ = ٠ ∴ $(س − ٢)^٢$ = ٠

∴ س = ٢ ∴ المجال = ح − {٢}

٦ بوضع $س^2 + 25 = 0$ وهذه المعادلة ليس لها حل فى ح أى لا يوجد أصفار حقيقية للمقام

∴ المجال = ح

٣ دالة الجذر النونى

إذا كانت د (س) = $\sqrt[ن]{هـ(س)}$ حيث ن ∈ ص⁺ ، ن > ١ ، هـ (س) كثيرة حدود

أولاً : عندما ن عدد فردى فإن مجال الدالة د هو ح

ثانيًا : عندما ن عدد زوجى فإن مجال الدالة د هو مجموعة قيم س التى تحقق هـ (س) ≥ ٠

حيث ن تسمى دليل الجذر.

مثال ٤

عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية :

١ د (س) = $\sqrt{س + 2}$

٢ د (س) = $\sqrt{س^2 + 5}$

٣ د (س) = $\sqrt{-2س + 3}$

٤ د (س) = $\sqrt[3]{9 - س^2}$

٥ د (س) = $\sqrt{4س^2 - 12س + 9}$

٦ د (س) = $\sqrt{س^2 - 4}$

٧ د (س) = $\frac{1}{\sqrt{4 + 3س - س^2}}$

الحل

١ ∵ دليل الجذر عدد زوجى. ∴ الدالة معرفة بشرط س + ٢ ≥ ٠

∴ س ≥ -٢ ∴ المجال = [-٢ ، ∞[

٢ ∵ دليل الجذر عدد زوجى.

∴ الدالة معرفة بشرط $س^2 + 5 \geq 0$ وهو متحقق لكل قيم س الحقيقية

∴ المجال = ح

٣ ∵ دليل الجذر عدد زوجى. ∴ -٢ س + ٣ ≥ ٠

∴ س ≤ $\frac{3}{2}$ ∴ المجال =]-∞ ، $\frac{3}{2}$]

٤ ∵ دليل الجذر عدد فردى. ∴ المجال = ح

٥ ∵ دليل الجذر عدد زوجى.

∴ الدالة معرفة بشرط أن : $4س^2 - 12س + 9 \geq 0$

∴ $(2س - 3)^2 \geq 0$

، ∵ مجموعة حل المتباينة = ح ∴ مجال الدالة د = ح

٦ ∵ دليل الجذر عدد زوجي.

∴ الدالة معرفة بشرط أن : $س^٢ - ٤ \geq ٠$

∴ $(س - ٢)(س + ٢) \geq ٠$

، ∵ مجموعة حل المتباينة = $ح -]-٢ ، ٢[$

∴ مجال الدالة د = $ح -]-٢ ، ٢[$

٧ ∵ الدالة تكون معرفة بشرط أن : $٤ + ٣س - س^٢ > ٠$

∴ $س^٢ - ٣س - ٤ < ٠$

∴ $(س - ٤)(س + ١) < ٠$

، ∵ مجموعة حل المتباينة = $]-١ ، ٤[$

∴ مجال الدالة د = $]-١ ، ٤[$

تذكر أن

(حل متباينات الدرجة الثانية في متغير واحد)

إذا كان : ل ، م حيث ل < م هما جذران حقيقيان للمعادلة :

$أس^٢ + ب س + حـ = ٠ ، أ > ٠$

فإن مجموعة الحل في ح للمتباينة :

١ $أس^٢ + ب س + حـ \geq ٠$ هي $ح -]ل ، م[$

٢ $أس^٢ + ب س + حـ > ٠$ هي $ح - [ل ، م]$

٣ $أس^٢ + ب س + حـ \leq ٠$ هي $[ل ، م]$

٤ $أس^٢ + ب س + حـ < ٠$ هي $]ل ، م[$

٤ الدالة مجزأة المجال «ذات المقاطع»

هي دالة معرفة بقواعد مختلفة في فترات مختلفة من مجالها ومجال هذه الدالة يساوي اتحاد الفترات المعرفة فيها قواعدها.

مثال ٥

عين مجال كل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين :

١ $د(س) = \begin{cases} ٢ - س ، & س < ٠ \\ س - ٢ ، & س > ٠ \end{cases}$

٢ $د(س) = \begin{cases} س^٢ ، & -٢ \leq س < ٠ \\ س ، & ٠ \leq س \leq ١ \\ \frac{١}{س} ، & س > ١ \end{cases}$

الحـل

١ الدالة د معرفة على فترتين كما يلي :

معرفة عندما $س \in]-\infty ، ٠[$

، معرفة عندما $س \in]٠ ، \infty[$

∴ مجال د = $]-\infty ، ٠[\cup]٠ ، \infty[= ح - \{٠\}$



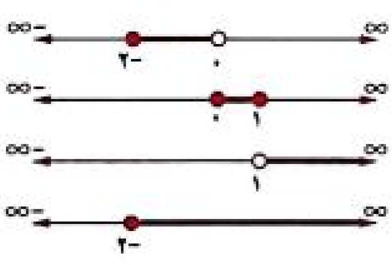
٢ الدالة د معرفة على ثلاث فترات كما يلي :

معرفة عندما $س \in [-٢ ، ٠[$

، معرفة عندما $س \in [٠ ، ١]$

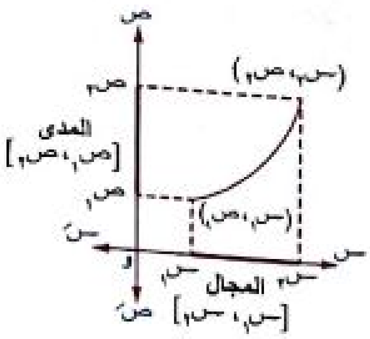
، معرفة عندما $س \in]١ ، \infty[$

∴ مجال د = $[-٢ ، ٠[\cup [٠ ، ١] \cup]١ ، \infty[= [-٢ ، \infty[$



ثانيًا تعيين مجال ومدى الدالة من الشكل البيانى لها

من الشكل البيانى للدالة يمكن استنتاج مجال ومدى الدالة فيكون :

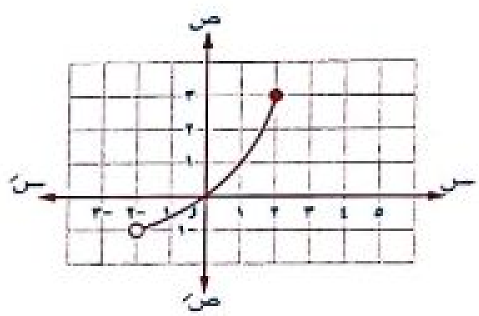


١ مجال الدالة هو مجموعة الإحداثيات السينية لجميع النقط التى تنتمى إلى منحنى الدالة.

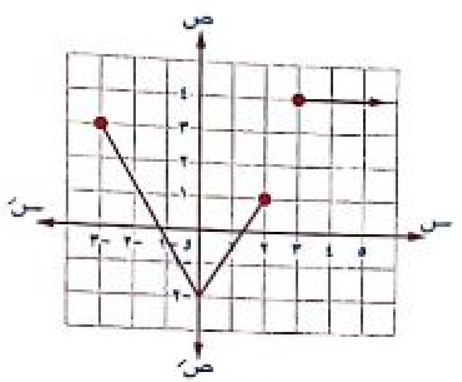
٢ مدى الدالة هو مجموعة الإحداثيات الصادية لجميع النقط التى تنتمى إلى منحنى الدالة.

مثال ٦

عين مجال ومدى كل من الدالتين الممثلتين بالشكلين الآتيين :



شكل(١)



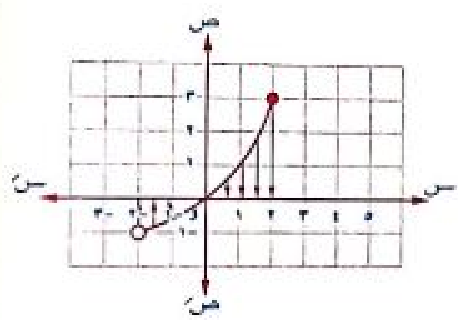
شكل(٢)

الحل

فى شكل(١) :

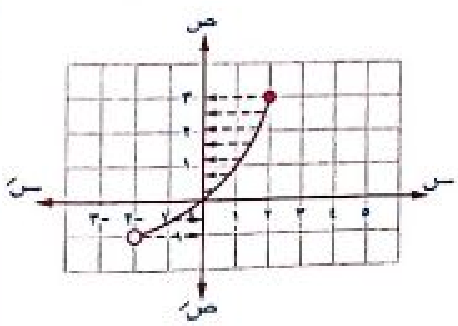
* الإحداثيات السينية لجميع نقط منحنى الدالة هى الفترة]−٢ ، ٢]

∴ المجال =]−٢ ، ٢]



* الإحداثيات الصادية لجميع نقط منحنى الدالة هى الفترة]−١ ، ٣]

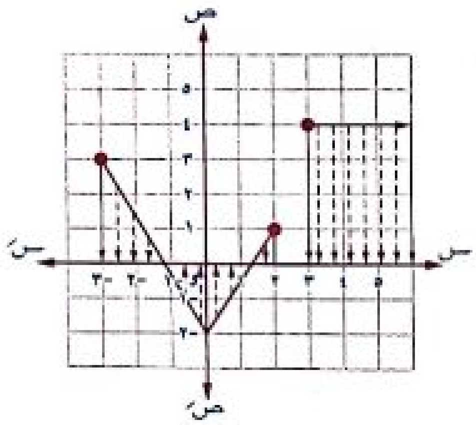
∴ المدى =]−١ ، ٣]



لاحظ أن

* الدائرة المفرغة عند النقطة (−٢ ، −١) توضح أن النقطة ∉ بيان الدالة وبالتالى −٢ ∉ مجال الدالة ، −١ ∉ مدى الدالة
* الدائرة المغلقة عند النقطة (٢ ، ٣) توضح أن النقطة ∈ بيان الدالة وبالتالى ٢ ∈ مجال الدالة ، ٣ ∈ مدى الدالة

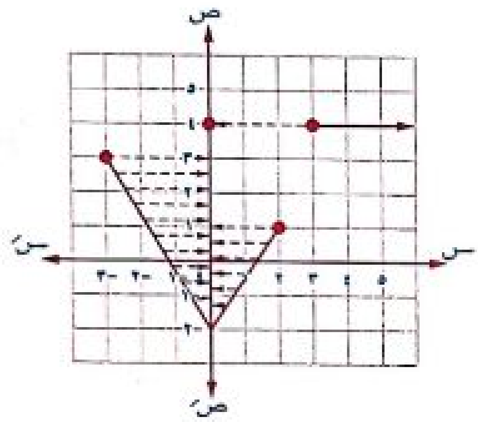
في شكل (٢) :



* الإحداثيات السينية لجميع نقط منحنى الدالة

هى الفترتين [-٣ ، ٢] ، [٣ ، ∞[

∴ المجال = [-٣ ، ٢] ∪ [٣ ، ∞[



* ∵ الإحداثيات الصادية لجميع نقط الشعاع الأفقى

هى ص = ٤ ، الإحداثيات الصادية لجزء المنحنى الآخر

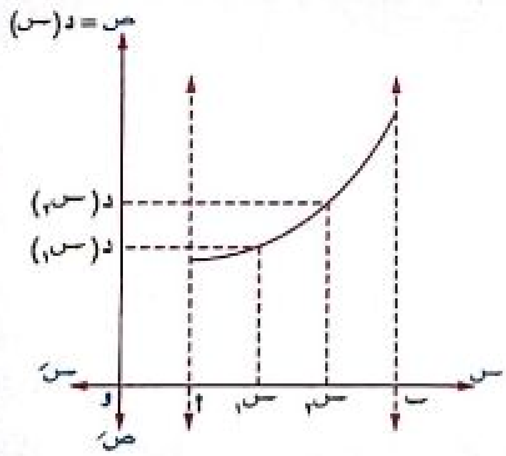
هى الفترة [-٢ ، ٣]

∴ المدى = [-٢ ، ٣] ∪ {٤}

تعيين اطراد الدالة من الشكل البيانى لها

* يقصد ببحث اطراد دالة ما تحديد الفترات التى تكون فيها الدالة تزايدية والفترات التى تكون فيها الدالة تناقصية والفترات التى تكون فيها الدالة ثابتة.

تعريف ① تزايد الدالة



يقال للدالة د إنها تزايدية فى الفترة]أ ، ب[

إذا كان :

$س_٢ > س_١ \Leftarrow د(س_٢) > د(س_١)$

لكل $س_١ ، س_٢ \in]أ ، ب[$

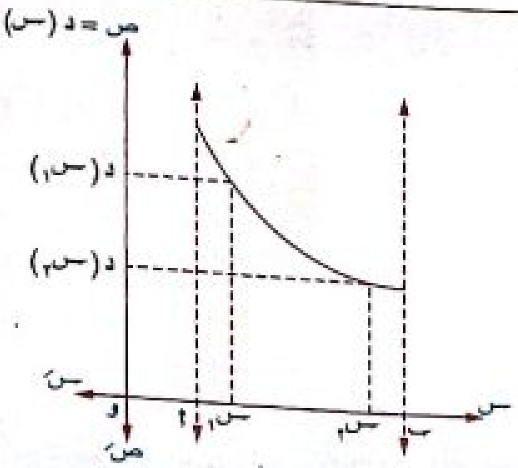
تعريف ② تناقص الدالة

يقال للدالة د إنها تناقصية في الفترة]أ ، ب[

إذا كان :

$س_{٢} > س_{١} \Leftarrow د(س_{٢}) < د(س_{١})$

لكل $س_{١}$ ، $س_{٢} \in$]أ ، ب[



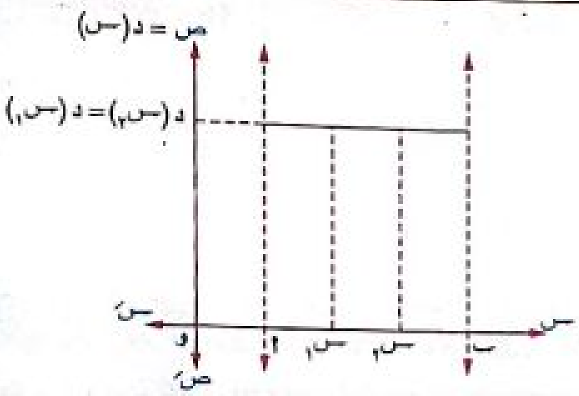
تعريف ③ ثبوت الدالة

يقال للدالة د إنها ثابتة في الفترة]أ ، ب[

إذا كان :

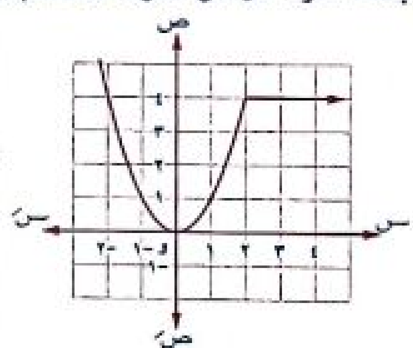
$س_{٢} > س_{١} \Leftarrow د(س_{٢}) = د(س_{١})$

لكل $س_{١}$ ، $س_{٢} \in$]أ ، ب[

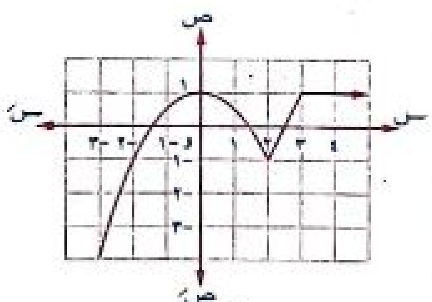


مثال ٧

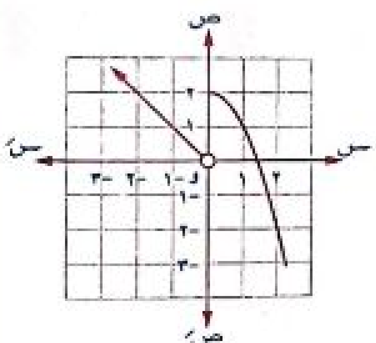
ابحث اطراد كل من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية :



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

الحل

شكل (١) : الدالة تناقصية في الفترة]− ∞ ، ٠[، تزايدية في الفترة]٠ ، ٢[، ثابتة في الفترة]٢ ، ∞[

شكل (٢) : الدالة تزايدية في الفترة]− ∞ ، ٠[، تناقصية في الفترة]٠ ، ٢[

، تزايدية في الفترة]٢ ، ٣[، ثابتة في الفترة]٣ ، ∞[

شكل (٣) : الدالة تناقصية في كل من الفترتين]− ∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[

اختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) جميع العلاقات الآتية تكون فيها ص دالة فى س ما عدا العلاقة ....

(أ) ص = ٣ س + ١ (ب) ص = س^{٢} − ٤

(جـ) س = ص^{٢} − ٢ (د) ص = جا س

(٢) فى جميع العلاقات التالية تكون ص دالة فى س ماعدا العلاقة ....

(أ) ص = جتا س (ب) ص = ٢

(جـ) ص = س^{٢} − ١ (د) ص^{٢} = س^{٢} + ١

(٣) إذا كانت : د ($\sqrt{س}$) = س^{٢} فإن : د (٢) = ...

(أ) $\sqrt{٢}$ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ١٦

(٤) إذا كانت د : ح ← ح حيث د (س) = (أ + ١) س + ب − ٢ وكانت :
د (س) تربط كل عدد حقيقى بنفسه فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (١ ، ٣) (ب) (٠ ، ٣) (جـ) (٠ ، ٢) (د) (٠ ، ٠)

(٥) الدالة د : د (س) = ٥ مجالها هو ....

(أ) ح (ب) ح$^{+}$ (جـ) {٥} (د) {٠ ، ٥}

(٦) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{٢ س + ١}{س − ٢}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {−$\frac{١}{٢}$} (جـ) ح − {−$\frac{١}{٢}$ ، ٢} (د) ح − {٢}

(٧) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{س + ٥}{(س + ٥)(س − ٥)}$ هو ....

(أ) ح (ب) {٥ ، −٥} (جـ) ح − {٥} (د) ح − {٥ ، −٥}

(٨) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{س^{٢} + ١}{س^{٢} + ٤ س}$ هو ....

(أ) ح − {١ ، −١} (ب) ح − {٠ ، −٤} (جـ) ح (د) ح − {٠ ، ٤}

(٩) مجال الدالة د حيث د (س) = $\frac{٥ + ٢ س}{س^٢ + س + ١}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٥} (جـ) ح − {٢} (د) ح − {−٢ ، −٥}

(١٠) مجال الدالة د حيث د (س) = $\frac{٧}{س^٢ − س}$ هو ....

(أ) ح − {٣} (ب) ح − {٧}

(جـ) ح − {٠ ، ١} (د) ح − {٠ ، ١ ، −١}

(١١) مجال الدالة د حيث د : ح$^+$ ⟵ ح ، د (س) = $\frac{س − ١}{٤ س}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٠} (جـ) ح$^+$ (د) ح − {١}

(١٢) إذا كان مجال الدالة د : د (س) = $\frac{٢}{س^٢ − ٦ س + ك}$ هو ح − {٣} فإن : ك = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ± ٩ (د) ١٨

(١٣) مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{س − ٣}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٣} (جـ) [٣ ، ∞[(د)]−∞ ، ٣]

(١٤) مجال الدالة د حيث د (س) = $\sqrt{٤ − س}$ هو ....

(أ) [٤ ، ∞[(ب)]−∞ ، ٤] (جـ)]٤ ، ∞[(د)]−∞ ، ٤[

(١٥) مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt[٣]{س − ٥}$ هو ....

(أ) [٥ ، ∞[(ب)]−∞ ، ٥] (جـ) ح (د) ح$^+$

(١٦) مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt[٣]{٩ − س^٢}$ هو ....

(أ)]−٣ ، ٣[(ب) ح (جـ) ح −]−٣ ، ٣[(د) [−٣ ، ٣]

(١٧) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{٥}{\sqrt{س − ٤}}$ هو ....

(أ) [٤ ، ∞[(ب)]٤ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ٤] (د)]−∞ ، ٤[

(١٨) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{١}{\sqrt{٩ − س^٢}}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − [−٣ ، ٣] (جـ) ح − {−٣ ، ٣} (د)]−٣ ، ٣[

(١٩) مجال الدالة د حيث د (س) = $\sqrt[٤]{س^٢ + ٤}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٤} (جـ) ح − {٠} (د) ح − {−٢ ، ٢}

(٢٠) مجال الدالة د حيث د (س) = $\frac{١}{\sqrt[٣]{س^٢ - ٥ س - ٦}}$ هو ....

(أ) ح − {٥} (ب) ح − {٦} (جـ) ح − {١ ، −٦} (د) ح − {−١ ، ٦}

(٢١) إذا كانت م مساحة سطح دائرة وكان س طول نصف قطر الدائرة وكان م = π س^٢

أى أن المساحة دالة فى س ، فإن مجالها = ...

(أ) ح (ب) ح − {٠} (جـ) ص$^+$ (د) ح$^+$

(٢٢) إذا كان مجال الدالة د : د (س) = $\frac{١}{\sqrt{س - أ}}$ هو]−٣ ، ∞[فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) ± ٣ (د) $\sqrt{٣}$

(٢٣) إذا كان مجال الدالة د : د (س) = $\frac{١}{\sqrt{س^٢ + أ}}$ هو ح − [−٥ ، ٥] فإن : أ = ...

(أ) ٥ (ب) −٢٥ (جـ) −٥ (د) ٢٥

(٢٤) إذا كان مجال الدالة د : د (س) = $\frac{١}{\sqrt{س^٢ + أ}}$ هو ح فإن : أ لايمكن أن تساوى ....

(أ) ٥ (ب) $\sqrt{٤}$ (جـ) صفر (د) ٩

(٢٥) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} -٤ س + ٣ & ، س < ٣ \\ - س^٢ & ، ٣ \le س \le ٨ \\ ٣ س^٢ + ١ & ، س > ٨ \end{cases}$ فإن : د (١٠) = ...

(أ) −٣٧ (ب) −١٠٠٠ (جـ) ٣٠١ (د) ٤٣

(٢٦) مجال الدالة د حيث د (س) = $\begin{cases} -٢ & ، س < ٢ \\ ٢ & ، س > ٢ \end{cases}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٣} (جـ) ح − {−٢} (د) ح − {٢}

(٢٧) مجال الدالة د حيث د (س) = $\begin{cases} س & ، ٠ \le س \le ١ \\ ٢ - س & ، ١ < س \le ٢ \end{cases}$ هو ....

(أ) ح − {١} (ب) [٠ ، ٢] (جـ) ح − {٠ ، ٢} (د)]٠ ، ٢[

(٢٨) مجال الدالة د : د (س) = $\begin{cases} س^٢ + ٢ & ، -٢ \le س < ٠ \\ س - ١ & ، س > ٠ \end{cases}$ هو ....

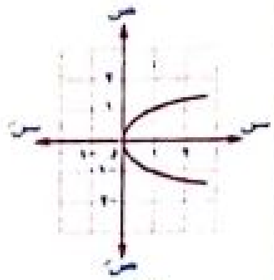
(أ) ح (ب) [−٢ ، ٠]

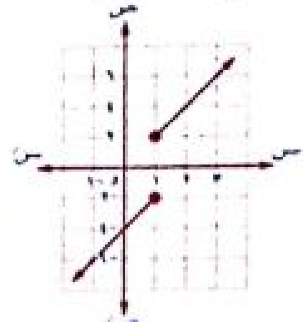
(جـ) [−٢ ، ∞[− {٠} (د) [−٢ ، ∞[

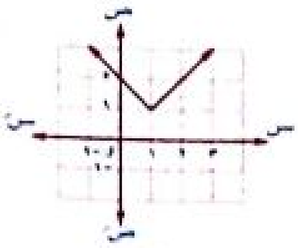
(٢٩) مجال الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٠ & ، س \le ٠ \\ ١ & ، س > ٣ \end{cases}$ هو ....

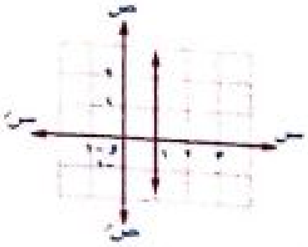
(أ) {٠ ، ١} (ب) [٠ ، ٣] (جـ) ح (د) ح −]٠ ، ٣]

(٣٠) الشكل الذى يمثل دالة فى س من بين الأشكال الآتية هو ....

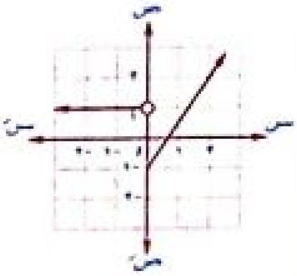

(أ)

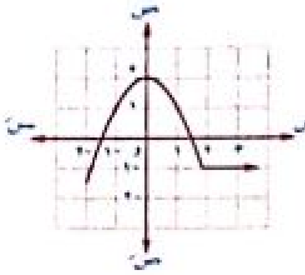

(ب)

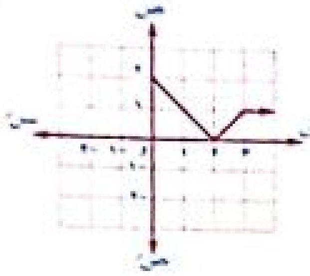

(جـ)

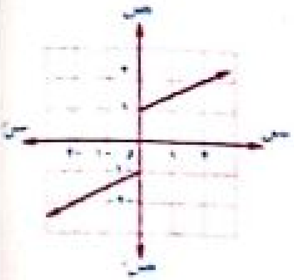

(د)

(٣١) أى الأشكال البيانية الآتية لا يمثل دالة فى س ؟

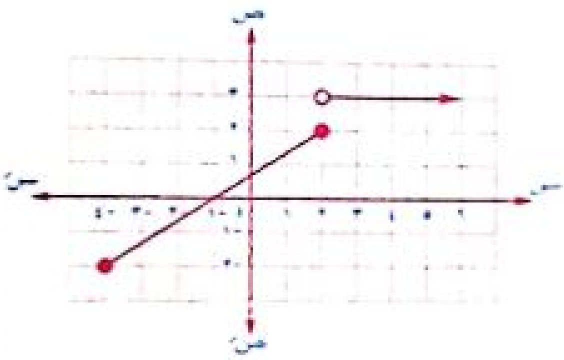

(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

(٣٢) الشكل المقابل يمثل ....



(أ) دالة د : [-٤ ، ٢] ⟵ ع

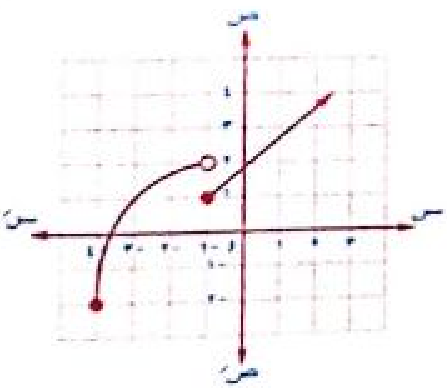
(ب) دالة د : [-٤ ، ∞[⟵ ع

(جـ) دالة د : [-٤ ، ٢] ⟵ [-٢ ، ٢]

(د) علاقة بين س ، ص ولا تمثل دالة.

(٣٣) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن مجالها هو ....



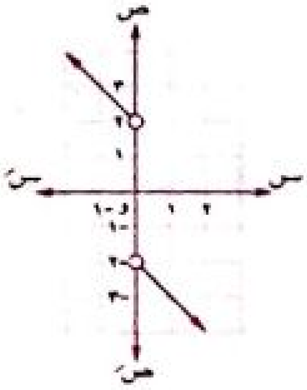
(أ) ع - {-٤ ، -١}

(ب)]-٤ ، -١[

(جـ) [-٤ ، ∞[

(د) [-٤ ، ∞[- {-١}

(٣٤) الشكل المقابل يمثل دالة في س مجالها ....



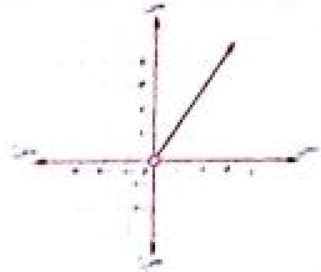
(أ) ح

(ب) ح −]−٢ ، ٢[

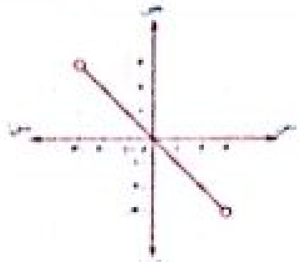
(جـ) ح − [−٢ ، ٢]

(د) ح − {٠}

(٣٥) أي من الأشكال الآتية تمثل منحنى دالة يكون فيه المدى ≠ المجال ؟



(أ)



(ب)

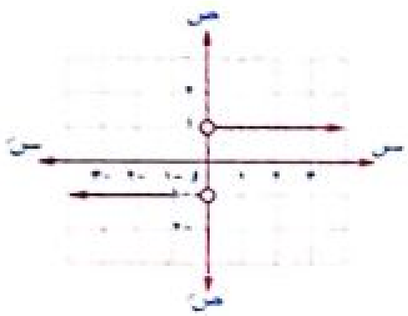


(جـ)



(د)

(٣٦) مدى الدالة الممثلة بالشكل المقابل هو ....



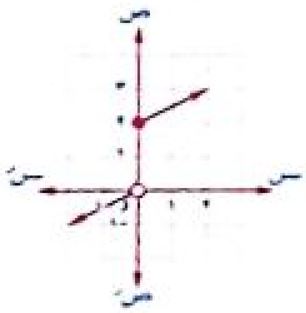
(أ) {١}

(ب) {١ ، −١}

(جـ) {−١}

(د) ح − {٠}

(٣٧) الشكل المقابل يمثل دالة في س مداها ....



(أ) ح − [٠ ، ٢]

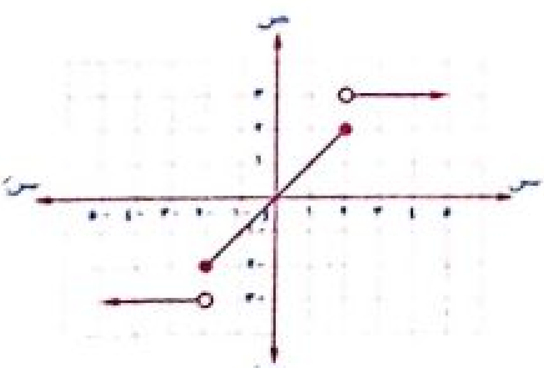
(ب) ح − {٠}

(جـ) ح − [٠ ، ٢[

(د) ح −]٠ ، ٢]

(٣٨) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن مداها هو ....



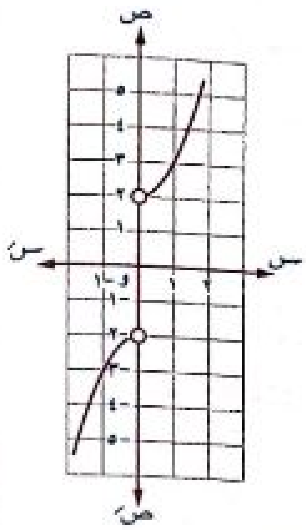
(أ) ح

(ب) [−٢ ، ٢]

(جـ) [−٢ ، ٢] ∪ {−٣ ، ٣}

(د)]−٣ ، ٣[

♣ (٣٩) فى الشكل المقابل :



أولاً : مدى الدالة هو ....

(أ) ح - {٠} (ب) ح - [-٢ ، ٢]

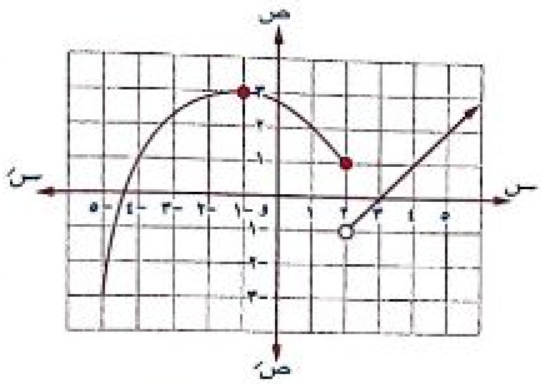
(جـ) ح (د) [-٢ ، ٢]

ثانيًا : الدالة تكون متزايدة فى ....

(أ)]- ∞ ، ٠[فقط. (ب)]٠ ، ∞[فقط.

(جـ)]- ∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[(د) ح - [-٢ ، ٢]

♣ (٤٠) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د



فإن الدالة تكون تزايدية فى ....

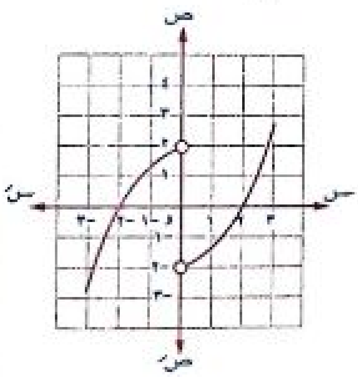
(أ)]- ∞ ، -١]

(ب)]- ∞ ، -١] ،]٢ ، ∞[

(جـ)]٢ ، ∞[

(د)]-١ ، ٢]

♣ (٤١) فى الشكل المقابل :



إذا كان المنحنى المرسوم يمثل الدالة د

أى العبارات الآتية صحيحة ؟

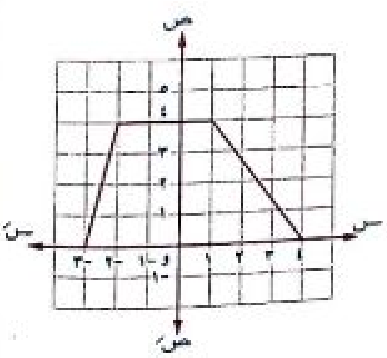
(أ) الدالة تزايدية على مجالها

(ب) الدالة تناقصية فى]- ∞ ، ٠[وتزايدية فى]٠ ، ∞[

(جـ) الدالة متزايدة فى كل من]- ∞ ، ٢[،]-٢ ، ∞[

(د) الدالة تزايدية فى كل من]- ∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[

• (٤٢) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د



أى العبارات الآتية خطأ ؟

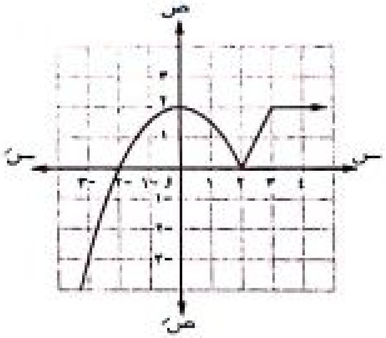
(أ) د ثابتة فى]-٢ ، ١[

(ب) د تناقصية فى]١ ، ٤[

(جـ) د تزايدية فى]-٣ ، -٢[

(د) د ثابتة فى]-٣ ، ٤[

(٤٣) فى الشكل المقابل :



إذا كانت الدالة متناقصة فى]٠ ، أ[وثابتة فى]ب ، ∞[

فإن : أ − ب = ...

(أ) ٥ (ب) ١

(جـ) −١ (د) ٣

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ إذا كان س ، ص متغيرين حقيقيين فحدد أى علاقة مما يأتى تمثل دالة فى س وأيها لا :

(١) ص = ٢ س + ٥

(٢) $ص^2$ = س + ٤

(٣) ص = $\sqrt{س^2 + ٤}$

(٤) $(س - ص)^2 = ٥$

(٥) $ص^3 - س^2 = ٢$

(٦) $ص^4 = س^2 - ٤ س + ٤$

(٧) ص = ٢

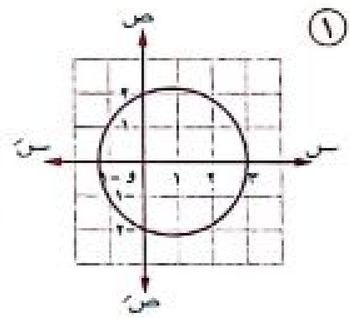
(٨) س = ٣

(٩) ص = ٣ جا س + جتا ٢ س

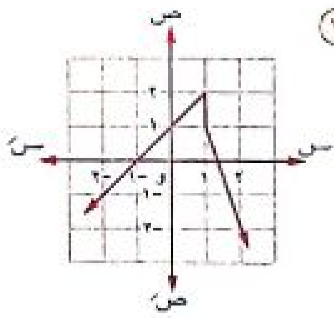
(١٠) س ص + ص = ٢ س + ٢

٢ فى كل شكل من الأشكال الآتية بين ما إذا كانت ص تمثل دالة فى س أم لا :

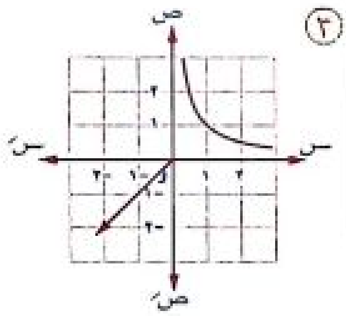
(١)



(٢)



(٣)



٣ عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية :

(١) د (س) = $\frac{٢ س + ٣}{س^2 - ٣ س + ٢}$

(٢) د (س) = $\frac{٨}{س^2 - ٦ س + ٩}$

(٣) د (س) = $\frac{س + ٣}{٢ س^2 - س - ٢}$

(٤) د (س) = $\frac{س + ١}{س^2 + ١}$

٤ عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية :

① د(س) = $\frac{٤}{\sqrt{٢س - ٥}}$

② 📖 د(س) = $\frac{٣}{\sqrt{س - ٣}}$

③ د(س) = $\frac{٢}{\sqrt{١ - س}}$

④ 📖 د(س) = $\sqrt{س^{٢} - ١٦}$

⑤ 📖 د(س) = $\frac{٥}{\sqrt{٩ - س^{٢}}}$

⑥ د(س) = $\sqrt{س^{٢} + ٢س + ٥}$

⑦ 📖 د(س) = $\frac{١}{\sqrt{س^{٢} - ٤س + ٤}}$

⑧ د(س) = $\frac{٥}{\sqrt{س} - ١}$

٥ عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية :

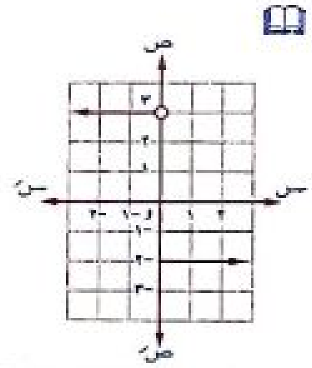
① د(س) = $\begin{cases} -٣ & ، س < ٢ \\ ٥ - س & ، س \geq ٢ \end{cases}$

② د(س) = $\begin{cases} س^{٢} - ١ & ، س \leq ٢ \\ -٥ & ، ٢ < س < ٤ \end{cases}$

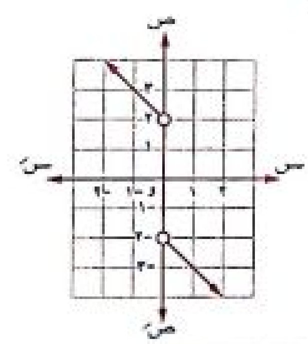
③ د(س) = $\begin{cases} ٢س & ، س \in [٠ ، ٢] \\ ٦ & ، س \in]٢ ، ٤[\\ س + ٢ & ، س \in [٤ ، ٦] \end{cases}$

٦ عين مجال ومدى ثم ابحث اطراد كل من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية :

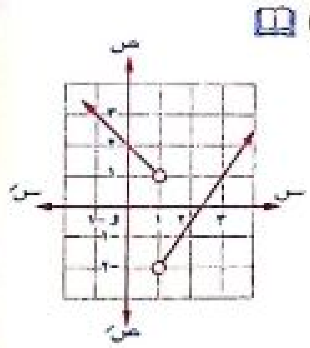
① 📖



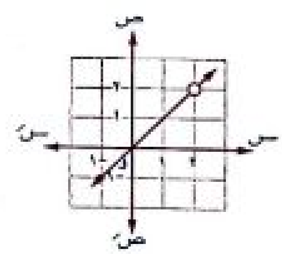
②



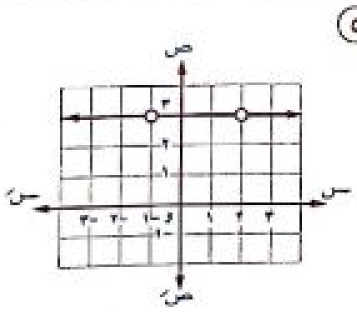
③ 📖



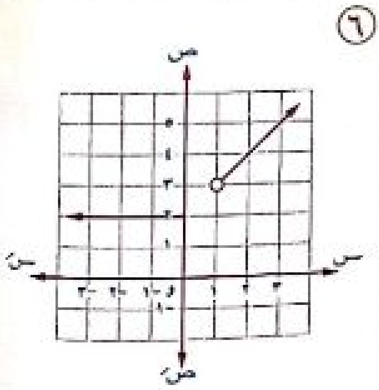
④



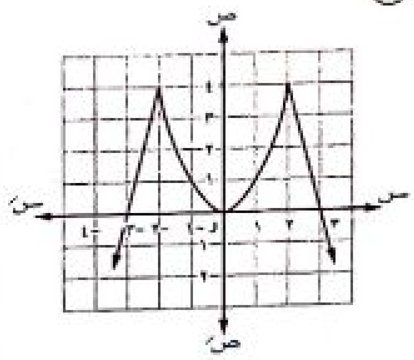
⑤



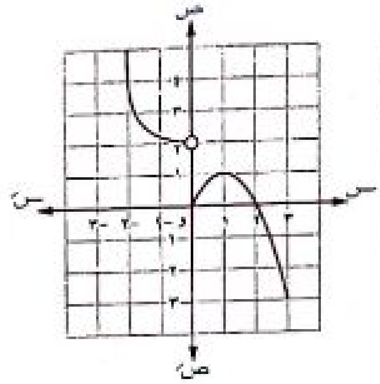
⑥



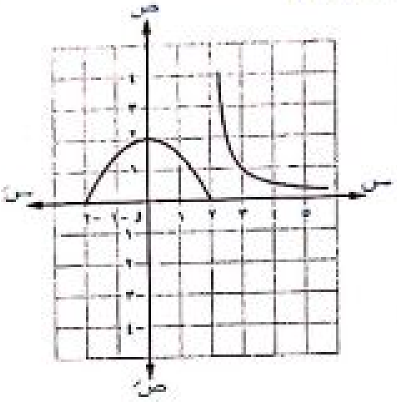
⑦



⑧



⑨



ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

❖ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

① إذا كانت العلاقة بين مجموع قياسات زوايا المضلع الداخلة (ص) ، عدد أضلاع المضلع (س) هى ص = π (س − ٢) فإن مجال الدالة ص = ...

(أ) ح$^{+}$ (ب) ح − {٢} (جـ) ص$^{+}$ (د) ص$^{+}$ − {١ ، ٢}

② مجال الدالة د : د (س) = $\frac{\text{س}}{\sqrt[3]{\text{س} - ٢}}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٢} (جـ) ح − {٠ ، ٢} (د) ح − {٨}

③ مجال الدالة د : د (س) = $\frac{\text{س}}{\sqrt[3]{٢\text{س} - \text{س}}}$ هو ....

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]−∞ ، ٠[

(جـ)]٠ ، ∞[− {١} (د)]٠ ، ∞[− {٣}

④ مجال الدالة د : د (س) = $\frac{٥}{\sqrt{\text{س} - ١} - ٣}$ هو ....

(أ) [١ ، ∞[(ب) [١ ، ∞[− {٣}

(جـ) [١ ، ∞[− {١٠} (د)]−٣ ، ∞[

⑤ مجال الدالة د : د (س) = $\frac{٧}{\sqrt{\text{س} - ١} + ٣}$ هو ....

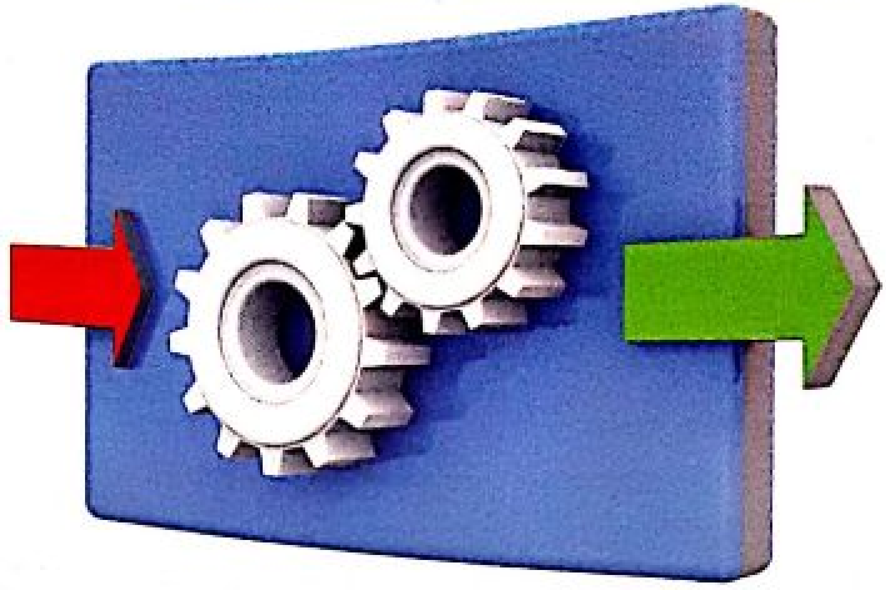
(أ) [١ ، ∞[(ب) [١ ، ∞[− {−٣}

(جـ) [١ ، ∞[− {١٠} (د) [٣ ، ∞[

⑥ مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{٦\text{س} - ٩ - \text{س}^{٢}}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٣} (جـ) [٣ ، ∞[(د) {٣}

الدرس 2 العمليات على الدوال - تركيب دالتين



* إذا كانت $د_{١}$ ، $د_{٢}$ دالتين مجالاهما $م_{١}$ ، $م_{٢}$ فإن :

١ $(د_{١} \pm د_{٢})(س) = د_{١}(س) \pm د_{٢}(س)$ ، مجال $(د_{١} \pm د_{٢})$ هو $م_{١} \cap م_{٢}$

٢ $(د_{١} \times د_{٢})(س) = د_{١}(س) \times د_{٢}(س)$ ، مجال $(د_{١} \times د_{٢})$ هو $م_{١} \cap م_{٢}$

٣ $\left(\frac{د_{١}}{د_{٢}}\right)(س) = \frac{د_{١}(س)}{د_{٢}(س)}$ حيث $د_{٢}(س) \neq ٠$

، مجال $\left(\frac{د_{١}}{د_{٢}}\right)$ هو $(م_{١} \cap م_{٢}) - ص(د_{٢})$ حيث $ص(د_{٢})$ مجموعة أصفار $د_{٢}$

ونلاحظ أنه فى جميع العمليات على الدوال يكون مجال الدالة الناتجة يساوى تقاطع مجالي الدالتين مع استثناء القيم التي تجعل المقام يساوى الصفر فى عملية القسمة.

مثال ١

إذا كانت $د : ح^{+} \longrightarrow ح$ حيث $د(س) = ٢س^{٢} - ٧س + ٥$

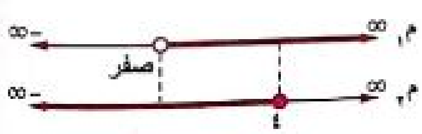
، $ر :]-\infty ، ٤] \longrightarrow ح$ حيث $ر(س) = ٢س - ٥$ أوجد :

١ $(د + ر)(س)$ ٢ $(د - ر)(س)$ ٣ $(د \times ر)(س)$ ٤ $\left(\frac{د}{ر}\right)(س)$

وعين مجال كل منهم ثم احسب قيمة كل من :

$(د + ر)(٣)$ ، $(د - ر)(٠)$ ، $(د \times ر)(-٣)$ ، $\left(\frac{د}{ر}\right)(١)$

الحل



مجال د = $م_{١} = ح^{+} =]٠ ، \infty[$

، مجال ر = $م_{٢} =]-\infty ، ٤]$

∴ المجال المشترك للدالتين = $م_{١} \cap م_{٢} = ح^{+} \cap]-\infty ، ٤] =]٠ ، ٤]$

١ $(د + ر)(س) = (٢س^٢ - ٧س + ٥) + (٢س - ٥) = ٢س^٢ - ٥س$

، المجال = $]٠ ، ٤[$

٢ $(د - ر)(س) = (٢س^٢ - ٧س + ٥) - (٢س - ٥) = ٢س^٢ - ٩س + ١٠$

، المجال = $]٠ ، ٤[$

٣ $(د \times ر)(س) = (٢س^٢ - ٧س + ٥)(٢س - ٥)$

$= ٤س^٣ - ٢٤س^٢ + ٤٥س - ٢٥$ ، المجال = $]٠ ، ٤[$

٤ $\left(\frac{د}{ر}\right)(س) = \frac{٢س^٢ - ٧س + ٥}{٢س - ٥} = \frac{(٢س - ٥)(س - ١)}{٢س - ٥} = س - ١$

، المجال = $]٠ ، ٤[- \left\{\frac{٥}{٢}\right\}$

القيم العددية : • $(د + ر)(٣) = ٢ \times ٩ - ٥ \times ٣ = ٣$

• $(د - ر)(٠)$ غير معرفة لأن صفر $\notin]٠ ، ٤[$

• $(د \times ر)(-٣)$ غير معرفة لأن $-٣ \notin]٠ ، ٤[$

• $\left(\frac{د}{ر}\right)(١) =$ صفر

مثال ٢

إذا كانت د ، ر دالتين حيث $د(س) = \frac{س}{س + ١}$ ، $ر(س) = \frac{س + ١}{س - ٢}$ **فأوجد :**

١ $(د + ر)(س)$ ثم احسب قيمة $(د + ر)(٣)$

٢ $(د - ر)(س)$ ثم احسب قيمة $(د - ر)(٢)$

٣ $(د \times ر)(س)$ ثم احسب قيمة $(د \times ر)(٣)$

٤ $\left(\frac{د}{ر}\right)(س)$ ثم احسب قيمة $\left(\frac{د}{ر}\right)(-١)$ ، $\left(\frac{د}{ر}\right)(١)$

الحل

مجال د = $م_١ = ح - \{-١\}$ ، مجال ر = $م_٢ = ح - \{٢\}$

∴ المجال المشترك للدالتين د ، ر = $م_١ \cap م_٢ = ح - \{-١ ، ٢\}$

١ $(د + ر)(س) = \frac{س}{س + ١} + \frac{س + ١}{س - ٢} = \frac{س(س - ٢) + (س + ١)^٢}{(س + ١)(س - ٢)}$

$= \frac{س^٢ - ٢س + س^٢ + ٢س + ١}{(س + ١)(س - ٢)} = \frac{٢س^٢ + ١}{(س + ١)(س - ٢)}$

، المجال = $ح - \{-١ ، ٢\}$ ، $(د + ر)(٣) = \frac{٢ \times ٩ + ١}{٤ \times ١} = \frac{١٩}{٤}$

[٢] $(\text{د} - \text{ر})(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س} + ١} - \frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ٢} = \frac{\text{س}(\text{س} - ٢) - (\text{س} + ١)^{٢}}{(\text{س} + ١)(\text{س} - ٢)}$

$= \frac{-٤\text{س} - ١}{(\text{س} + ١)(\text{س} - ٢)}$ ، المجال = ح − {−١ ، ٢}

، (د − ر) (٢) غير معرفة لأن ٢ ∉ مجال (د − ر)

[٣] $(\text{د} \times \text{ر})(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س} + ١} \times \frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ٢} = \frac{\text{س}}{\text{س} - ٢}$

، المجال = ح − {−١ ، ٢} ، $(\text{د} \times \text{ر})(٣) = \frac{٣}{١} = ٣$

[٤] $\left(\frac{\text{د}}{\text{ر}}\right)(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س} + ١} \div \frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ٢} = \frac{\text{س}}{\text{س} + ١} \times \frac{\text{س} - ٢}{\text{س} + ١} = \frac{\text{س}(\text{س} - ٢)}{(\text{س} + ١)^{٢}}$

، المجال = ح − {−١ ، ٢}

، $\left(\frac{\text{د}}{\text{ر}}\right)(-١)$ غير معرفة لأن −١ ∉ مجال $\frac{\text{د}}{\text{ر}}$ ، $\left(\frac{\text{د}}{\text{ر}}\right)(١) = \frac{١ \times -١}{٢^{٢}} = \frac{-١}{٤}$

مثال ٣

إذا كانت : $\text{د}_{١}(\text{س}) = \sqrt{\text{س} - ٢}$ ، $\text{د}_{٢}(\text{س}) = \sqrt{٥ - \text{س}}$ ، $\text{د}_{٣}(\text{س}) = \text{س} - ٣$

فأوجد قاعدة ومجال كل من الدوال الآتية :

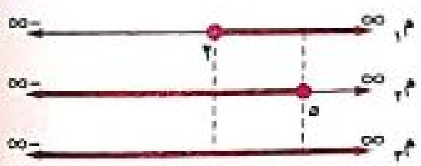
[١] $(\text{د}_{١} + \text{د}_{٢})$ [٢] $(\text{د}_{٢} - \text{د}_{٣})$ [٣] $(\text{د}_{١} \times \text{د}_{٢})$ [٤] $\left(\frac{\text{د}_{٢}}{\text{د}_{٣}}\right)$ [٥] $\left(\frac{\text{د}_{٣}}{\text{د}_{١}}\right)$

الحل

مجال $\text{د}_{١} = \text{م}_{١} = [٢ ، \infty[$

، مجال $\text{د}_{٢} = \text{م}_{٢} =]-\infty ، ٥]$

، مجال $\text{د}_{٣} = \text{م}_{٣} = $ ح



[١] $(\text{د}_{١} + \text{د}_{٢})(\text{س}) = \sqrt{\text{س} - ٢} + \sqrt{٥ - \text{س}}$ ، المجال = [٢ ، ٥]

[٢] $(\text{د}_{٢} - \text{د}_{٣})(\text{س}) = \sqrt{٥ - \text{س}} + ٣ - \text{س}$ ، المجال =]−∞ ، ٥]

[٣] $(\text{د}_{١} \times \text{د}_{٢})(\text{س}) = \sqrt{\text{س} - ٢} \times \sqrt{٥ - \text{س}}$ ، المجال = [٢ ، ٥]

[٤] $\left(\frac{\text{د}_{٢}}{\text{د}_{٣}}\right)(\text{س}) = \frac{\sqrt{٥ - \text{س}}}{\text{س} - ٣}$ ، المجال =]−∞ ، ٥] − {٣}

[٥] $\left(\frac{\text{د}_{٣}}{\text{د}_{١}}\right)(\text{س}) = \frac{\text{س} - ٣}{\sqrt{\text{س} - ٢}}$ ، المجال =]٢ ، ∞[

تركيب الدوال

إذا كانت : د ، ر دالتين وكان مدى الدالة ر تقاطع مجال الدالة د لا يساوى ∅

فإن تركيب الدالة د مع الدالة ر ينتج دالة جديدة يرمز لها بالرمز (د ٥ ر) وتقرأ

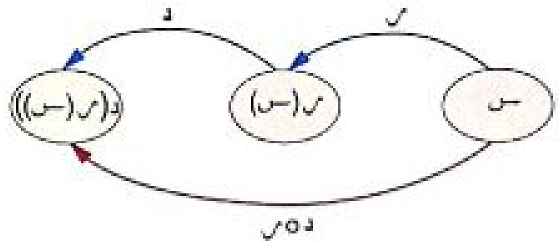
[د تركيب ر] أو [د بعد ر]

ويكون (د ٥ ر) (س) = د (ر (س)) وتطبق قاعدة الدالة ر أولاً ثم قاعدة الدالة د

حيث : مجال (د ٥ ر) يتكون من قيم س التى فى مجال الدالة ر والتى تجعل ر (س) فى مجال الدالة د

أى أن مجال (د ٥ ر) = {س : س ∈ مجال ر ، ر (س) ∈ مجال د}

والشكل التالى يساعدنا فى توضيح تعريف (د ٥ ر)



مثال توضيحى

إذا كانت : ر ، د دالتين معرفتين كمجموعة من الأزواج المرتبة كالتالى :

بيان ر = {(١ ، ٥) ، (٢ ، ١٠) ، (٣ ، ١٥)}

، بيان د = {(١٠ ، ٢٠) ، (١٥ ، ٣٠) ، (١٦ ، ٣٢)}

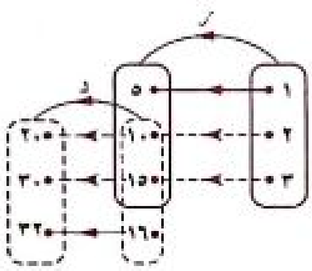
فإن : مجال ر = {١ ، ٢ ، ٣} ، مجال د = {١٠ ، ١٥ ، ١٦}

مجال (د ٥ ر) = {س : س ∈ مجال ر ، ر (س) ∈ مجال د}

= مجموعة المساقط الأولى فى بيان ر والتى مساقطها الثانية تظهر كمساقط أولى فى بيان د

∴ مجال (د ٥ ر) = {٢ ، ٣} ، مدى (د ٥ ر) = {٢٠ ، ٣٠}

، بيان (د ٥ ر) = {(٢ ، ٢٠) ، (٣ ، ٣٠)}



مثال ٤

إذا كانت : د (س) = $س^٢$ ، ر (س) = س + ١ فأوجد :

[١] (د ٥ ر) (١) [٢] (ر ٥ د) (١) [٣] (د ٥ د) (−١) [٤] (ر ٥ ر) (−١)

الحل

[١] ∵ (د ٥ ر) (س) = د (ر (س)) ∴ (د ٥ ر) (١) = د (ر (١))

، ∵ ر (١) = ١ + ١ = ٢ ∴ (د ٥ ر) (١) = د (٢) = $٢^٢$ = ٨

٢ ∵ (ر ∘ د) (س) = ر (د (س)) ، ∵ د (١) = ١^{٣} = ١

∴ (ر ∘ د) (١) = ر (د (١))

∴ (ر ∘ د) (١) = ر (١) = ١ + ١ = ٢

٣ ∵ (د ∘ د) (س) = د (د (س)) ، ∵ د (−١) = (−١)^{٣} = −١

∴ (د ∘ د) (−١) = د (د (−١))

∴ (د ∘ د) (−١) = د (−١) = −١

٤ ∵ (ر ∘ ر) (س) = ر (ر (س)) ، ∵ ر (−١) = −١ + ١ = ٠

∴ (ر ∘ ر) (−١) = ر (ر (−١))

∴ (ر ∘ ر) (−١) = ر (٠) = ٠ + ١ = ١

مثال ٥

إذا كانت : د (س) = ٢ س + ١ ، ر (س) = س^{٢} − ٣

فأوجد كلًا من تركيبات الدوال الآتية :

١ (د ∘ ر) (س) ٢ (ر ∘ د) (س) ٣ (د ∘ د) (س)

الحل

١ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) وبوضع ر (س) بدلًا من س فى الدالة د

∴ (د ∘ ر) (س) = ٢ ر (س) + ١ وبوضع ر (س) = س^{٢} − ٣

∴ (د ∘ ر) (س) = ٢ (س^{٢} − ٣) + ١ وبتبسيط المقدار الناتج

∴ (د ∘ ر) (س) = ٢ س^{٢} − ٦ + ١ = ٢ س^{٢} − ٥

٢ (ر ∘ د) (س) = ر (د (س)) وبوضع د (س) بدلًا من س فى الدالة ر

∴ (ر ∘ د) (س) = (د (س))^{٢} − ٣ وبوضع د (س) = ٢ س + ١.

∴ (ر ∘ د) (س) = (٢ س + ١)^{٢} − ٣ وبتبسيط المقدار الناتج

∴ (ر ∘ د) (س) = ٤ س^{٢} + ٤ س + ١ − ٣ = ٤ س^{٢} + ٤ س − ٢

٣ (د ∘ د) (س) = د (د (س))

∴ (د ∘ د) (س) = ٢ (٢ س + ١) + ١

∴ (د ∘ د) (س) = ٢ (د (س)) + ١

∴ (د ∘ د) (س) = ٤ س + ٢ + ١ = ٤ س + ٣

ملاحظة

فى المثال السابق لاحظ أن : (د ∘ ر) (س) ≠ (ر ∘ د) (س)

ومن ذلك يمكن استنتاج أن : د ∘ ر ≠ ر ∘ د

أى أن عملية تركيب دالتين ليست عملية إبدالية.

مثال ٦

إذا كانت د دالة خطية وكانت (د ∘ د) (س) = ٤ س + ٣ **أوجد :** د (س)

الحل

نفرض أن : د (س) = أ س + ب

، ∵ (د ∘ د) (س) = ٤ س + ٣ ∴ د (د (س)) = ٤ س + ٣

∴ د (أ س + ب) = ٤ س + ٣ ∴ أ (أ س + ب) + ب = ٤ س + ٣

∴ $أ^٢$ س + أ ب + ب = ٤ س + ٣ ∴ $أ^٢$ = ٤ ومنها أ = ± ٢

، أ ب + ب = ٣ ∴ ب = $\frac{٣}{أ + ١}$

، عند أ = ٢ ∴ ب = ١

، عند أ = −٢ ∴ ب = −٣

∴ د (س) = ٢ س + ١ أ، د (س) = −٢ س − ٣

مثال ٧

إذا كانت د (س) = ٢ س + ١ ، (د ∘ ر) (س) = $س^٢$ + س − ١ **أوجد :** ر (س)

الحل

∵ (د ∘ ر) (س) = $س^٢$ + س − ١ ∴ د (ر (س)) = $س^٢$ + س − ١

∴ ٢ ر (س) + ١ = $س^٢$ + س − ١ ∴ ٢ ر (س) = $س^٢$ + س − ٢

∴ ر (س) = $\frac{١}{٢}$ $س^٢$ + $\frac{١}{٢}$ س − ١

مثال ٨

إذا كانت د : ح ⟵ ح ، د (س) = ٥ س − ٢ ، ر (س) = $\begin{cases} س + ١ & ، س > ٣ \\ ٢ س & ، س \le ٣ \end{cases}$

أوجد : [١] (د ∘ ر) (٤) [٢] (ر ∘ د) (١)

الحل

[١] (د ∘ ر) (٤) = د (ر (٤)) (لاحظ أن : ر (٤) = ٤ + ١ = ٥)

= د (٥) = ٥ × ٥ − ٢ = ٢٣

[٢] (ر ∘ د) (١) = ر (د (١)) (لاحظ أن : د (١) = ٥ × ١ − ٢ = ٣)

= ر (٣) = ٢ × ٣ = ٦

لتعيين مجال الدالة (د ∘ ر) نتبع الخطوات التالية:

١ نوجد $م_١$ = مجال الدالة ر

٢ نوجد $م_٢$ = قيم س التي تجعل ر(س) في مجال د

٣ نوجد $م_١ \cap م_٢$ وهو مجال (د ∘ ر)

مثال ٥

أوجد مجال (د ∘ ر) إذا كان د(س) = $\frac{٣}{س - ٤}$ ، ر(س) = $\frac{٤}{س + ٢}$

الحل

لإيجاد مجال (د ∘ ر) نتبع الخطوات التالية:

- نوجد مجال ر ولتكن $م_١$

∵ ر(س) = $\frac{٤}{س + ٢}$ ∴ $م_١$ = مجال ر = ح − {−٢}

- نوجد قيم س التي تجعل ر(س) في مجال الدالة د ولتكن $م_٢$

∵ د(س) = $\frac{٣}{س - ٤}$ ∴ د(ر(س)) = $\frac{٣}{ر(س) - ٤}$

∵ ر(س) في مجال د إذا كان: ر(س) ≠ ٤

، عندما ر(س) = ٤ ∴ $\frac{٤}{س + ٢}$ = ٤

∴ س + ٢ = ١ ∴ س = −١

∴ $م_٢$ = قيم س التي تجعل ر(س) في مجال د = ح − {−١}

- نوجد مجال (د ∘ ر) = $م_١ \cap م_٢$ = (ح − {−٢}) ∩ (ح − {−١}) = ح − {−٢ ، −١}

ويمكن اختصار الخطوات السابقة في المخطط التالي:

د[ر(س)] = $\frac{٣}{\frac{٤}{س + ٢} - ٤}$

$\frac{٤}{س + ٢} - ٤ \neq ٠$ ، س + ٢ ≠ ٠

∴ $\frac{٤}{س + ٢} \neq ٤$ ، ∴ س ≠ −٢

∴ س + ٢ ≠ ١

∴ س ≠ −١

∴ مجال (د ∘ ر) = ح − {−٢ ، −١}

لاحظ أن

في حالة استخدام هذا المخطط لإيجاد المجال نكتب د[ر(س)] كما هي دون تبسيط

مثال ١٠

إذا كانت : د (س) = $\sqrt{س - ٢}$ ، ر (س) = $\sqrt{٦ - س}$

فأوجد مجال كل من الدالتين الآتيتين : ١ د ∘ ر ٢ ر ∘ د

الحـــل

١ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) = $\sqrt{ر (س) - ٢}$ = $\sqrt{\sqrt{٦ - س} - ٢}$

، ∵ ر (س) = $\sqrt{٦ - س}$ وبوضع ٦ − س ≥ ٠ ∴ س ≤ ٦

∴ $م_١$ = مجال ر =]− ∞ ، ٦]

وبوضع ر (س) − ٢ ≥ ٠ ∴ $\sqrt{٦ - س}$ − ٢ ≥ ٠

∴ $\sqrt{٦ - س}$ ≥ ٢ (بتربيع الطرفين)

∴ ٦ − س ≥ ٤ ∴ س ≤ ٢

∴ $م_٢$ = قيم س التى تجعل ر (س) فى مجال د =]− ∞ ، ٢]

∴ مجال (د ∘ ر) = $م_١$ ∩ $م_٢$ =]− ∞ ، ٦] ∩]− ∞ ، ٢] =]− ∞ ، ٢]

٢ (ر ∘ د) (س) = ر (د (س)) = $\sqrt{٦ - د (س)}$ = $\sqrt{٦ - \sqrt{س - ٢}}$

، ∵ د (س) = $\sqrt{س - ٢}$ وبوضع س − ٢ ≥ ٠

∴ س ≥ ٢ ∴ $م_١$ = مجال د = [٢ ، ∞[

وبوضع ٦ − $\sqrt{س - ٢}$ ≥ ٠ ∴ $\sqrt{س - ٢}$ ≤ ٦ (بتربيع الطرفين)

∴ س − ٢ ≤ ٣٦ ∴ س ≤ ٣٨

∴ $م_٢$ = قيم س التى تجعل د (س) فى مجال ر =]− ∞ ، ٣٨]

∴ مجال (ر ∘ د) = $م_١$ ∩ $م_٢$ = [٢ ، ∞[∩]− ∞ ، ٣٨] = [٢ ، ٣٨]

حل آخر لإيجاد مجال (ر ∘ د) :

∵ مجال د = [٢ ، ∞[، مجال ر =]− ∞ ، ٦]

، ∵ مجال (ر ∘ د) = {س : س ∈ مجال د ، د (س) ∈ مجال ر}

∵ س ∈ مجال د ∴ س ∈ [٢ ، ∞[

∵ د (س) ∈ مجال ر ∴ د (س) ∈]− ∞ ، ٦]

∴ √(س − ٢) ∈]−∞ ، ٦] ∴ √(س − ٢) ≤ ٦

∴ س − ٢ ≤ ٣٦ ∴ س ≤ ٣٨

∴ **س ∈]−∞ ، ٣٨]**

أى أن مجال (ر ∘ د) = [٢ ، ∞[∩]−∞ ، ٣٨] = [٢ ، ٣٨]

مثال ١١

إذا كانت : د (س) = √(س − ١) ، ر (س) = س^٢ − ٣

أوجد (د ∘ ر) (س) فى أبسط صورة موضحًا المجال ثم أوجد (د ∘ ر) (٢)

الحـــل

(د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) = √(ر (س) − ١) = √(س^٢ − ٣ − ١) = √(س^٢ − ٤)

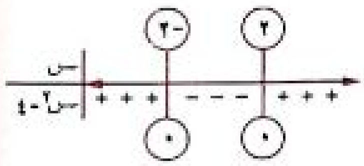
∵ مجال د = [١ ، ∞[، مجال ر = ح

، ∵ مجال (د ∘ ر) = {س : س ∈ مجال ر ، ر (س) ∈ مجال د}

∵ س ∈ مجال ر ∴ **س ∈ ح**

، ∵ ر (س) ∈ مجال د ∴ ر (س) ∈ [١ ، ∞[

∴ س^٢ − ٣ ∈ [١ ، ∞[∴ س^٢ − ٣ ≥ ١



∴ س^٢ − ٤ ≥ صفر

∴ (س − ٢) (س + ٢) ≥ صفر

∴ س ≥ ٢ ، س ≤ −٢ ∴ **س ∈ ح −]−٢ ، ٢[**

∴ مجال (د ∘ ر) = ح ∩ (ح −]−٢ ، ٢[) = ح −]−٢ ، ٢[

، (د ∘ ر) (٢) = √(٤ − ٤) = صفر

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{س - ١}{س^٢ - ١} + \frac{١}{س + ٢}$ هو ....

(أ) ح - {١ ، -١ ، -٢} (ب) ح - {١ ، -٢}
(جـ) ح - {١ ، -١ ، ٢} (د) {١ ، ٢}

(٢) مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{س - ٢} - \sqrt{٧ - س}$ هو ....

(أ) [٢ ، ٧] (ب)]٢ ، ٧[
(جـ) ح - [٢ ، ٧] (د) ح -]٢ ، ٧[

(٣) إذا كان : د (س) = $\sqrt[٣]{س - ١}$ ، ر (س) = $\sqrt{س - ١}$

فإن مجال (د - ر) هو ....

(أ)]-١ ، ∞[(ب) [١ ، ∞[(جـ) ح (د)]-∞ ، ١]

(٤) مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{س - ١} + \sqrt{س + ٢}$ هو ....

(أ) [-٢ ، ∞[(ب) [١ ، ∞[(جـ)]١ ، ∞[(د)]-٢ ، ∞[

(٥) مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{س + ٢} - \sqrt{٣ - س}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح - [-٢ ، ٣] (جـ) [-٢ ، ٣] (د)]-٢ ، ٣[

(٦) إذا كانت د دالة حيث بيان د = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦) ، (٤ ، ٨)}
، ر دالة حيث بيان ر = {(١ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ، (٥ ، ٧)} فإن : د + ر = ...

(أ) {(١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦) ، (٤ ، ٨) ، (١ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ، (٥ ، ٧)}

(ب) {(١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦) ، (٤ ، ٨) ، (٥ ، ٧)}

(جـ) {(١ ، ٥) ، (٣ ، ١١)}

(د) {(١ ، ٥) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ١١) ، (٤ ، ٨) ، (٥ ، ٧)}

(٧) إذا كانت : د ، ر : ح ⟵ ح حيث د (س) = ٣ س + ١
، وكان (د + ر) (س) = $س^٢$ + ٢ س - ١ فإن : ر (-١) = ...

(أ) -٢ (ب) -١ (جـ) صفر (د) ٢

⑧ إذا كانت د : ح⁺ ⟵ ح حيث د (س) = س² − ٧ ، ر : [−٣ ، ٢] ⟵ ح

حيث ر (س) = س² + ٢ فإن : (د − ر) (−٥) = ...

(أ) −٥ (ب) −١٠ (جـ) −٢٠ (د) غير معرفة.

⑨ مجال الدالة (د . ر) حيث د (س) = س² − ٤ ، ر (س) = س + ١ هو ....

(أ) ح − {٢ ، −٢ ، −١} (ب) {٢ ، −٢ ، −١}

(جـ) ح (د) ح − {٤ ، ١}

⑩ إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{س}$ ، ر (س) = $\sqrt{س}$ فإن مجال (د × ر) = ...

(أ) ح − {٠} (ب) ح (جـ) ح⁺ (د) [٠ ، ∞[

⑪ مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{س − ٤}$ $\sqrt{س − ٢}$ هو ....

(أ)]٤ ، ∞[(ب) [٢ ، ∞[(جـ) ح (د) [٤ ، ∞[

⑫ إذا كان د : ح ⟵ ح حيث د (س) = س² − س ، ر : ح ⟵ ح حيث ر (س) = ٣ س − ٢

فإن : (د × ر − ٦ ر) (٢) = ...

(أ) ٢٤ (ب) ٤٠ (جـ) ١٦ (د) −١٦

⑬ إذا كانت : د (س) = ٢ س + ١ ، ر (س) = − س − ٢

وكانت : هـ (س) = د (س) + ر (س) ، ك (س) = د (س) − ر (س)

فإن : هـ (٢) × ك (١) = ...

(أ) ٣ (ب) ١ (جـ) ٦ (د) صفر

⑭ إذا كانت د : ح⁺ ⟵ ح حيث د (س) = س − ٥ ، ر : [−١ ، ٥] ⟵ ح

حيث ر (س) = س − ٢ فإن : $\left(\frac{د}{ر}\right)$ (١) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٨

⑮ إذا كانت : د ، ر دالتين حقيقيتين حيث د (س) = $\frac{س − ٢}{س^{٢} − ٣ س + ٢}$ ، ر (س) = س − ٢

فإن : $\left(\frac{د}{ر}\right)$ (٣) = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) صفر (د) غير معرفة.

⑯ مجال الدالة د : د (س) = $\frac{س}{\sqrt[٣]{س}}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٠} (جـ) ح⁺ (د) ح⁺ ∪ {٠}

(١٧) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{\text{س} - ٥}{\sqrt{٢\text{س} - ٣}}$ هو ....

(أ) $ح - \{٥\}$ (ب) $]\frac{٣}{٢} ، \infty[$ (ج) $[\frac{٣}{٢} ، \infty[- \{٥\}$ (د) $ح - \{\frac{٣}{٢}\}$

(١٨) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{\sqrt{\text{س} - ٢}}{\text{س} - ٣}$ هو ....

(أ) ح (ب) $\{٣\}$

(ج) $[٢ ، \infty[$ (د) $[٢ ، \infty[- \{٣\}$

(١٩) إذا كانت د : $ح^{+} \longrightarrow ح$ حيث د (س) = س − ٥ ، ر : $[-١ ، ٥] \longrightarrow ح$

حيث ر (س) = س − ٢ فإن مجال $\left(\frac{د}{ر}\right)$ هو ....

(أ) $]٠ ، ٥]$ (ب) $]٠ ، ٥] - \{٢\}$

(ج) $[-١ ، \infty[$ (د) ح

(٢٠) إذا كانت $د_١$: $[-٢ ، ٣] \longrightarrow ح$ حيث $د_١$ (س) = س ، $د_٢$: $[٠ ، ٤[\longrightarrow ح$

، حيث $د_٢$ (س) = $\text{س}^٢$ فإن : مجال $\left(\frac{د_١}{د_٢}\right)$ = ...

(أ) $[-٢ ، ٤[$ (ب) $[-٢ ، ٤[- \{٠\}$ (ج) $]٠ ، ٣]$ (د) $[٠ ، ٣]$

(٢١) مجال الدالة د حيث د (س) = $\frac{\text{س} + ١}{\sqrt{\text{س} - ١}}$ هو ....

(أ) $ح - \{١\}$ (ب) $ح - \{-١\}$ (ج) $[-١ ، \infty[$ (د) ح

(٢٢) إذا كان : د (س) = $\sqrt[٣]{\text{س} - ٣}$ ، ر (س) = $\sqrt{٣ - \text{س}}$ فإن مجال $\left(\frac{د}{ر}\right)$ هو ....

(أ) $]٣ ، \infty[$ (ب) $[٣ ، \infty[$ (ج) $]-\infty ، ٣[$ (د) $]-\infty ، ٣]$

(٢٣) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{\sqrt{\text{س} - ٤}}{(\text{س} - ٣)(\text{س} - ٥)}$ هو ....

(أ) ح (ب) $ح - \{٣ ، ٥\}$

(ج) $[٤ ، \infty[$ (د) $[٤ ، \infty[- \{٥\}$

(٢٤) مجال الدالة د حيث د (س) = $\frac{\sqrt{\text{س} - ٣}}{\sqrt{٥ - \text{س}}}$ هو ....

(أ) $]٣ ، ٥]$ (ب) $ح - \{٣ ، ٥\}$ (ج) $[٣ ، ٥[$ (د) $\{-٣ ، -٥\}$

(٢٥) مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{\frac{٣ - \text{س}}{٥ - \text{س}}}$ هو ....

(أ) $]٣ ، ٥]$ (ب) $ح -]٣ ، ٥]$ (ج) $[٣ ، ٥]$ (د) $ح - [٣ ، ٥[$

(٢٦) إذا كانت : د (س) = $\sqrt[3]{س + ٥}$ ، ر (س) = $س^٢$ فإن : (د ٥ ر) (٢) = ...

(أ) ٧ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٩

(٢٧) إذا كان : د (١) = ٤ ، ر (٤) = ٧ فإن : (ر ٥ د) (١) = ...

(أ) ١ (ب) ٤ (جـ) ٧ (د) ١١

(٢٨) إذا كان : د (س) = $س^٢$ + ٦ ، ر (س) = ٣ س فإن : (د ٥ ر) (٣) = ...

(أ) ٧٥ (ب) ٨٧ (جـ) ٩٠ (د) ١٠٠

(٢٩) إذا كانت : د (س) = ٥ س + ٤ ، ر (س) = ٢ − س

فإن : (د ٥ ر) (−٢) + (ر ٥ د) (٥) = ...

(أ) ٢٤ (ب) −٢٧ (جـ) ٤٩ (د) −٣

(٣٠) إذا كانت : ر (س) = $\frac{س}{س - ١}$ فإن : (ر ٥ ر) (١) = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) −١ (د) غير معرفة.

(٣١) إذا كان : د (س) = $\sqrt[٣]{س}$ ، ر (س) = $س^٣$ فإن : (د ٥ ر) (س) = ...

(أ) س (ب) $س^٣$ (جـ) $\sqrt[٣]{س}$ (د) | س |

(٣٢) إذا كان : د (س) = س − ٣ ، ر (س) = $س^٢$ فإن : (د ٥ ر) (س) = ...

(أ) $(س - ٣)^٢$ (ب) $س^٢ - ٣$ (جـ) $س^٢ + ٣$ (د) $\sqrt{س - ٣}$

(٣٣) إذا كانت : د (س) = $\frac{٣ س + ٢}{٢ س - ٣}$ فإن : (د ٥ د) (س) = ...

(أ) س (ب) − س (جـ) د (س) (د) − د (س)

(٣٤) إذا كانت : د (س) = ٢ س + ٥ ، وكانت ر (س) = $س^٢$ فإن : د (ر (س)) = ...

(أ) $(٢ س + ٥)^٢$ (ب) $٢ س^٢ + ٥$ (جـ) $(٢ س^٢ + ٥)^٢$ (د) $٢ س^٢ + ١٠$

(٣٥) إذا كان : د (س) = ٣ س + ٢ ، ر (س) = ٢ س + ك

وكان (د ٥ ر) (س) = (ر ٥ د) (س) فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٣٦) إذا كانت : د (س) = س + ١ ، ر (س) = $س^٢$ − ١

فإن مجموعة حل المعادلة ر (د (س)) = صفر هي ....

(أ) {٠ ، ٢} (ب) {١ ، −١} (جـ) {٠ ، −٢} (د) {٢ ، −٢}

(٣٧) إذا كانت : د (س) = ٢ س ، ر (س) = $\frac{١}{٢ س}$ ، كان د (ر (س)) = ٦

فإن : س = ...

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) ٦ (جـ) ٤ (د) $\frac{١}{١٢}$

(٣٨) إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{س}$ ، ر (س) = س^{٢} − ١ فإن مجال (د ∘ ر) = ...

(أ) {٠ ، ١ ، −١} (ب) ح − {٠ ، ١ ، −١} (جـ) ح − {١ ، −١} (د) [−١ ، ١]

(٣٩) إذا كان : د (س) = $\sqrt{س}$ ، ر (س) = س^{٢} فإن : مجال (ر ∘ د) = ...

(أ)]−∞ ، ٠] (ب) [٠ ، ∞[(جـ) ح$^{+}$ (د) ح

(٤٠) إذا كان : د (س) = $\sqrt{س}$ ، ر (س) = س^{٢} فإن : مجال (د ∘ ر) = ...

(أ)]−∞ ، ٠] (ب) [٠ ، ∞[(جـ) ح$^{+}$ (د) ح

(٤١) مجال الدالة (د ∘ ر) حيث : د (س) = $\sqrt{س − ٢}$ ، ر (س) = $\sqrt{٦ − س}$ هو ....

(أ) ح (ب) [٢ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ٢] (د)]−∞ ، ٢[

(٤٢) إذا كانت العلاقة بين س ، د (س)

، ر (س) كما بالجدول المقابل

فإن : ر (د (٦)) = ...

(أ) ٣ (ب) ١

(جـ) −٤ (د) −٧

س	د (س)	س	ر (س)
−٣	٤	−٤	٣
−٢	٣	−١	١
٣	١	١	−٤
٦	−١	٤	−٧

(٤٣) إذا كانت العلاقة بين س ، د (س)

، ر (س) لبعض قيم س كما بالجدول المقابل.

فأى مما يأتى صحيح ؟

(I) د (٠) = ر (٤) **(II)** د (ر (٢)) = −٢

(III) ر (د (٢)) = −٢

س	د (س)	ر (س)
صفر	−٢	٢
٢	٤	صفر
٤	٨	−٢

(أ) I فقط (ب) I ، II فقط (جـ) I ، III فقط (د) جميع ما سبق.

(٤٤) إذا كان الجدول المقابل يمثل بيان كل من الدالتين د ، ر

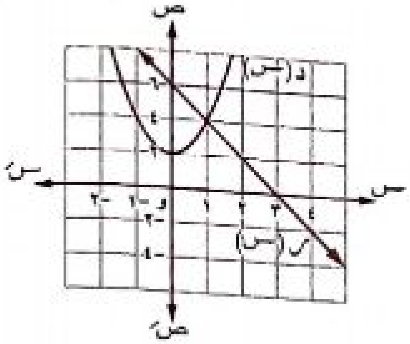
فإن (ر ∘ د) (١) = ...

(أ) ١ (ب) ٢

(جـ) ٣ (د) ٤

س	١	٢	٣	٤
د (س)	٣	١	٤	٢
ر (س)	٤	٣	٢	١

(٤٥) الشكل المقابل يوضح منحنى الدالتين د ، ر



فإن : (ر ∘ د) (١) = ...

(أ) ٥ (ب) −٢

(جـ) −٤ (د) ٦

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ إذا كانت د دالة حيث : د (س) = $س^٢$ − س − ١٢ ومجالها [−٤ ، ٨] ، ر دالة حيث

ر (س) = س − ٤ ومجالها [−٧ ، ٤] **فأوجد كلاً من الدوال الآتية مع تعيين مجال كل منها :**

(١) (د + ر) (س) (٢) (د − ر) (س) (٣) (د . ر) (س)

(٤) $\left(\frac{د}{ر}\right)$ (س) (٥) $\left(\frac{ر}{د}\right)$ (س)

---

٢ إذا كانت د ، ر دالتين حقيقيتين حيث : د (س) = $س^٢$ − ٤ ، ر (س) = $\sqrt{س − ١}$

أوجد : (١) مجال كل من الدوال الآتية : (د + ر) ، (د . ر) ، $\left(\frac{د}{ر}\right)$ ، $\left(\frac{ر}{د}\right)$

(٢) القيمة العددية – إن أمكن – لكل من :

(د + ر) (٥) ، (د . ر) (٢) ، $\left(\frac{د}{ر}\right)$ (٣) ، $\left(\frac{ر}{د}\right)$ (−٢)

---

٣ إذا كان : د (س) = $س^٢$ − ٤ س ، ر (س) = $\sqrt{س + ٢}$ ، ع (س) = $\sqrt{٤ − س}$

أولًا : أوجد قاعدة ومجال كل من الدوال الآتية :

(١) (د + ر) (٢) (ر − ع) (٣) (د . ع) (٤) $\left(\frac{ع}{د}\right)$

ثانيًا : احسب القيمة العددية - إن أمكن - لكل من :

(١) (ر − ع) (١) (٢) (د . ع) (٥) (٣) $\left(\frac{ع}{د}\right)$ (٣)

---

٤ **عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية :**

(١) د (س) = $\frac{١}{س} + \frac{١}{س + ٢}$

(٢) د (س) = $\frac{س − ١}{س^٢ − ١} + \frac{١}{س + ١}$

(٣) د (س) = $\frac{س}{\sqrt{١ − س}}$

(٤) د (س) = $\frac{٣ س}{\sqrt{٢ س − ١}}$

(٥) د (س) = $\sqrt[٣]{س − ٤} + \sqrt{س − ٢}$

(٦) د (س) = $\frac{\sqrt{س − ٤}}{س − ٦}$

(٧) د (س) = $\frac{\sqrt{س − ٣}}{س^٢ − ٤}$

(٨) د (س) = $\frac{\sqrt{س − ٣}}{\sqrt{س − ٥}}$

٥ إذا كانت د ، ر دالتين حقيقيتين حيث :

د (س) = { س − ٢ ، س ≥ ٢ ؛ − س + ٢ ، س < ٢ } ، ر (س) = س فأوجد كلاً من :

① (د · ر) (س) ② (د/ر) (س) ③ (ر/د) (س)

مع تعيين مجال كل دالة.

٦ عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية :

① د (س) = $\sqrt{\frac{س - ٣}{س - ٥}}$

② د (س) = $\frac{٥ س + ٢}{\sqrt{س - ٢} - ١}$

③ د (س) = $\frac{\sqrt{س + ٢}}{س^٢ - ٦ س - ٧}$

④ د (س) = $\frac{\frac{٣}{س - ١}}{\frac{١}{س - ٢} + ٤}$

٧ إذا كان : د (س) = ٣ س + ١ ، ر (س) = $س^٢$ − ٥ ، ع (س) = $س^٣$

أوجد : ① (د ∘ ر) (٢) ② (ر ∘ د) (−٣)

③ (ر ∘ ع) (١) ④ (ع∘د) (−٢)

«−٢ ، ٩٥ ، −٤ ، −١٢٥»

٨ إذا كان : د (س) = $\frac{١}{س}$ ، ر (س) = س + ٣

أوجد : ① (د ∘ ر) (س) ② (ر ∘ د) (س) وحدد مجال كل منهما.

٩ إذا كان : د (س) = $\frac{١}{س - ١}$ ، ر (س) = $س^٢$ فأوجد فى أبسط صورة موضحًا المجال :

① (د ∘ ر) (س) ② (ر ∘ د) (س)

١٠ إذا كان : د (س) = $س^٢$ + ٦ ، ر (س) = ٣ س

① أوجد : (د ∘ ر) (٣)

② حدد : قيم س التى تجعل (د ∘ ر) (س) = ٤٢

«٨٧ ، ±٢»

١١ إذا كان : د (س) = $س^٢$ − ٣ ، ر (س) = $\sqrt{س - ٢}$

أوجد (د ∘ ر) (س) فى أبسط صورة محددًا المجال ثم أوجد (د ∘ ر) (٣)

«−٢»

١٢ إذا كان : د (س) = $\sqrt{س + ١}$ ، ر (س) = $\frac{٢}{س - ٣}$ فأوجد مجال (د ∘ ر)

١٣ إذا كان : د (س) = $\sqrt{س - ٢}$ ، ر (س) = $\sqrt{٤ - س}$

فأوجد كلًا من الدالتين الآتيتين موضحًا مجالها :

(١) د ٥ ر (٢) ر ٥ د

١٤ إذا كان : د (س) = $\sqrt{س - ١}$ ، ر (س) = $\sqrt{س^٢ - ٤}$

فأوجد مجال كل من الدالتين الآتيتين :

(١) د ٥ ر (٢) ر ٥ د

١٥ إذا كان : ع (س) = $\sqrt{س^٢ - ٤}$ فأوجد الدالتين د ، ر بحيث يكون : ع (س) = (د ٥ ر) (س)

١٦ إذا كانت : د دالة خطية وكان (د ٥ د) (س) = ١٦ س + ١٥ **أوجد :** د (س)

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : د (س) = $\sqrt{س - ١}$ ، ر (س) = $\sqrt{١ - س}$ فإن مجال (د + ر) هو ....

(أ) [١ ، ∞[(ب)]-∞ ، ١]

(جـ) [-١ ، ∞[(د) {١}

(٢) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} -س + ٢ ، & س > ٠ \\ ٢ س ، & س \le ٠ \end{cases}$ ، ر (س) = $\begin{cases} ٢ س - ١ ، & س \ge ١ \\ س + ٢ ، & س < ١ \end{cases}$

فإن : (د + ر) (س) = ... حيث ٠ < س < ١

(أ) ٤ س + ٢ (ب) س + ١ (جـ) ٥ س - ١ (د) ٤

(٣) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} س^٢ + ١ ، & س < ٠ \\ ٣ س + ١ ، & س \ge ٠ \end{cases}$ ، ر (س) = $\begin{cases} ٤ س - ٢ ، & س < ٢ \\ س^٢ + ٢ ، & س \ge ٢ \end{cases}$

فإن : (ر ٥ د) (-١) = ...

(أ) ٣٧ (ب) -١٧ (جـ) ١٠ (د) ٦

(٤) إذا كانت : د (س) = $س^٢$ ، ر (س) = ٢ س + ٢

فإن مجموعة حل المعادلة د (ر (س)) = د (س) هي ....

(أ) {١ ، ٣} (ب) {-٣ ، ١} (جـ) {-١ ، -٣} (د) {-١ ، ٣}

⑤ إذا كانت : د (س) = ٢ س + ١ وكان : (د ∘ م) (س) = ٣ س + ٢

فإن : م (س) = ...

(أ) س + ١ (ب) ٥ س + ٣ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ س + $\frac{١}{٢}$ (د) ٢ س + ٣

⑥ إذا كانت د : ح ← ح وكان : د (س) = ٢ س − ٣ ، (م ∘ د) (س) = س + ٢

فإن : م (س) = ...

(أ) ٢ س^{٢} + س − ٦ (ب) $\frac{\text{س} + ٢}{٢\,\text{س} - ٣}$ (جـ) $\frac{\text{س} + ٣}{٢}$ (د) $\frac{\text{س} + ٧}{٢}$

⑦ إذا كانت : د (س) = س + ٢ ، م (س) = $\frac{\text{س} - \text{ك}}{٢\,\text{س} - ١}$

وكان : (م ∘ د) (٠) = (د ∘ م) (١) فإن : ك = ...

(أ) ٧ (ب) ٥ (جـ) ١ (د) $\frac{٧}{٢}$

⑧ الشكل المقابل يمثل

منحنى ص = د (س)

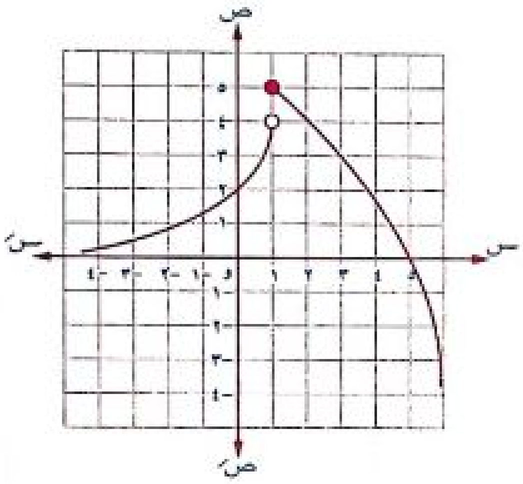
فإن : (د ∘ د ∘ د) (١) = ...

(أ) −٥

(ب) −١

(جـ) ١

(د) ٢



⑨ إذا كانت د : ط ← ط حيث د (س) = ٢ س

، ت : ط ← ط حيث ت (س) = $\begin{cases} \frac{\text{س}}{٢} & \text{، س زوجى} \\ \frac{\text{س} + ١}{٢} & \text{، س فردى} \end{cases}$

فإن : (د ∘ ت) (٣) − (د ∘ ت) (٨) = ...

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) −٤ (د) −٥

---

٢ إذا كانت د : ح − {٠} ← ح وكان د (س) = $\frac{١}{\text{س}}$ أوجد :

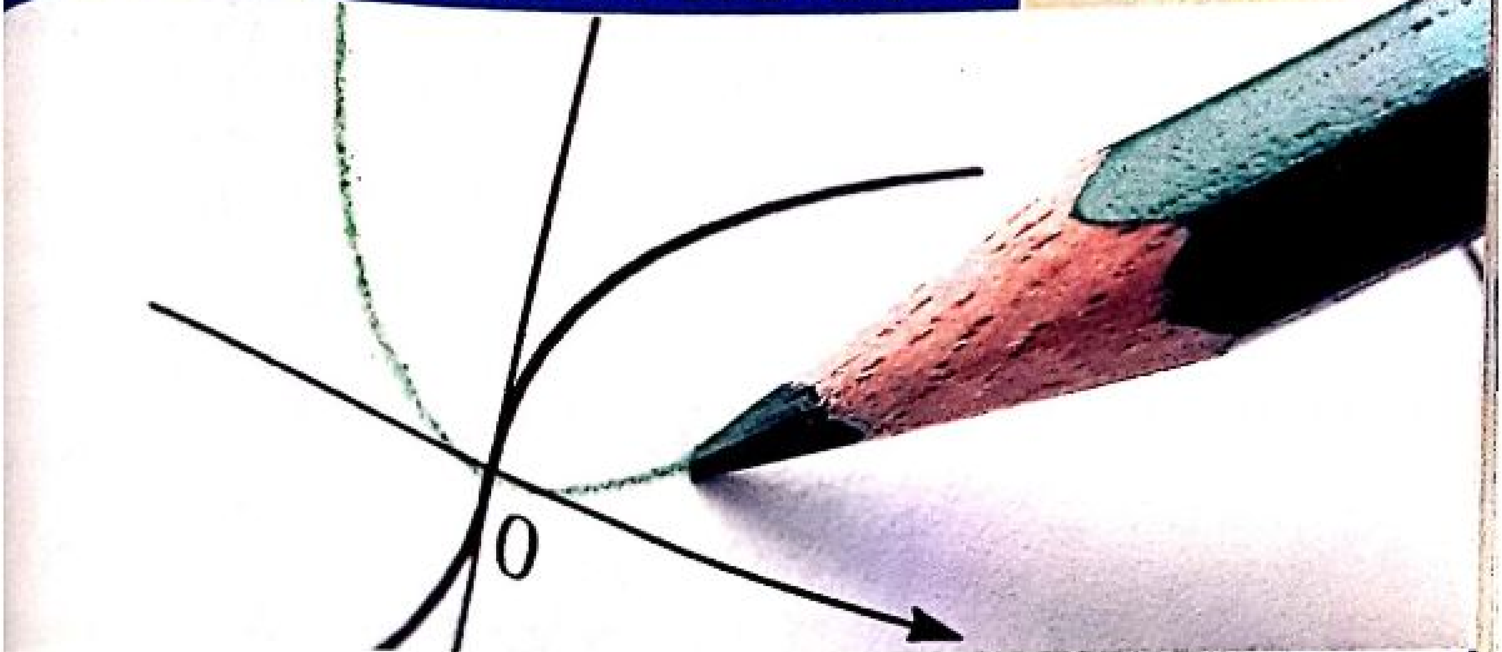
① (د ∘ د) (س)

② (د ∘ د ∘ د) (س)

③ (د ∘ د ∘ د ∘ ..... إلى ن من المرات) (س)

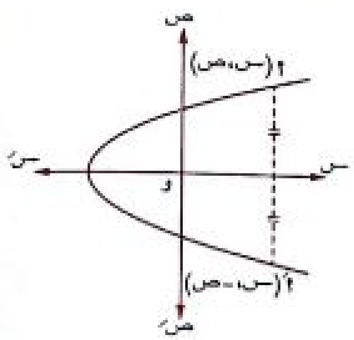
الدرس 3

بعض خواص الدوال
(الدوال الزوجية والفردية - الدوال الأحادية)



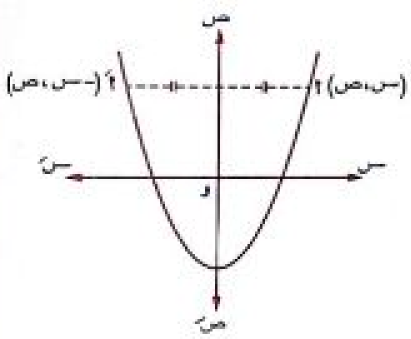
تمهيد

١ التماثل حول محور السينات



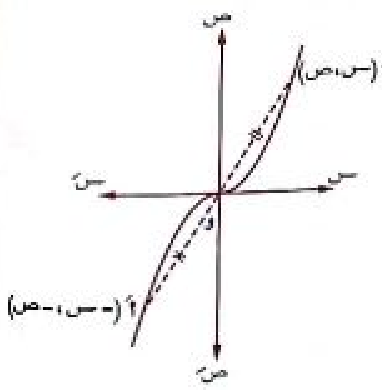
يكون الشكل البيانى متماثلًا حول محور السينات إذا كان لكل نقطة أ (س ، ص) واقعة على الشكل البيانى توجد نقطة أخرى أَ (س ، − ص) تقع على الشكل البيانى حيث أَ صورة أ بالانعكاس فى محور السينات.

٢ التماثل حول محور الصادات



يكون الشكل البيانى متماثلًا حول محور الصادات إذا كان لكل نقطة أ (س ، ص) واقعة على الشكل البيانى توجد نقطة أخرى أَ (− س ، ص) تقع على الشكل البيانى حيث أَ صورة أ بالانعكاس فى محور الصادات.

٣ التماثل حول نقطة الأصل «و»



يكون الشكل البيانى متماثلًا حول نقطة الأصل (و) إذا كان لكل نقطة أ (س ، ص) واقعة على الشكل البيانى توجد نقطة أخرى أَ (− س ، − ص) تقع على الشكل البيانى حيث أَ صورة أ بالانعكاس فى نقطة الأصل (و)

الدالة الزوجية والدالة الفردية

• **الدالة الزوجية :**

يقال إن الدالة د زوجية إذا كانت : د (− س) = د (س) لكل س ، − س في مجال الدالة د ويكون الشكل البيانى للدالة الزوجية متماثلًا حول محور الصادات.

• **الدالة الفردية :**

يقال إن الدالة د فردية إذا كانت : د (− س) = − د (س) لكل س ، − س في مجال الدالة د ويكون الشكل البيانى للدالة الفردية متماثلًا حول نقطة الأصل.

ملاحظـــات

1. إذا كانت : د (− س) ≠ د (س) ، د (− س) ≠ − د (س)
   فإن الدالة د ليست زوجية وليست فردية.
2. عند بحث نوع الدالة د من حيث كونها زوجية أو فردية يجب تحقق شرط انتماء كل من العنصرين س ، − س إلى مجال الدالة وإذا لم يتحقق الشرط كانت الدالة ليست زوجية وليست فردية دون الحاجة لإيجاد د (− س)
3. إذا كانت الدالة مجالها ح − {أ} ، أ ≠ صفر فإن الدالة ليست زوجية وليست فردية بدون بحثها.
4. إذا كانت الدالة زوجية ومنحنى الدالة يمر بالنقطة (أ ، ب) فإن منحنى الدالة أيضًا يمر بالنقطة (− أ ، ب)
5. إذا كانت الدالة فردية ومنحنى الدالة يمر بالنقطة (أ ، ب) فإن منحنى الدالة أيضًا يمر بالنقطة (− أ ، − ب)
6. الدالة الصفرية د : د (س) = ٠ هى زوجية وفردية فى نفس الوقت.

مثال ١

ابحث نوع كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

١ د (س) = $س^{٢}$	٢ د (س) = ٢ $س^{٣}$
٣ د (س) = $\sqrt[٣]{س - ١}$	٤ د (س) = جتا س

٥ د (س) = $س^{٢}$ − ٥ ، س ∈ [−٢ ، ٢[

الحـــل

١ ∵ د كثيرة حدود ∴ مجال د = ح

∴ لكل س ، − س ∈ ح يكون : د (− س) = $(− س)^{٢}$ = $س^{٢}$ = د (س) ∴ د دالة زوجية.

٢ ∵ د كثيرة حدود ∴ مجال د = ح

∴ لكل س ، − س ∈ ح يكون : د (− س) = ٢ $(− س)^{٣}$ = ٢ (− $س^{٣}$) = −٢ $س^{٣}$ = − د (س)

∴ د دالة فردية.

٣ ∵ مجال د هو مجموعة قيم س التي تجعل س − ١ ≥ ٠ أي : س ≥ ١

∴ مجال د = [١ ، ∞[

∴ لكل س ∈ [١ ، ∞[لا يوجد − س ∈ [١ ، ∞[

∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

لاحظ أن

٢ ∈ [١ ، ∞[

ولكن −٢ ∉ [١ ، ∞[

٤ مجال الدالة د : د (س) = جتا س هو ح

∴ لكل س ، − س ∈ ح يكون : د (− س) = جتا (− س) = جتا س = د (س)

∴ د دالة زوجية.

تذكران

جا (− س) = − جا س

جتا (− س) = جتا س

ظا (− س) = − ظا س

٥ ∵ −٢ ∈ مجال الدالة ، ٢ ∉ مجال الدالة ∴ د ليست زوجية وليست فردية.

ملاحظتان

١ تُسمى الدالة د : ح ⟵ ح ، د (س) = أ س^ن حيث أ ≠ ٠ ، ن ∈ ص+ دالة القوى وتكون الدالة د زوجية إذا كان ن عددًا زوجيًا. ، فردية إذا كان ن عددًا فرديًا.

٢ د (س) = جتا س ، د (س) = قا س دوال زوجية

بينما د (س) = جا س ، د (س) = قتا س ، د (س) = ظا س ، د (س) = ظتا س دوالًا فردية.

مثال ٢

إذا كانت د دالة زوجية حيث : د (س) = أ س^{٢} + ب س + ٥ وكان منحنى الدالة يمر بالنقطة (١ ، ٦)

فأوجد : قيمة كل من أ ، ب

الحـل

∵ الدالة زوجية ومنحناها يمر بالنقطة (١ ، ٦) ∴ المنحنى يمر بالنقطة (−١ ، ٦)

عند النقطة (١ ، ٦) ∴ ٦ = أ + ب + ٥ (١)

، عند النقطة (−١ ، ٦) ∴ ٦ = أ − ب + ٥ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ ١٢ = ٢ أ + ١٠ ∴ ٢ أ = ٢ ∴ أ = ١

، بالتعويض في (١) : ∴ ٦ = ١ + ب + ٥ ∴ ب = صفر

خواص هامة

إذا كان كل من د$_{١}$ ، د$_{٢}$ دالة زوجية وكل من ر$_{١}$ ، ر$_{٢}$ دالة فردية فإن :

١ د$_{١}$ ± د$_{٢}$ دالة زوجية.

٢ ر$_{١}$ ± ر$_{٢}$ دالة فردية.

٣ د$_{١}$ ± ر$_{١}$ دالة ليست زوجية وليست فردية.

٤ كل من (د$_{١}$ × د$_{٢}$) ، $\left(\frac{د_{١}}{د_{٢}}\right)$ دالة زوجية.

٥ كل من (ر$_{١}$ × ر$_{٢}$) ، $\left(\frac{ر_{١}}{ر_{٢}}\right)$ دالة زوجية.

٦ كل من (د$_{١}$ × ر$_{١}$) ، $\left(\frac{د_{١}}{ر_{١}}\right)$ دالة فردية.

مثال ٣

ابحث نوع كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

[١] د (س) = س^{٢} + جتا س [٢] د (س) = س^{٣} + جا س [٣] د (س) = ٣ س^{٤} ظا س

الحل

[١] ∵ د (− س) = (− س)^{٢} + جتا (− س) = س^{٢} + جتا س = د (س)

∴ د دالة زوجية.

حل آخر : بفرض أن : د (س) = د$_{١}$ (س) + د$_{٢}$ (س)

حيث د$_{١}$ (س) = س^{٢} ، د$_{٢}$ (س) = جتا س دالتان زوجيتان.

∴ د$_{١}$ + د$_{٢}$ دالة زوجية.   ∴ د دالة زوجية.

[٢] ∵ د (− س) = (− س)^{٣} + جا (− س) = − س^{٣} − جا س

= − (س^{٣} + جا س) = − د (س)

∴ د دالة فردية.

لاحظ أن : الدالة الناتجة من جمع دالتين فرديتين هى دالة فردية.

[٣] ∵ د (− س) = ٣ (− س)^{٤} ظا (− س) = ٣ س^{٤} (− ظا س)

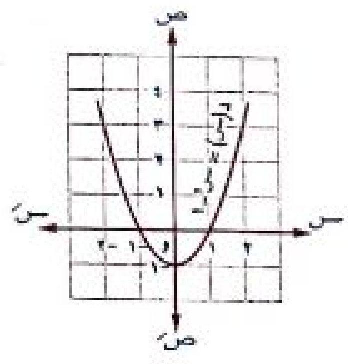
= −٣ س^{٤} ظا س = − د (س)

∴ د دالة فردية.

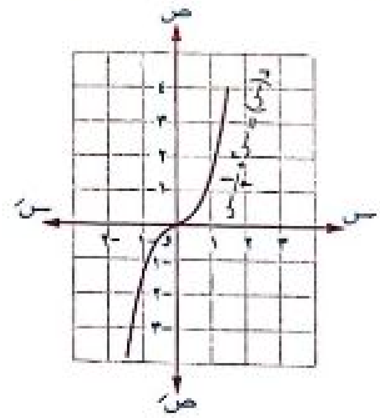
لاحظ أن : الدالة الناتجة من ضرب دالتين إحداهما زوجية والأخرى فردية هى دالة فردية.

مثال ٤

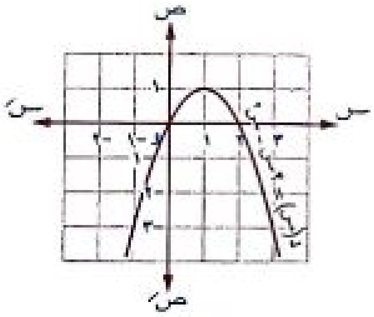
كل من الأشكال الآتية يوضح الشكل البيانى للدالة د ، حدد من الرسم ما إذا كانت الدالة د زوجية أم فردية أم غير ذلك وحقق إجابتك جبريًا :



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

الحــل

شكل (١) : د (س) = س^{٢} − ١

∵ مجال الدالة د = ح والمنحنى متماثل حول محور الصادات ∴ الدالة د دالة زوجية.

التحقق الجبرى : ∵ لكل س ، − س ∈ ح

د (− س) = (− س)^{٢} − ١ = س^{٢} − ١ = د (س) ∴ الدالة د دالة زوجية.

شكل (٢) : د (س) = س^{٣} + $\frac{١}{٢}$ س

∵ مجال الدالة د = ح والمنحنى متماثل حول نقطة الأصل

∴ الدالة د دالة فردية.

التحقق الجبرى : ∵ لكل س ، − س ∈ ح

د (− س) = (− س)^{٣} + $\frac{١}{٢}$ (− س) = − س^{٣} − $\frac{١}{٢}$ س = − (س^{٣} + $\frac{١}{٢}$ س) = − د (س)

∴ الدالة د دالة فردية.

شكل (٣) : د (س) = ٢ س − س^{٢}

∵ مجال الدالة د = ح والمنحنى ليس متماثلًا حول محور الصادات وليس متماثلًا حول نقطة الأصل.

∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

التحقق الجبرى : لكل س ، − س ∈ ح

د (− س) = ٢ (− س) − (− س)^{٢} = −٢ س − س^{٢} = − (٢ س + س^{٢})

∴ د (− س) ≠ د (س) ، د (− س) ≠ − د (س)

∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

مثال ٥

ابحث نوع كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

[١] د (س) = ٢ س^{٤} − ٥ س^{٢} + ١

[٢] د (س) = س^{٢} + ٢ س − ٥

[٣] د (س) = $\frac{\text{س − جا ٢ س}}{\text{١ + س}^{٢}}$

[٤] د (س) = $\frac{\text{س − ظا س}}{\text{س}^{٢}\text{ + س}}$

الحــل

[١] ∵ د (− س) = ٢ (− س)^{٤} − ٥ (− س)^{٢} + ١ = ٢ س^{٤} − ٥ س^{٢} + ١ = د (س)

∴ الدالة د زوجية.

[٢] $\because \text{د}(-\text{س}) = (-\text{س})^{٣} + ٢(-\text{س}) - ٥ = -\text{س}^{٣} - ٢\text{س} - ٥ = -(\text{س}^{٣} + ٢\text{س} + ٥)$

$\therefore \text{د}(-\text{س}) \neq \text{د}(\text{س})$ ، $\text{د}(-\text{س}) \neq -\text{د}(\text{س})$

$\therefore$ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

[٣] $\because \text{د}(-\text{س}) = \dfrac{(-\text{س}) - \text{جا}\,٣(-\text{س})}{١ + (-\text{س})^{٢}} = \dfrac{(-\text{س}) - (-\text{جا}\,٣\text{س})}{١ + \text{س}^{٢}} = \dfrac{-(\text{س} - \text{جا}\,٣\text{س})}{١ + \text{س}^{٢}} = -\text{د}(\text{س})$

$\therefore$ الدالة د فردية.

[٤] $\because \text{د}(-\text{س}) = \dfrac{(-\text{س}) - \text{ظا}(-\text{س})}{(-\text{س})^{٣} + (-\text{س})} = \dfrac{-\text{س} - (-\text{ظا}\,\text{س})}{-\text{س}^{٣} - \text{س}} = \dfrac{-\text{س} + \text{ظا}\,\text{س}}{-\text{س}^{٣} - \text{س}}$

$= \dfrac{-(\text{س} - \text{ظا}\,\text{س})}{-(\text{س}^{٣} + \text{س})} = \dfrac{\text{س} - \text{ظا}\,\text{س}}{\text{س}^{٣} + \text{س}} = \text{د}(\text{س})$ $\therefore$ الدالة د زوجية.

مثال ٦

ابحث نوع كل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

[١] $\text{د}(\text{س}) = \left(\text{س} - \dfrac{١}{\text{س}}\right)^{٣} + \left(\text{س} + \dfrac{١}{\text{س}}\right)^{٣}$

[٢] $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} -\dfrac{١}{\text{س}} & ،\ \text{س} < ٠ \\ \dfrac{١}{\text{س}} & ،\ \text{س} > ٠ \end{cases}$

الحل

[١] $\because \text{د}(-\text{س}) = \left(-\text{س} + \dfrac{١}{\text{س}}\right)^{٣} + \left(-\text{س} - \dfrac{١}{\text{س}}\right)^{٣}$

$= \left[-\left(\text{س} - \dfrac{١}{\text{س}}\right)\right]^{٣} + \left[-\left(\text{س} + \dfrac{١}{\text{س}}\right)\right]^{٣} = -\left(\text{س} - \dfrac{١}{\text{س}}\right)^{٣} - \left(\text{س} + \dfrac{١}{\text{س}}\right)^{٣}$

$= -\left[\left(\text{س} - \dfrac{١}{\text{س}}\right)^{٣} + \left(\text{س} + \dfrac{١}{\text{س}}\right)^{٣}\right] = -\text{د}(\text{س})$ $\therefore$ الدالة د فردية.

[٢] $\because \text{د}(-\text{س}) = \begin{cases} -\dfrac{١}{(-\text{س})} & ،\ (-\text{س}) < ٠ \\ \dfrac{١}{(-\text{س})} & ،\ (-\text{س}) > ٠ \end{cases}$

$= \begin{cases} \dfrac{١}{\text{س}} & ،\ \text{س} > ٠ \\ -\dfrac{١}{\text{س}} & ،\ \text{س} < ٠ \end{cases}$ «وبتبديل كتابة القاعدتين».

$= \begin{cases} -\dfrac{١}{\text{س}} & ،\ \text{س} < ٠ \\ \dfrac{١}{\text{س}} & ،\ \text{س} > ٠ \end{cases} = \text{د}(\text{س})$ $\therefore$ الدالة د زوجية.

الدالة الأحادية (Injective function)

تعريف

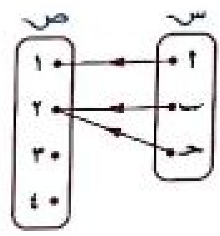
الدالة د : س ⟵ ص تسمى دالة أحادية إذا كان :

لكل أ ، ب ∈ س ، د (أ) = د (ب) فإن : أ = ب

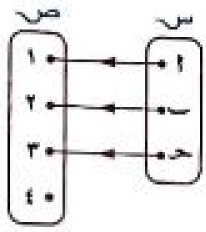
أو : لكل أ ، ب ∈ س ، أ ≠ ب فإن : د (أ) ≠ د (ب)

وهذا يعنى أنه لا يوجد عنصران فى مجال الدالة الأحادية لهما نفس الصورة.

فمثلا :



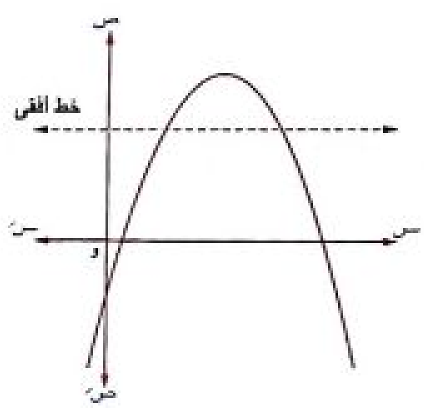
دالة ليست أحادية
من س ⟵ ص



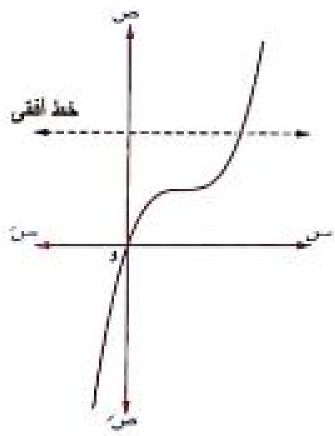
دالة أحادية
من س ⟵ ص

اختبار الخط الأفقى

إذا وجد خط أفقى (يوازى محور السينات) يقطع منحنى الدالة فى أكثر من نقطة فإن المنحنى يمثل دالة ليست أحادية.



الخط الأفقى يقطع المنحنى فى نقطتين لذلك فإن الدالة ليست أحادية



أى خط أفقى يقطع المنحنى فى نقطة واحدة على الأكثر لذلك فإن الدالة أحادية

مثال ٧

أثبت أن كلًا من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين دالة أحادية :

[١] د (س) = س^{٣} + ٢

[٢] د (س) = $\frac{٢ س - ٣}{٣ س + ٢}$

الحـــل

١ بفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة د

∴ د (أ) = $أ^2$ + ٢ ، د (ب) = $ب^2$ + ٢ وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ $أ^2$ + ٢ = $ب^2$ + ٢ ∴ $أ^2 = ب^2$

∴ أ = ب ∴ الدالة د دالة أحادية.

٢ بفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة د

∴ د (أ) = $\frac{٢أ - ٣}{٣أ + ٢}$ ، د (ب) = $\frac{٢ب - ٣}{٣ب + ٢}$ وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ $\frac{٢أ - ٣}{٣أ + ٢} = \frac{٢ب - ٣}{٣ب + ٢}$ ∴ (٢أ - ٣) (٣ب + ٢) = (٣أ + ٢) (٢ب - ٣)

∴ ٦أب + ٤أ - ٩ب - ٦ = ٦أب - ٩أ + ٤ب - ٦

∴ ٤أ + ٩أ = ٤ب + ٩ب ∴ ١٣أ = ١٣ب

∴ أ = ب ∴ الدالة د دالة أحادية.

مثال ٨

أثبت أن كلًا من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين ليست أحادية :

١ د (س) = ٣ - $س^2$ ٢ د (س) = $س^2$ + س

الحـــل

١ بفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة د

∴ د (أ) = ٣ - $أ^2$ ، د (ب) = ٣ - $ب^2$ وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ ٣ - $أ^2$ = ٣ - $ب^2$ ∴ $أ^2 = ب^2$

∴ أ = ± ب ∴ أ لها قيمتان هما ب ، - ب

∴ الدالة د ليست أحادية.

٢ بفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة د ∴ د (أ) = $أ^2$ + أ ، د (ب) = $ب^2$ + ب

وبوضع د (أ) = د (ب) ∴ $أ^2$ + أ = $ب^2$ + ب

∴ $أ^2 - ب^2$ + أ - ب = ٠ ∴ (أ - ب) (أ + ب) + (أ - ب) = ٠

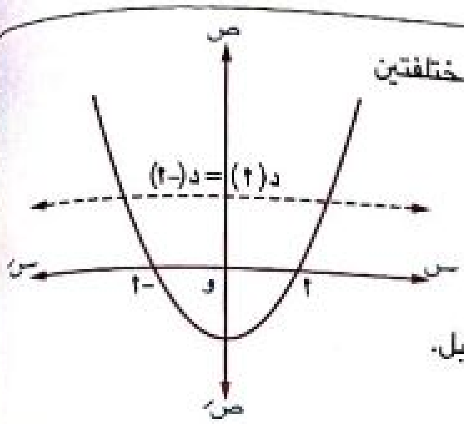
∴ (أ - ب) (أ + ب + ١) = ٠

∴ إما أ - ب = ٠ ومنها أ = ب أو أ + ب + ١ = ٠ ومنها أ = - ب - ١

∴ أ لها قيمتان هما ب ، - ب - ١

∴ الدالة د ليست أحادية.

ملاحظتان



- الدوال الزوجية بصفة عامة ليست دوال أحادية لأنه لكل قيمتين مختلفتين أ ، -أ ∈ مجال الدالة الزوجية يكون د (-أ) = د (أ)

أى أن : القيمتين أ ، -أ للمتغير س تناظرهما قيمة وحيدة للمتغير ص ولذلك فإن الدالة الزوجية ليست دالة أحادية كما يتضح ذلك باستخدام اختبار الخط الأفقى كما فى الشكل المقابل.

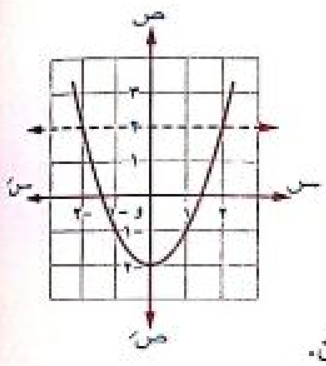
- الدالة الفردية قد تكون أحادية أو غير أحادية.

مثال ٩

مثل بيانيًا منحنى دالة زوجية يمر بالنقط : (٠ ، -٢) ، (-١ ، -١) ، (-٢ ، ٢)

ومن الرسم : بيِّن أن الدالة ليست أحادية.

الحـــل



∵ الدالة زوجية ∴ د (س) = د (-س)

∴ د (١) = د (-١) = -١ ، د (٢) = د (-٢) = ٢

أى أن : منحنى الدالة يمر أيضًا بالنقطتين :

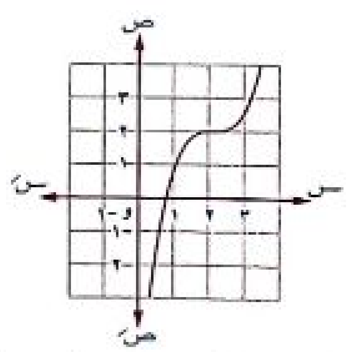
(١ ، -١) ، (٢ ، ٢)

من الرسم : الدالة ليست أحادية لأنه يوجد خط أفقى يقطع منحنى الدالة فى نقطتين.

ملاحظـــة

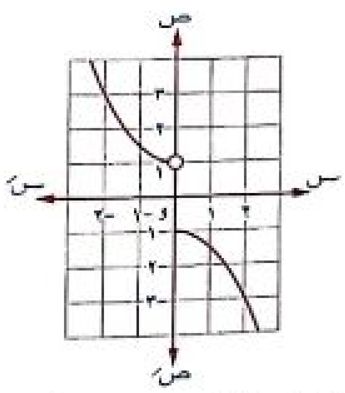
إذا كانت الدالة د فى تزايد مستمر أو فى تناقص مستمر لجميع القيم التى تنتمى إلى مجال الدالة فإن الدالة د تكون أحادية.

فمثلًا : فى كل من الشكلين الآتيين :



الدالة د فى تزايد مستمر على مجالها

لذلك الدالة د دالة أحادية



الدالة د فى تناقص مستمر على مجالها

لذلك الدالة د دالة أحادية

على بعض خواص الدوال
(الدوال الزوجية و الفردية - الدوال الأحادية)

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الدالة الزوجية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) د (س) = س^{٣} (ب) د (س) = جا س

(جـ) د (س) = س جتا س (د) د (س) = س جا س

(٢) الدالة الفردية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) د (س) = س^{٢} جا س (ب) د (س) = ظا^{٢} س

(جـ) د (س) = جتا س (د) د (س) = ١

(٣) أى قاعدة مما يأتى تكون قاعدة لدالة فردية ؟

(١) د (س) = $\frac{١}{س}$ + س + $\frac{١}{س^{٢}}$ (٢) د (س) = س^{٢} ظا س

(٣) د (س) = س جا س

(أ) (١) ، (٢) فقط (ب) (١) فقط

(جـ) (٢) ، (٣) فقط (د) جميع ما سبق.

(٤) نوع الدالة د : د (س) = $\frac{جا س}{س}$ هى ....

(أ) زوجية. (ب) فردية.

(جـ) لا زوجية ولا فردية. (د) أحادية.

(٥) الدالة د : د (س) = س جتا س ....

(أ) زوجية. (ب) فردية.

(جـ) ليست زوجية ولا فردية. (د) أحادية.

(٦) كل مما يأتى قواعد دوال زوجية ماعدا ....

(أ) د (س) = جا س (ب) د (س) = جتا س

(جـ) د (س) = س^{٢} - ١ (د) د (س) = ١

(٧) القاعدة التى لا تمثل دالة زوجية فيما يلى هى ....

(أ) $ص = \frac{١}{س^٢}$ (ب) ص = قا س

(جـ) $ص = س^٢ + جا س$ (د) $ص = ٣ س^٤ - ٢ س^٢ + ٢٧$

(٨) إذا كانت : $د(س) = \frac{١}{جا س}$ فإن : ....

(أ) $د(س) = \frac{١}{د(س)}$ (ب) $د(س) = - د(-س)$

(جـ) $د(س) = د(-س)$ (د) $د(-س) = د\left(\frac{١}{س}\right)$

(٩) إذا كانت د دالة فردية ، د (١) = ٢ فأى من النقط الآتية تقع على منحنى د ؟

(أ) (−١ ، ٢) (ب) (−١ ، −٢) (جـ) (١ ، −٢) (د) (−١ ، ٠)

(١٠) إذا كانت د دالة فردية ، أ ∈ مجال د فإن : د (أ) + د (− أ) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ د (أ) (جـ) ٢ أ (د) د (أ)

(١١) اذا كانت : د (س) دالة فردية فإن : د (أ) − د (− أ) = ...

(أ) صفر (ب) د (أ) (جـ) ٢ د (أ) (د) د (٢ أ)

(١٢) اذا كانت : د (س) دالة زوجية فإن : د (أ) − د (− أ) = ...

(أ) صفر (ب) د (أ) (جـ) ٢ د (أ) (د) د (٢ أ)

(١٣) إذا كانت د دالة زوجية ، ٢ ∈ مجال د فإن : د (٢) + د (−٢) = ...

(أ) صفر (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) ٢ د (٢)

(١٤) الدالة د : د (س) = (س + جا س) (..............) تكون زوجية.

(أ) $س^٣ + ظا س$ (ب) ١ + جا س

(جـ) $٤ - س^٢$ (د) س − جتا س

(١٥) إذا كانت د دالة زوجية وكان منحنى الدالة يمر بالنقطة (−٣ ، ٢ م + ١) وكانت د (٣) = ٥

فإن : م = ...

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٢

(١٦) إذا كانت الدالة د دالة زوجية فى الفترة [أ ، ب] فإن : ب = ...

(أ) أ (ب) − أ (جـ) ٢ أ (د) $أ^٢$

⑰ إذا كانت الدالة د فردية في [أ ، ب] فإن : ب = ...

(أ) أ (ب) − أ (ج) ١ أ (د) أ^٢

⑱ إذا كانت : د دالة زوجية وكان د (٥) = ١ ، د (−٥) = ٢ − ك فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) ٥ (ج) ٢ (د) ١

⑲ إذا كانت د دالة حيث د :]−٥ ، ٥[⟵ ح ، د (س) = س^٣ فإن الدالة د (س) تكون ....

(أ) زوجية. (ب) فردية.

(ج) أحادية. (د) ليست زوجية وليست فردية.

⑳ إذا كانت : د دالة زوجية مجالها]−٥ ، ٥[فإن مجموعة حل المعادلة د (س) = د (س − ١)

هي ....

(أ) {٢} (ب) {١} (ج) {٠} (د) {−١}

㉑ إذا كانت : د (س) = أ س^٢ + ب س + جـ ، د دالة فردية فإن : جـ = ...

(أ) ٢ (ب) ١ (ج) صفر (د) −١

㉒ إذا كانت د : د (س) = س^٢ + أ س + ٩ دالة زوجية فإن : أ = ...

(أ) ٦ (ب) ٣ (ج) صفر (د) −٦

㉓ إذا كانت : د (س) = س^٣ − س فإن : | د (س) + د (− س) | = ...

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٦ (د) ٤

㉔ إذا كانت د دالة زوجية وكان : د (س) + س^٢ د (− س) = ٢ فإن : د (١) = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٤}$ (ج) $\frac{٢}{٣}$ (د) ٢

㉕ إذا كانت د دالة فردية فإن : $\frac{٢ د (س) + ٨ د (− س)}{٢ د (س)}$ = ... حيث د (س) ≠ صفر

(أ) صفر (ب) −٢ (ج) −٤ (د) ٤

㉖ إذا كانت : د دالة فردية وكان س د (س) + س^٢ د (− س) = ٢ فإن : د (٢) = ...

(أ) −٢ (ب) ٢ (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{١٠}$

㉗ إذا كانت د : د (س) = أ س^٣ + ب دالة فردية وكان منحنى الدالة يمر بالنقطة (٢ ، ٨)

فإن : أ + ب^٢ = ...

(أ) صفر (ب) −١ (ج) ١ (د) ٥

(٢٨) الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) $د_١$ (س) = جا س　　(ب) $د_٢$ (س) = $س^٢$

(جـ) $د_٣$ (س) = $س^٣$　　(د) $د_٤$ (س) = $س^٤$ + $س^٢$

(٢٩) الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) د (س) = ٣ − $س^٢$　　(ب) د (س) = $س^٢$ + ٣

(جـ) د (س) = جا س طا س　　(د) د (س) = $س^٢$ + س

(٣٠) كل الدوال المعرفة بالقواعد التالية أحادية ما عدا الدالة التى قاعدتها ....

(أ) د (س) = س　　(ب) د (س) = س + ٦

(جـ) د (س) = $س^٣$　　(د) د (س) = $(س − ٢)^٢$

(٣١) الدوال المعرفه بالقواعد الآتية كلها أحادية ما عدا ؟

(أ) د (س) = $س^٣$　　(ب) ر (س) = ٣ س

(جـ) ع (س) = $\frac{١}{س}$　　(د) ل (س) = $س^٢$

(٣٢) كل الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ليست أحادية ما عدا ....

(أ) د (س) = $س^٢$　　(ب) د (س) = ٥

(جـ) د (س) = س + ٢　　(د) د (س) = جا س

(٣٣) إذا كان د ، ر دالتين حيث : د (س) = $س^٢$ ، ر (س) = س + ٢

فإن : (ر ∘ د) هى دالة ....

(أ) أحادية.　　(ب) فردية.　　(جـ) زوجية.　　(د) خطية.

(٣٤) إذا كانت الدالة فى تناقص مستمر لجميع قيم س ∈ مجال الدالة فإن الدالة تكون ....

(أ) زوجية.　　(ب) فردية.　　(جـ) أحادية.　　(د) ليست أحادية.

(٣٥) إذا كانت الدالة فى تزايد مستمر لجميع قيم س ∈ مجال الدالة فإن الدالة تكون ....

(أ) أحادية.　　(ب) زوجية.　　(جـ) فردية.　　(د) ليست أحادية.

(٣٦) الدالة د حيث د (س) = ٥ س متماثلة حول ....

(أ) النقطة (٢ ، ١)　　(ب) المستقيم ص = ١

(جـ) النقطة (٥ ، ٠)　　(د) النقطة (٠ ، ٠)

(٣٧) الدالة د : د (س) = س^{٣} + ٥ س متماثلة حول ....

(أ) محور السينات. (ب) محور الصادات. (جـ) نقطة الأصل. (د) لا يمكن أن تحدد.

(٣٨) الدالة د : د (س) = س^{٢} + س^{٤} + ١ متماثلة حول ....

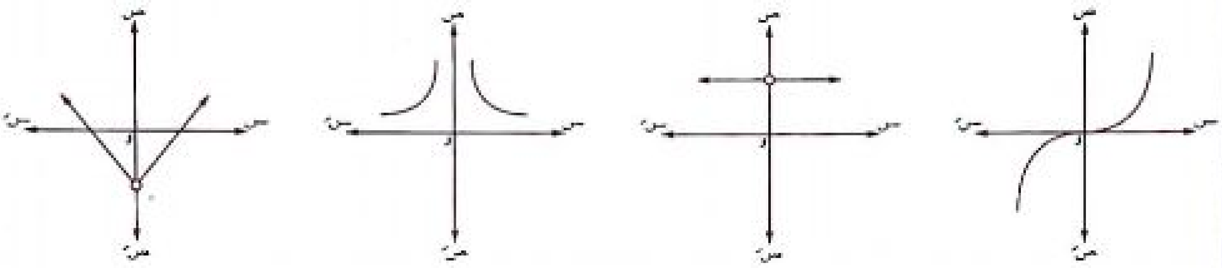
(أ) نقطة الأصل. (ب) محور السينات.

(جـ) محور الصادات. (د) ليس لها نقطة أو محور تماثل.

(٣٩) الدالة د : د (س) = جا ٣ س متماثلة بالنسبة للنقطة ....

(أ) (٠ ، ٠) (ب) (٣ ، ٠) (جـ) (-٣ ، ٠) (د) (-٣ ، ٣)

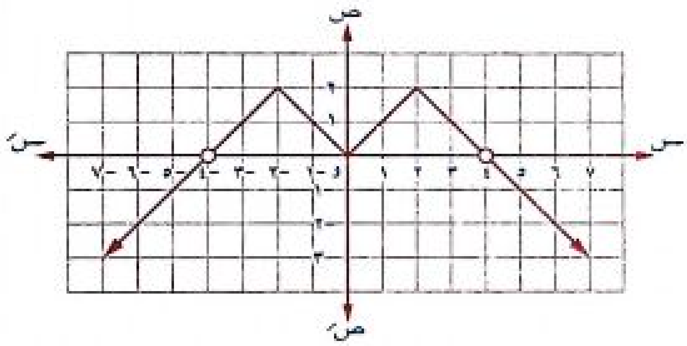
(٤٠) أى من الدوال الآتية ليست زوجية ؟



(أ) (ب) (جـ) (د)

(٤١) الشكل المقابل يمثل منحنى

الدالة د ، فإن د تكون ....



(أ) أحادية.

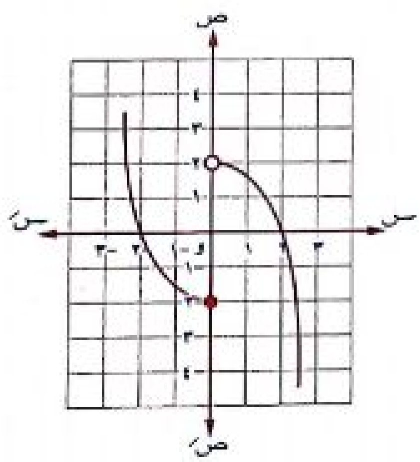
(ب) زوجية.

(جـ) فردية.

(د) ليست زوجية ولا فردية.

(٤٢) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن د تكون ....



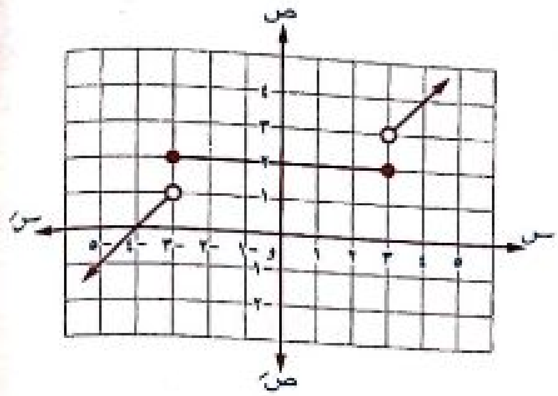
(أ) أحادية.

(ب) زوجية.

(جـ) فردية.

(د) ليست زوجية وليست فردية.

(٤٣) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د



فإن د تكون ....

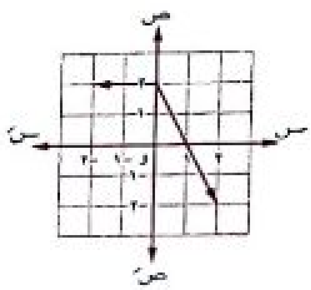
(أ) أحادية.

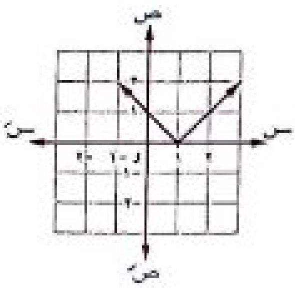
(ب) زوجية.

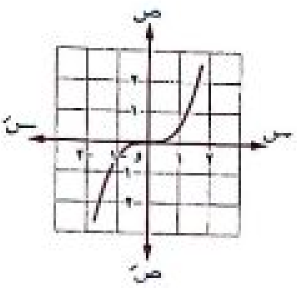
(جـ) فردية.

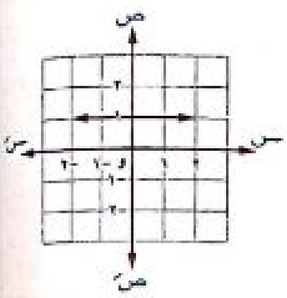
(د) ليست زوجية ولا فردية.

(٤٤) أى من الدوال الممثلة بيانيا بالأشكال الآتية تكون زوجية ؟

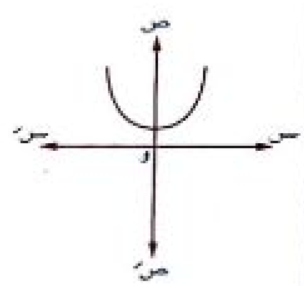

(أ)

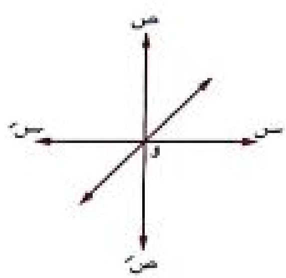

(ب)


(جـ)

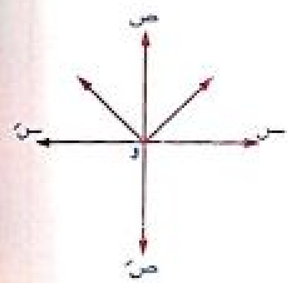

(د)

(٤٥) أى من الأشكال الآتية يعبر عن دالة أحادية ؟

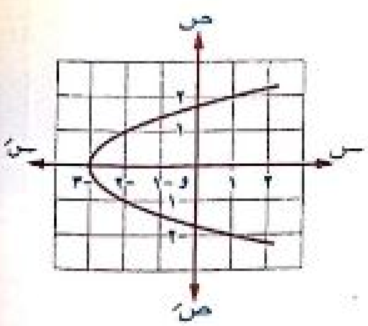

(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

(٤٦) المنحنى الموضح بالشكل المقابل



متماثل حول المستقيم الذى معادلته ....

(أ) س = صفر

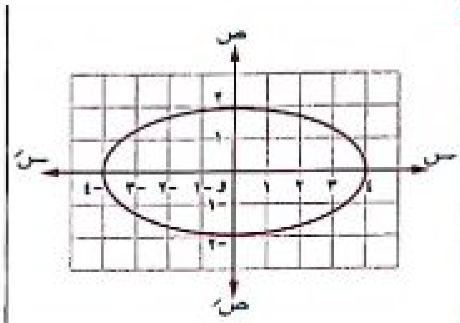
(ب) ص = صفر

(جـ) ص = −٢

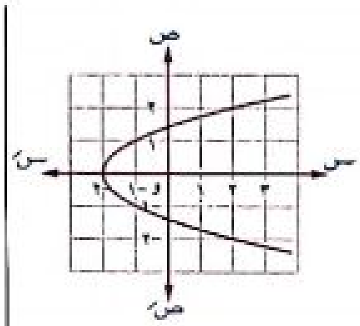
(د) س = ٢

ثانيًا الأسئلة المقالية

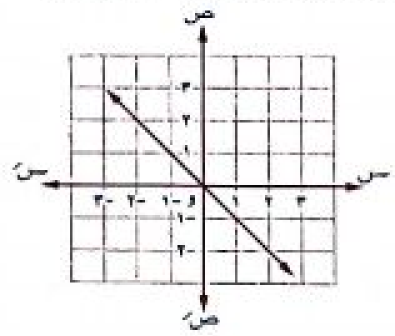
١ في كل من الأشكال الآتية اذكر ما إذا كان تماثل المنحنى حول محور السينات أو محور الصادات أو نقطة الأصل :



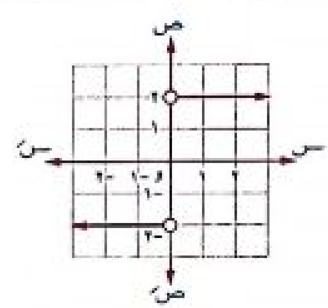
شكل (١)



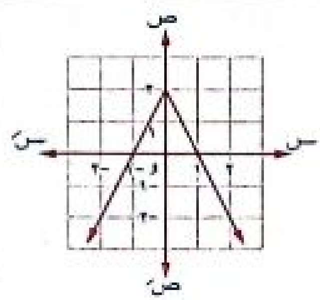
شكل (٢)



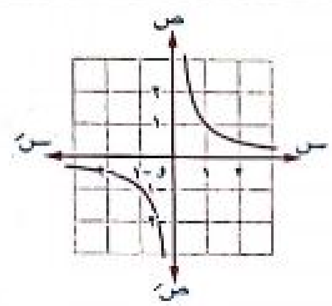
شكل (٣)



شكل (٤)



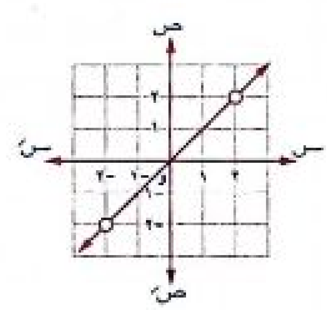
شكل (٥)



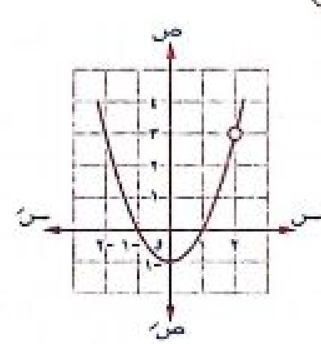
شكل (٦)

٢ اذكر نوع كل من الدوال الممثلة بالأشكال البيانية الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

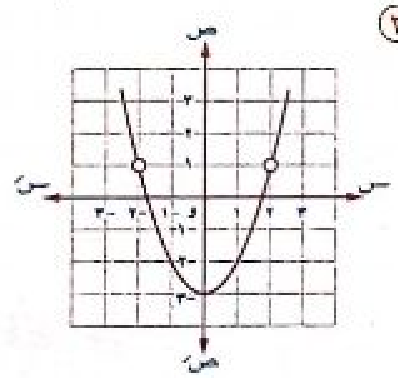
(١)



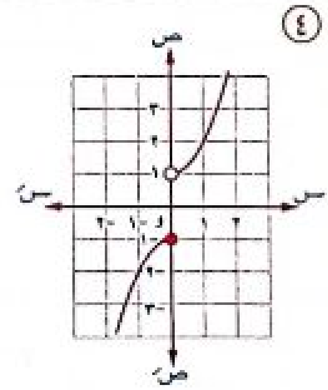
(٢)



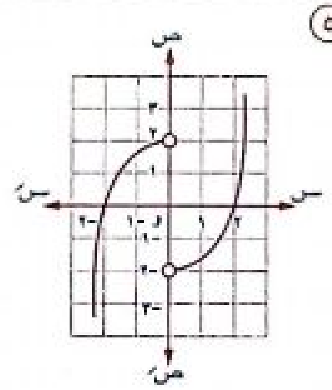
(٣)



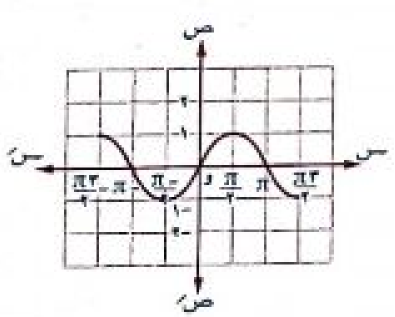
(٤)



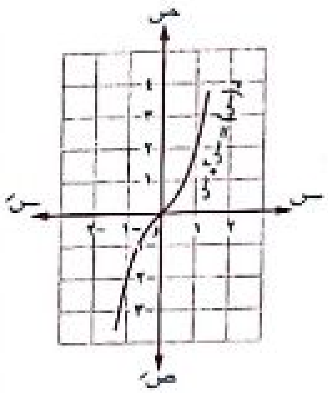
(٥)



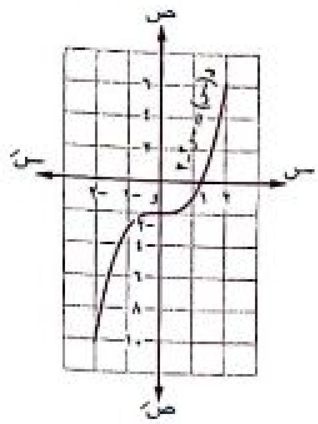
(٦)



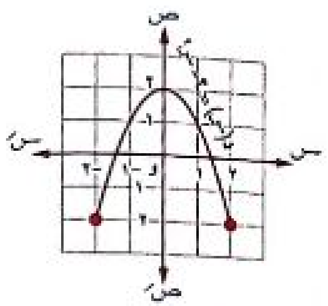
٣ يوضح كل شكل من الأشكال البيانية الآتية منحنى الدالة د ، حدد من الرسم ما إذا كانت الدالة د زوجية أو فردية أو غير ذلك وحقق إجابتك جبريًا.



شكل (١)

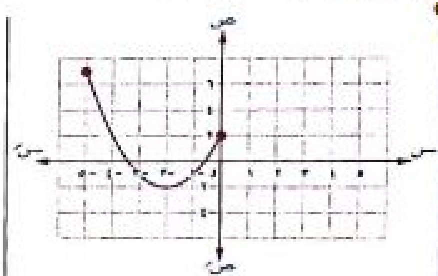


شكل (٢)

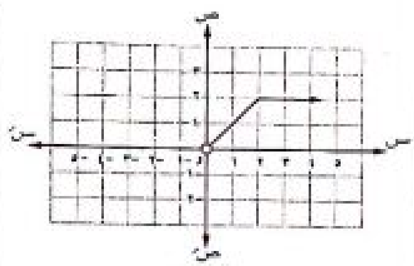


شكل (٣)

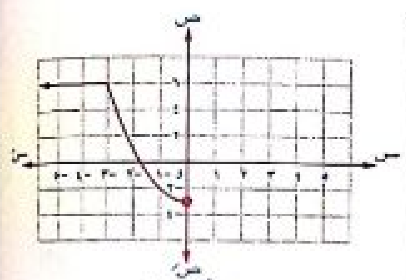
٤ أجب عما يلى من خلال الأشكال الآتية :



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

أولًا : أكمل رسم شكل (١) وشكل (٣) فى كراستك ، بحيث تصبح الدالة زوجية على مجالها.

ثانيًا : أكمل رسم شكل (٢) فى كراستك ، بحيث تصبح الدالة فردية على مجالها.

ثالثًا : حدد مجال ومدى الدالة فى كل حالة وبين أى الأشكال البيانية يمثل منحنى دالة أحادية.

٥ ابحث نوع كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

① $د(س) = ٥$

② $د(س) = س^{٤} + س^{٢} - ١$

③ $د(س) = ٣س - ٤س^{٣}$

④ $د(س) = س^{٢} - ٣س + ٤$

⑤ $د(س) = س^{٢}(س^{٢} - ١)$

⑥ $د(س) = (س - ٣)^{٢} - ٧$

⑦ $د(س) = \frac{س^{٢} + ٢}{س - ٢}$

⑧ $د(س) = \frac{٢س^{٣} - س^{٥}}{س}$

⑨ $د(س) = \sqrt{س + ٢}$

⑩ $د(س) = (س^{٢} + ١)^{٢}$

⑪ 📖 $د(س) = \sqrt[3]{س^٢ + ٦}$

⑫ $د(س) = \sqrt[3]{س^٢ + س}$

⑬ 📖 $د(س) = س^٢ - \frac{١}{س}$

⑭ $د(س) = \left(س - \frac{٢}{س}\right)^٢$

⑮ $د(س) = \left(\frac{س^٢}{٣} - \frac{٥}{س^٤}\right)^٥$

⑯ $د(س) = \left(\frac{١ - س}{١ + س}\right)^٢ - \left(\frac{١ + س}{١ - س}\right)^٢$

⑰ $د(س) = \left(\frac{س - ١}{س + ١}\right)^٥ + \left(\frac{س + ١}{س - ١}\right)^٥$

⑱ $د(س) = (س^٢ + ١)^٤ - (س^٢ - ١)^٤$

⑲ 📖 $د(س) = س \text{ جتا } س$

⑳ $د(س) = \frac{٣س}{\text{طا } س}$

㉑ $د(س) = \frac{س^٢ \text{ جا } ٢س}{١ + س^٤}$

㉒ $د(س) = \frac{٣س^٢ - \text{جتا } س}{س^٢ - ٦س}$

㉓ $د(س) = س^٢ \text{ جا}^٢ س$

㉔ $د(س) = س \text{ جا } س^٢$

㉕ $د(س) = \frac{س^٢ + \text{طا } س}{س^٤ + \text{جا } س}$

㉖ $د(س) = \text{جا } س^٢ - \text{جا}^٢ س$

㉗ $د(س) = س^٤ + \text{جا}^٦ س$

㉘ $د(س) = س^٧ + \text{طا}^٤ س$

㉙ $د(س) = \frac{\text{جا } ٣س \text{ جتا } ٢س}{\text{قا } س}$

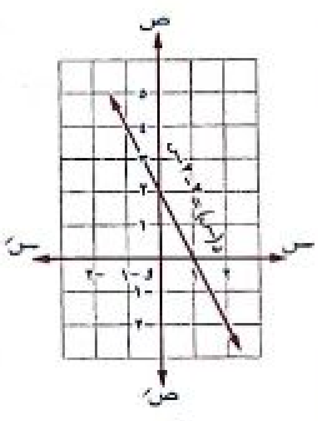
㉚ $د(س) = ٤^س + \text{جتا } س + ٢^{-٢س}$

㉛ $د(س) = (\text{جتا } س + \text{جا } س - ١)(\text{جتا } س + \text{جا } س + ١)$

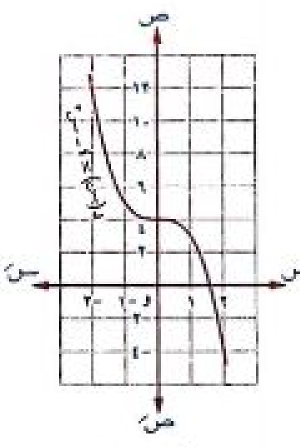
㉜ $د(س) = \begin{cases} ٢س & ، س \le ٠ \\ -٢س & ، س > ٠ \end{cases}$

㉝ $د(س) = \begin{cases} ٢س + س^٢ & ، س \ge ٠ \\ ٢س - س^٢ & ، س < ٠ \end{cases}$

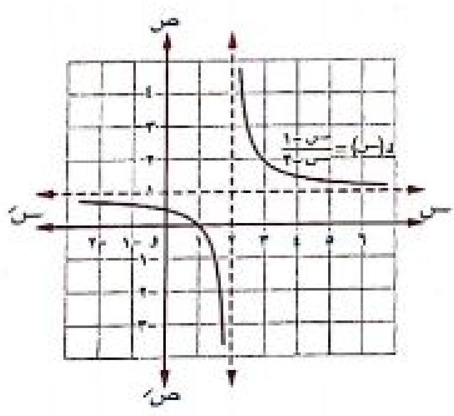
٦ يوضح كل شكل من الأشكال البيانية الآتية منحنى الدالة د ، بين من الرسم أن الدالة د أحادية وحقق ذلك جبريًا.



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

٧ أثبت أن الدوال المعرفة بالقواعد الآتية دوال أحادية :

① 📖 د (س) = ٢ س − ٣
② د (س) = ٤ − $س^{٣}$
③ د (س) = $\frac{٣}{٢ س + ٥}$
④ 📖 د (س) = $\frac{٣ س - ٥}{٤ س + ٣}$

٨ أثبت أن الدوال المعرفة بالقواعد الآتية دوال ليست أحادية :

① د (س) = ٣
② 📖 د (س) = $(س + ٣)^{٢}$
③ 📖 د (س) = $س^{٢}$ − ٥ س + ٦
④ د (س) = $\frac{١}{س^{٢} - ٤}$

٩ فى كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية حدد ما إذا كانت الدالة أحادية أم لا مع توضيح السبب :

① د (س) = $س^{٢}$ − ١
② 📖 د (س) = ٢ $س^{٢}$ − س − ٣
③ 📖 د (س) = $س^{٤}$ + ٢ $س^{٢}$ + ١
④ د (س) = $\frac{٣ - س}{س + ٢}$

١٠ اذكر نوع كل من الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

① د : ح ⟵ ح ، د (س) = س + ٢
② د : [−٣ ، ٣] ⟵ ح ، د (س) = ٣ $س^{٢}$
③ د : $ح^{+}$ ⟵ $ح^{+}$ حيث د (س) = $س^{٢}$
④ د : د (س) = $س^{٢}$ حيث س ∈ ح − {٣}

١١ إذا كانت د دالة مجالها ح أوجد قيمة : $\frac{٧ د (-٥) + ٣ د (٥)}{٢ د (-٥)}$ إذا كان :

① د دالة فردية.
② د دالة زوجية.

«٢ ، ٥»

١٢ إذا كانت $د_{١}$ ، $د_{٢}$ ، $ر_{١}$ ، $ر_{٢}$ دوال حقيقية حيث $د_{١}$ (س) = $س^{٤}$

، $د_{٢}$ (س) = $جا^{٥}$ س ، $ر_{١}$ (س) = ٢ $س^{٣}$ ، $ر_{٢}$ (س) = $جا^{٢}$ س

فبين أى الدوال الآتية زوجية وأيها فردية وأيها غير ذلك :

① $د_{١}$ + $ر_{٢}$
② $د_{١}$ − $د_{٢}$
③ $ر_{١}$ + $ر_{٢}$
④ $د_{١}$ × $ر_{٢}$
⑤ $ر_{١}$ × $ر_{٢}$
⑥ $\frac{د_{٢}}{د_{١}}$

١٣ 📖 مثل بيانيًا منحنى يحقق الشروط الآتية :

① يمر بالنقط (٠ ، −٢) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٧) ويمثل دالة زوجية.

② يمر بالنقط (٠ ، ٠) ، (−٢ ، ١) ، (−٣ ، ٥) ويمثل دالة فردية.

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت د دالة أحادية وكانت النقطة (٢ ، ٣) تنتمي لبيان الدالة د
فأى النقط الآتية يمكن أن تنتمى لبيان د ؟

(أ) (٥ ، ٣) (ب) (٢ ، −١) (جـ) (٣ ، ٢) (د) كل ما سبق.

② إذا كانت د دالة أحادية وكانت النقطتان (٢ ، أ) ، (٣ ، ب) تنتميان للدالة د
فأى مما يأتى صحيح دائمًا ؟

(أ) أ > ب (ب) أ = ب (جـ) أ ≠ ب (د) أ + ب = ٥

③ إذا كانت د دالة فردية وكان د (١) = ك وكانت د (س + ٢) = د (س) + د (٢)
فإن : د (٣) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ ك (جـ) ٦ ك (د) ٩ ك

④ إذا كانت : د (س) = $\frac{١ + س}{١ - س}$ وكانت ر (س) = $\frac{١ - س}{١ + س}$ فإن كل من مجموع الدالتين وحاصل ضربهما يكون دالة ....

(أ) زوجية. (ب) فردية.

(جـ) أحادية. (د) ليست زوجية وليست فردية.

⑤ إذا كانت د دالة حقيقية وكانت س ، −س ∈ مجال الدالة
فإن الدالة ر (س) = د (س) + د (−س) تكون دائمًا ....

(أ) فردية. (ب) زوجية.

(جـ) ليست زوجية وليست فردية. (د) أحادية.

⑥ إذا كانت : د معرفة على ح وكانت ٣ د (س) + ٢ د (−س) = س^{٣} − جا س
فإن : د تكون ....

(أ) فردية. (ب) زوجية.

(جـ) ليست زوجية وليست فردية. (د) ليست أحادية.

⑦ إذا كانت : د (س) = س^{٣} ، ر (س) = س^{٢} + ١ فأى مما يأتى يكون دالة فردية ؟

① (د × ر) ② (د ∘ ر) ③ (ر ∘ د)

(أ) ① فقط. (ب) ② ، ③

(جـ) ① ، ② (د) ① ، ③

الدرس **4**

التمثيل البيانى للدوال الأساسية ورسم الدالة مجزأة المجال



تمثيل الدالة الخطية

* نعلم أن الدالة الخطية د : ح ⟵ ح حيث د (س) = أ س + ب يمثلها بيانيًا خط مستقيم يمر بالنقطة (٠ ، ب) وميله = أ

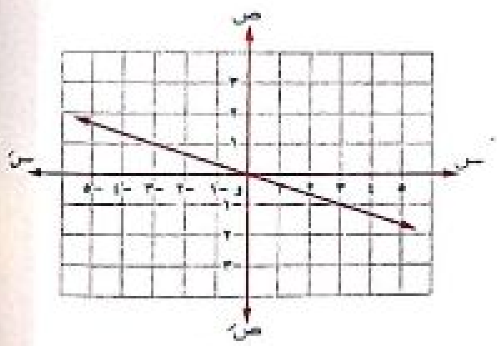
مثال ١

مثل بيانيًا الدالة د فى كل مما يأتى واستنتج من الرسم مدى الدالة :

١ د : ح ⟵ ح ، د (س) = $-\frac{١}{٢}$ س   ٢ د : [−١ ، ٢[⟵ ح ، د (س) = ٢ س − ١

٣ د :]−∞ ، ١[⟵ ح ، د (س) = ٢ س − ١

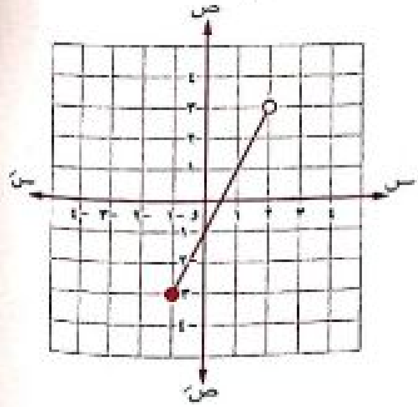
الحل



١ ∵ المجال = ح

∴ الدالة يمثلها خط مستقيم يمر بالنقطة (٠ ، ٠)

وميله = $-\frac{١}{٢}$ ، المدى = ح



٢ ∵ المجال = [−١ ، ٢[، د (س) = ٢ س − ١

س	−١	٠	٢
د (س)	−٣	−١	③

لاحظ أن : النقطة (٢ ، ٣) ∉ بيان الدالة لذلك استبعدنا هذه النقطة من الشكل البيانى بوضع دائرة مفرغة عندها .

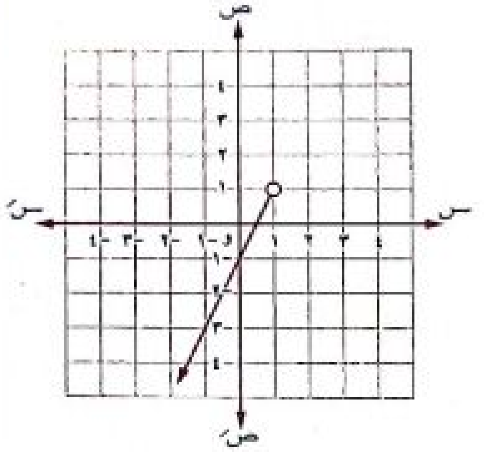
∴ من الرسم : المدى = [−٣ ، ٣[

٣ ∵ المجال =]− ∞ ، ١[، د (س) = ٢ س − ١

س	①	٠	−١
د (س)	①	−١	−٣

لاحظ أن : النقطة (١ ، ١) ∉ بيان الدالة لذلك استبعدناها من الشعاع الممثل للدالة بوضع دائرة مفرغة عندها.

من الرسم : المدى =]− ∞ ، ١[



مثال ٢

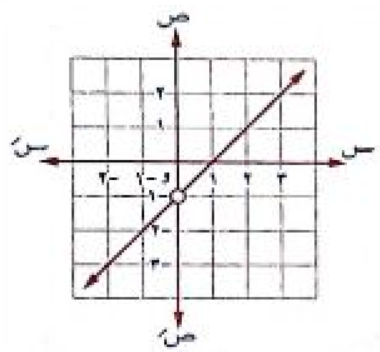
مثل بيانيًا الدالة د : ح − {٠} ⟵ ح ، د (س) = $\frac{س^٢ - س}{س}$ ومن الرسم استنتج مدى الدالة.

الحل

∵ مجال الدالة د = ح − {٠}

، د (س) = $\frac{س^٢ - س}{س}$ = $\frac{س (س - ١)}{س}$ = س − ١ يمثلها خط مستقيم

س	−١	⓪	١
د (س)	−٢	(−١)	٠



، المدى = ح − {−١}

لاحظ أنه

تم وضع دائرة مفرغة عند النقطة التى إحداثيها السينى س = ٠ لأنها لا تنتمى للمجال.

مثال ٣

إذا كانت $د_١$:]− ∞ ، ٢] ⟵ ح حيث $د_١$ (س) = ٣ س − ١ ، $د_٢$: [−١ ، ٥] ⟵ ح

حيث $د_٢$ (س) = ٣ − ٢ س فارسم الدالة $د_١$ + $د_٢$ ومن الرسم استنتج مداها.

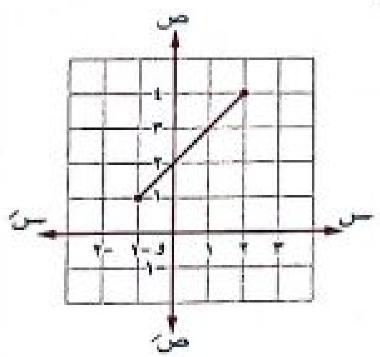
الحل

∵ مجال $د_١$ =]− ∞ ، ٢] ، مجال $د_٢$ = [−١ ، ٥]

∴ مجال ($د_١$ + $د_٢$) =]− ∞ ، ٢] ∩ [−١ ، ٥] = [−١ ، ٢]

، ∵ ($د_١$ + $د_٢$) (س) = ٣ س − ١ + ٣ − ٢ س = س + ٢

س	−١	٠	٢
($د_١$ + $د_٢$) (س)	١	٢	٤



مدى ($د_١$ + $د_٢$) = [١ ، ٤]

تمثيل الدالة التربيعية

مثال ٤

مثل بيانيًا الدالة د : د (س) = س^2 - س حيث س ∈]-١ ، ٣[

الحل

∵ د (س) = س^2 - س ، المجال =]-١ ، ٣[

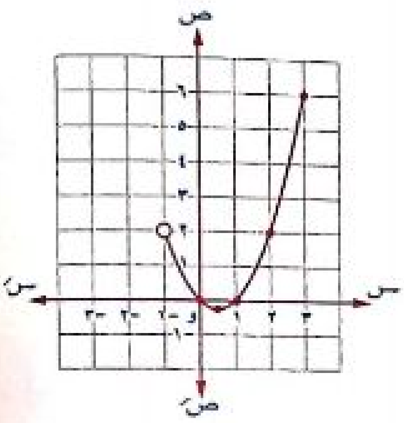
∴ الإحداثى السينى لرأس المنحنى = $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{١}{٢}$

، ∵ د $\left(\frac{١}{٢}\right)$ = $\left(\frac{١}{٢}\right)^2$ - $\frac{١}{٢}$ = $-\frac{١}{٤}$

∴ رأس المنحنى هو $\left(\frac{١}{٢} ، \frac{-١}{٤}\right)$

تذكر أن
نقطة رأس منحنى الدالة التربيعية
د : د (س) = أس^2 + ب س + جـ
هو $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، د\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$

س	(-١)	٠	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٣
د (س)	(٢)	٠	$\frac{-١}{٤}$	٠	٢	٦



من الرسم :

* المدى = [$-\frac{١}{٤}$ ، ٦[

* الدالة تناقصية فى]-١ ، $\frac{١}{٢}$[وتزايدية فى]$\frac{١}{٢}$ ، ٣[

تمثيل الدالة مجزأة المجال (ذات المقاطع)

مثال ٥

مثل بيانيًا الدالة د : د (س) = { ٢ - س ، -١ ≤ س < ٢ ؛ س - ٢ ، ٢ ≤ س < ٥ } ومن الرسم :

[١] عين مجال ومدى الدالة د

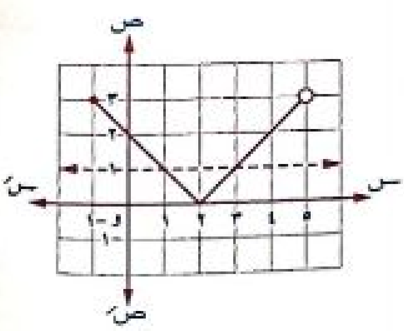
[٢] ابحث اطراد الدالة د

[٣] اذكر نوع الدالة د من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك مع بيان السبب.

[٤] اذكر هل الدالة د أحادية أم لا مع بيان السبب.

الحل

الدالة د معرفة بقاعدتين



• د$_1$ (س) = ٢ - س حيث س ∈ [-١ ، ٢[

س	-١	٠	(٢)
د$_1$ (س)	٣	٢	(٠)

• د٢ (س) = س – ٢ حيث س ∈ [٢ ، ٥]

س	٢	٣	⑤
د٢ (س)	٠	١	③

لاحظ أن

٢ ∉ [-١ ، ٢[بينما ٢ ∈ [٢ ، ٥]
لذلك ٢ ∈ مجال د
وبالتالي (٢ ، ٠) ∈ بيان د
أي لا نضع دائرة مفرغة عند
النقطة (٢ ، ٠) في الرسم

١ مجال د = [-١ ، ٢[∪ [٢ ، ٥] = [-١ ، ٥] ، مدى د = [٠ ، ٢]

٢ الدالة د تناقصية في الفترة]-١ ، ٢[وتزايدية في الفترة]٢ ، ٥[

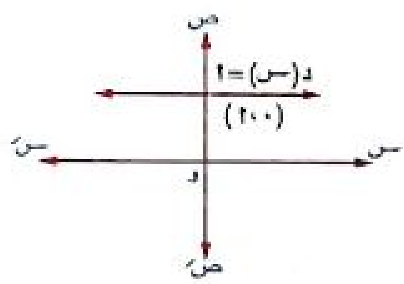
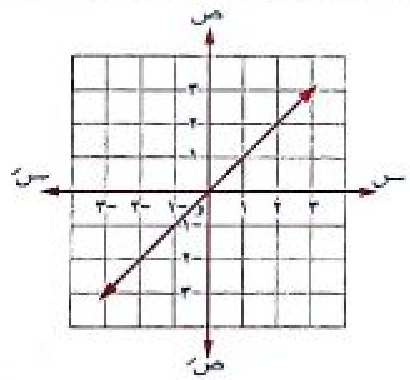
٣ الدالة ليست زوجية وليست فردية لأنها غير متماثلة حول محور الصادات وغير متماثلة حول نقطة الأصل

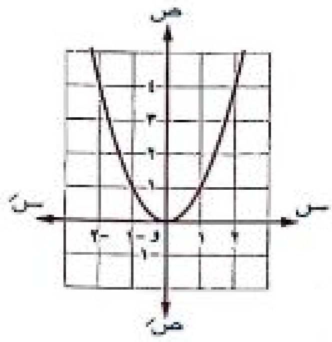
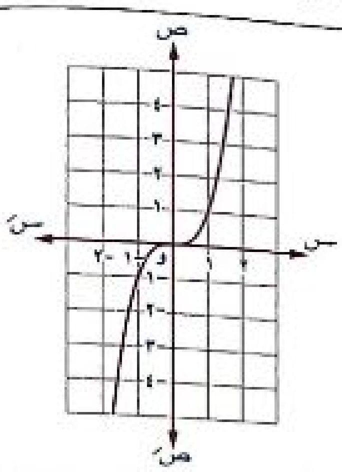
٤ الدالة د ليست أحادية لوجود خط أفقي يقطع الشكل البياني للدالة د في نقطتين.

الصور الأساسية لبعض الدوال

سوف نتعرف الآن على التمثيل البياني للصور البسيطة (الصور الأساسية) لبعض الدوال الحقيقية وذلك تمهيداً لاستخدامها في تمثيل الدوال الحقيقية بصورها المختلفة في الدرس القادم.

١ الصور الأساسية لبعض دوال كثيرات الحدود

	الدالــــة الثابتــة	دالـة الدرجـة الأولـى (الخطية)
الصورة الأساسية	د : ح ⟵ ح ، د (س) = أ حيث أ ∈ ح	د : ح ⟵ ح ، د (س) = س
التمثيل البياني		
المدى والاطراد والخواص	* مدى الدالة = {أ} * الدالة ثابتة على مجالها. * الدالة زوجية (متماثلة حول محور الصادات). * الدالة ليست أحادية.	* مدى الدالة = ح * الدالة تزايدية على مجالها ح * الدالة فردية (متماثلة حول نقطة الأصل). * الدالة أحادية.

	دالة الدرجة الثانية (التربيعية)	دالة الدرجة الثالثة (التكعيبية)
الصورة الأساسية	د : ح ⟵ ح ، د (س) = س^{٢}	د : ح ⟵ ح ، د (س) = س^{٣}
التمثيل البياني		
المدى والاطراد والخواص	* مدى الدالة = [٠ ، ∞[* الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ٠] ، وتزايدية فى [٠ ، ∞[* الدالة زوجية (متماثلة حول محور الصادات). * الدالة ليست أحادية.	* مدى الدالة = ح * الدالة تزايدية على مجالها ح * الدالة فردية (متماثلة حول نقطة الأصل). * الدالة أحادية.

٢ الصورة الأساسية لدالة المقياس (دالة القيمة المطلقة)

* الصورة الأساسية :

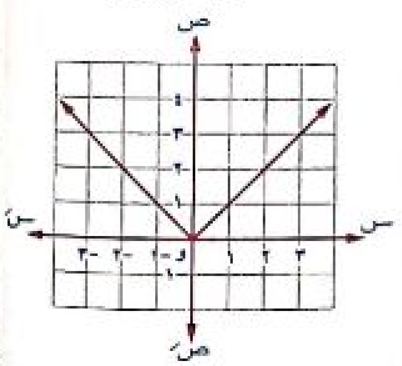
د : ح ⟵ ح ، د (س) = | س |

ويعاد تعريفها كالتالى : د (س) = { س ، س ≥ ٠ ؛ −س ، س < ٠

* المدى والاطراد والخواص :

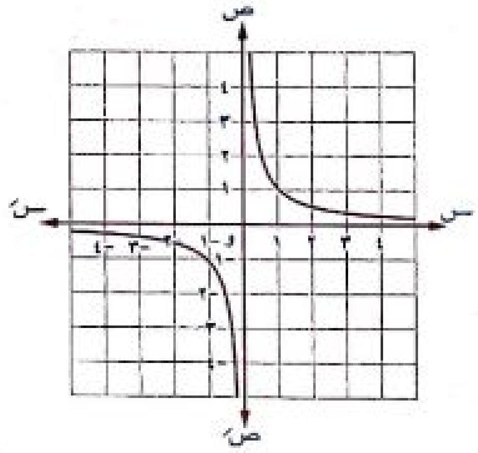
* مدى الدالة = [٠ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ٠] وتزايدية فى [٠ ، ∞[
* الدالة زوجية (متماثلة حول محور الصادات).
* الدالة ليست أحادية.

التمثيل البيانى



٣ الصورة الأساسية للدالة الكسرية

التمثيل البياني



• الصورة الأساسية :

د : ح − {٠} ⟵ ح ، د (س) = $\frac{١}{س}$

نظرًا لاقتراب كل من جزئي المنحنى من المحورين

دون أن يقطعهما يقال إن المحورين

$\overleftrightarrow{سس'}$ ، $\overleftrightarrow{صص'}$ هما خطا التقارب للمنحنى.

• المدى والاطراد والخواص :

* مدى الدالة = ح − {٠}

* الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ٠[وتناقصية أيضًا فى]٠ ، ∞[

* الدالة فردية (متماثلة حول نقطة الأصل) * الدالة أحادية.

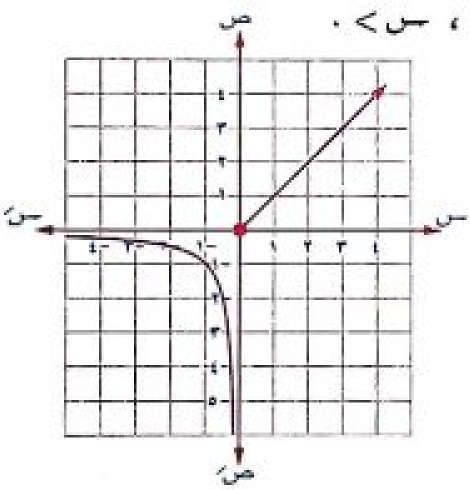
مثال ٦

مثل بيانيًا كلًا من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين ومن الرسم أوجد مجال ومدى الدالة واستنتج اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

١ د (س) = $\begin{cases} \frac{١}{س} & ، س < ٠ \\ |س| & ، س \geq ٠ \end{cases}$

٢ د (س) = $\begin{cases} س^٣ & ، س < ٠ \\ س & ، س > ٠ \end{cases}$

الحل



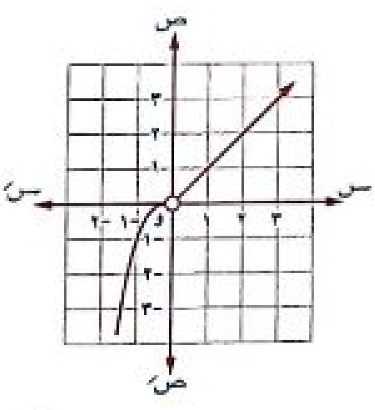
١ * المجال = ح

* المدى = ح

* الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ٠[

وتزايدية فى]٠ ، ∞[

* الدالة ليست زوجية وليست فردية.



٢ * المجال = ح − {٠}

* المدى = ح − {٠}

* الدالة تزايدية على مجالها.

* الدالة ليست زوجية وليست فردية.

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : د (س) = ٥ فإن مجال الدالة د هو ....

(أ) ح (ب) ح⁺ (جـ) {٥} (د) ح - {٥}

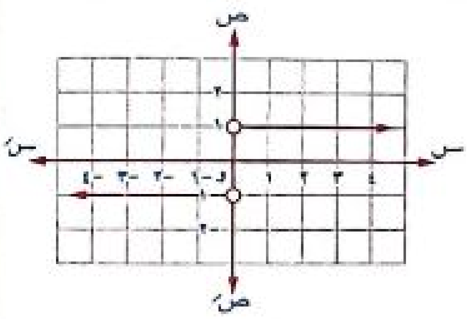
(٢) إذا كانت : د (س) = ٧ فإن مدى الدالة د هو ....

(أ) ح (ب) ح⁺ (جـ) {٧} (د) ح - {٧}

(٣) مدى الدالة د : د (س) = { ٠ ، س ≤ ٠ ؛ ١ ، س > ٠ } هو ....

(أ) {١} (ب) {٠} (جـ) ح (د) {٠ ، ١}

(٤) مدى الدالة الممثلة بالشكل المقابل هو ....



(أ) {١} (ب) {١ ، -١}

(جـ) {-١} (د) ح

(٥) مدى الدالة د : د (س) = $\frac{٣ س^٢ - ٣}{س^٢ - ١}$ هو ....

(أ) ح - {١ ، -١} (ب) ح - {٣ ، -٣} (جـ) {٣ ، -٣} (د) {٣}

(٦) مدى الدالة د (س) = $\frac{س^٢ - ٣ س}{س}$ حيث س ≠ ٠ هو ....

(أ) ح (ب) ح - {٠} (جـ) {٠} (د) ح - {-٣}

(٧) مدى الدالة د : د (س) = $\frac{٢ س^٣ - ٢ س}{س^٢ - ١}$ هو ....

(أ) ح - {١ ، -١} (ب) ح - {٢ ، -٢} (جـ) ح⁺ (د) ح⁺ - {٢}

(٨) مدى الدالة د : [-٢ ، ٣[⟵ ح ، د (س) = س² هو ....

(أ) [٤ ، ٩[(ب) ح⁺ (جـ) [٠ ، ٩[(د) [٠ ، ٤]

(٩) مدى الدالة د : د (س) = { س ، س > ٠ ؛ −٢ ، س ≤ ٠ } هو ....

(أ) ح⁺ (ب) ح⁺ − {−٢} (جـ) ح⁺ ∪ {−٢} (د) ح

(١٠) الدالة د حيث د (س) = { ٢ ، س > ٠ ؛ −٢ ، س < ٠ } متماثلة بالنسبة للنقطة ....

(أ) (٢ ، ٠) (ب) (−٢ ، ٠) (جـ) (٠ ، ٠) (د) (٢ ، −٢)

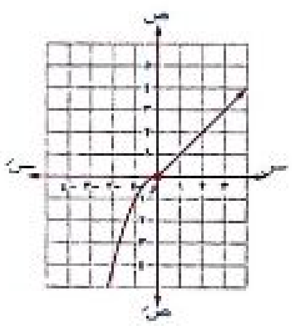
(١١) محور تماثل الدالة د : د (س) = س² هو المستقيم ....

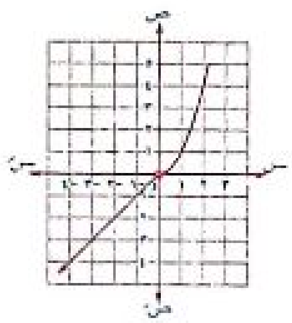
(أ) ص = صفر (ب) ص = س (جـ) ص = − س (د) س = صفر

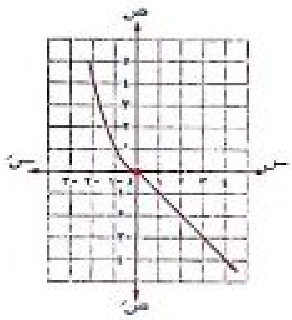
(١٢) الدالة د : د (س) = { س² ، س < ٠ ؛ ١/س ، س > ٠ } تكون تزايدية في ....

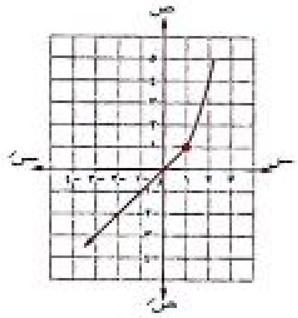
(أ) ح (ب) ح⁻ (جـ) ح⁺ (د) ح − {٠}

(١٣) منحنى الدالة د : د (س) = { س² ، س > ٠ ؛ س ، س ≤ ٠ } هو ....

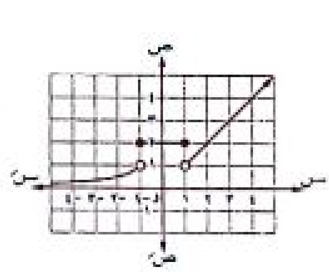

(أ)

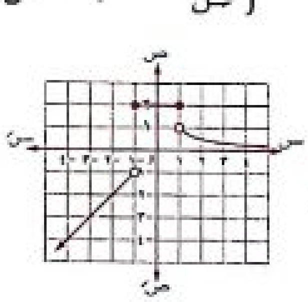

(ب)

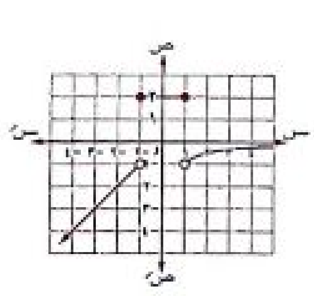

(جـ)

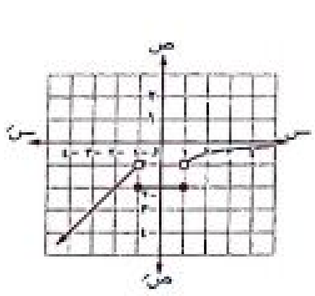

(د)

(١٤) منحنى الدالة د : د (س) = { س ، س < −١ ؛ ٢ ، −١ ≤ س ≤ ١ ؛ ١/س ، س > ١ } هو ....

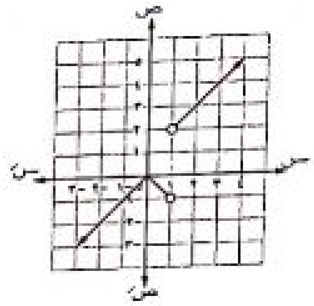

(أ)

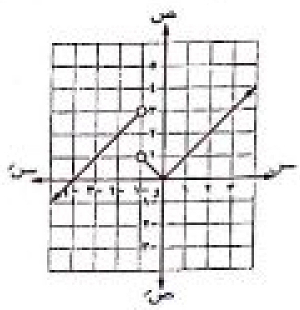

(ب)

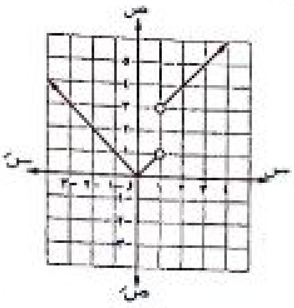

(جـ)

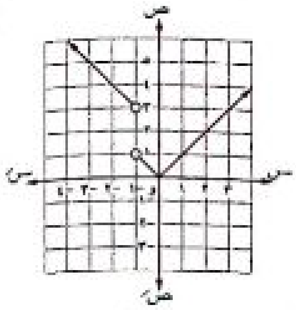

(د)

(١٥) منحنى الدالة د : د (س) = { |س| ، س < ١ ؛ س + ٢ ، س > ١ } هو ....

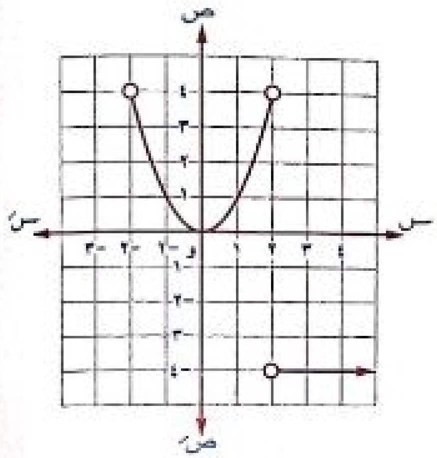

(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

(١٦) فى الشكل المقابل :



منحنى الدالة د المعرفة بالقاعدة د (س) = ...

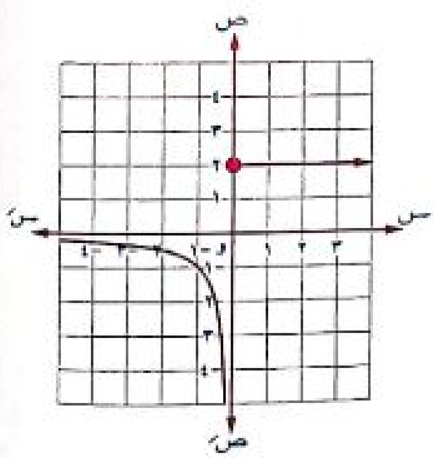
(أ) { س^٢ ، −٢ < س < ٢ ؛ −٤ ، س < −٢ }

(ب) { س^٢ ، −٢ < س < ٢ ؛ −٤ ، س < ٢ }

(جـ) { س^٢ ، −٢ ≤ س ≤ ٢ ؛ −٤ ، س > ٢ }

(د) { س^٢ ، −٢ < س < ٢ ؛ −٤ ، س > ٢ }

(١٧) فى الشكل المقابل :



منحنى الدالة د المعرفة بالقاعدة د (س) = ...

(أ) { ٢ ، س < ٠ ؛ $\frac{١}{س}$ ، س > ٠ }

(ب) { ٢ ، س ≤ ٠ ؛ $\frac{١}{س}$ ، س > ٠ }

(جـ) { ٢ ، س > ٠ ؛ $\frac{١}{س}$ ، س ≤ ٠ }

(د) { ٢ ، س ≤ ٢ ؛ $\frac{١}{س}$ ، س > ٢ }

ثانيا الأسئلة المقالية

١ مثل كلاً من الدوال الآتية بيانيًا ، وعين مداها :

① $د : \{-٣ ، -١ ، ١ ، ٢\} \longrightarrow [-٣ ، ٧]$ ، $د(س) = ٢س + ٣$

② 📖 $د : [١ ، ٥[\longrightarrow ح$ ، $د(س) = س + ١$

③ 📖 $ر :]-\infty ، -١] \longrightarrow ح$ ، $ر(س) = ١ - س$

④ $د : د(س) = -٢س + ٧$ لكل $س \in ح$

⑤ $د : ح^{-} \longrightarrow ح$ ، $د(س) = س^{٢}$

⑥ $د : د(س) = س^{٢} - ٥$ ، $س \ge ٠$.

⑦ $د : د(س) = س^{٢} - ٢س$ ، $س \in [-٣ ، ٢]$

٢ 📖 إذا كانت $د : [-٢ ، ٦] \longrightarrow ح$ ، $د(س) = \begin{cases} ٤ - س & \text{عندما } -٢ \le س < ١ \\ س & \text{عندما } ١ \le س \le ٦ \end{cases}$

① ارسم الشكل البيانى للدالة د ، واستنتج من الرسم مدى الدالة وابحث اطرادها.

② هل د دالة أحادية ؟ فسر إجابتك.

٣ مثل بيانيًا كلًا من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم أوجد مجال ومدى كل دالة وابحث اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك وابحث تماثلها :

① $د(س) = \frac{٣س^{٢} - ٣}{س^{٢} - ١}$

② $د(س) = \frac{٤ - س^{٢}}{س + ٢}$

③ $د(س) = \frac{س^{٣} - س}{س^{٢} - ١}$

④ $د(س) = \frac{س^{٤} - س^{٢}}{س^{٢} - ١}$

٤ مثل بيانيًا كلًا من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم أوجد مجال ومدى كل دالة وابحث اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك وابحث تماثلها :

① $د :]-\infty ، ٢] \longrightarrow ح$ حيث $د(س) = ٢$

② $د(س) = \begin{cases} ٢ & ، س \le ٠ \\ -٣ & ، س > ٠ \end{cases}$

③ $د(س) = \begin{cases} ٢ & ، س > ١ \\ س - ٢ & ، س \le ١ \end{cases}$

④ $د(س) = \begin{cases} س + ٢ & ، س \in [-٢ ، ١] \\ -س + ٤ & ، س \in]١ ، ٤] \end{cases}$

⑤ 📖 $د(س) = \begin{cases} ٤ & ، س < -٢ \\ س^{٢} & ، س \ge -٢ \end{cases}$

⑥ 📖 $د(س) = \begin{cases} س^{٢} & ، س < ٠ \\ س & ، س \ge ٠ \end{cases}$

⑦ د (س) = $\begin{cases} س^2 & ، س < ١ \\ ١ & ، س > ١ \end{cases}$

⑧ د (س) = $\begin{cases} س^2 & ، س < ١ \\ ٢ - س & ، س \geq ١ \end{cases}$

⑨ د (س) = $\begin{cases} |س| & ، س \leq ٠ \\ \frac{١}{س} & ، س > ٠ \end{cases}$

⑩ د (س) = $\begin{cases} |س| & ، س \leq ٠ \\ س^2 & ، س > ٠ \end{cases}$

⑪ د (س) = $\begin{cases} ٣ & ، س \leq -٣ \\ |س| & ، -٣ < س < ٣ \\ ٣ & ، س \geq ٣ \end{cases}$

⑫ د (س) = $\begin{cases} \frac{٢ س - ٦}{٢ - س} & ، س > ٢ \\ ٢ & ، س < ٢ \end{cases}$

⑬ د (س) = $\begin{cases} ٢ & ، -٣ \leq س \leq -١ \\ ٠ & ، -١ < س < ١ \\ ٢ & ، ١ \leq س \leq ٣ \end{cases}$

⑭ د (س) = $\begin{cases} -س - ١ & ، -٤ \leq س < -٢ \\ ١ & ، -٢ \leq س \leq ٢ \\ س - ١ & ، ٢ < س \leq ٤ \end{cases}$

---

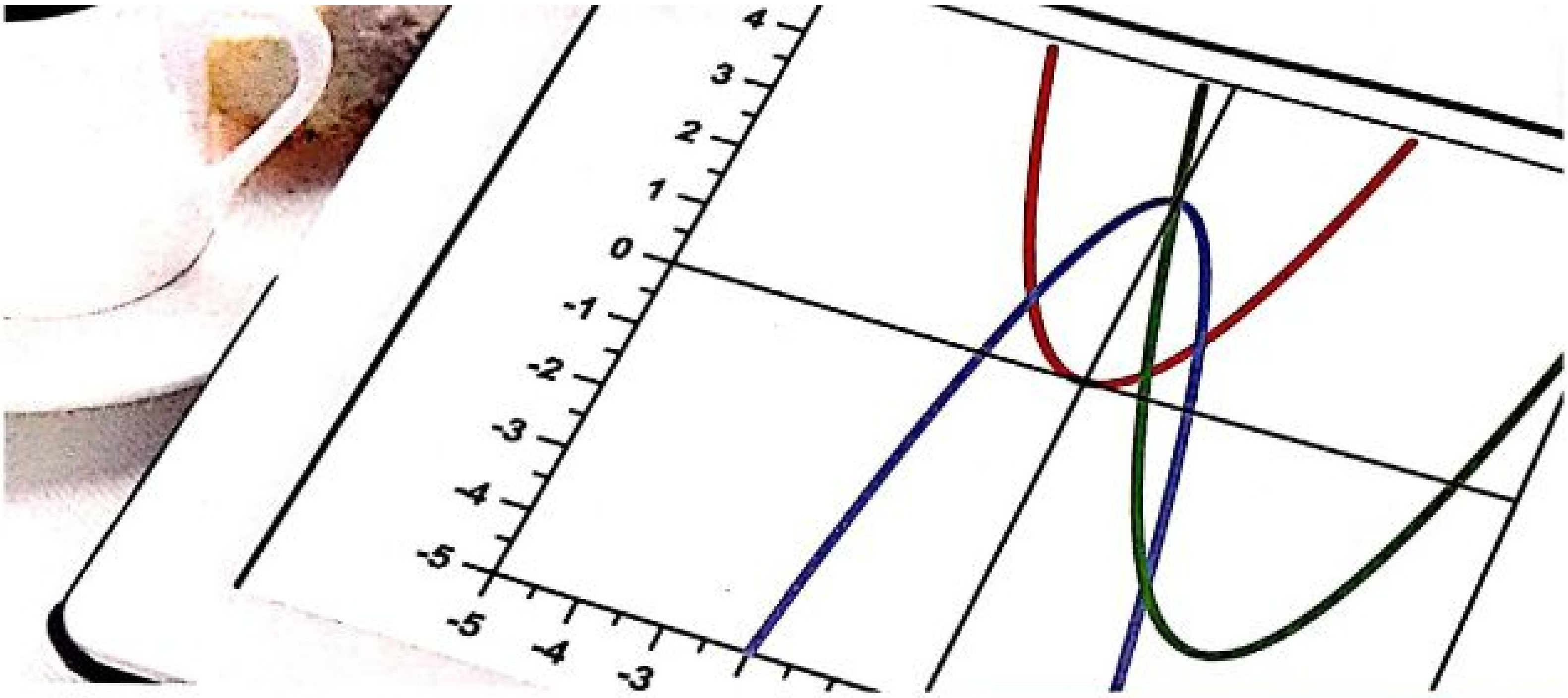
٥ إذا كان $د_١$: ح ⟵ ح حيث $د_١$ (س) = ٢ س - ١ ، $د_٢$: [-٢ ، ٢] ⟵ ح

حيث $د_٢$ (س) = ٣ - ٢ س فارسم الدالة ($د_١$ + $د_٢$) (س) محددًا مجالها

ثم استنتج اطراد الدالة.

---

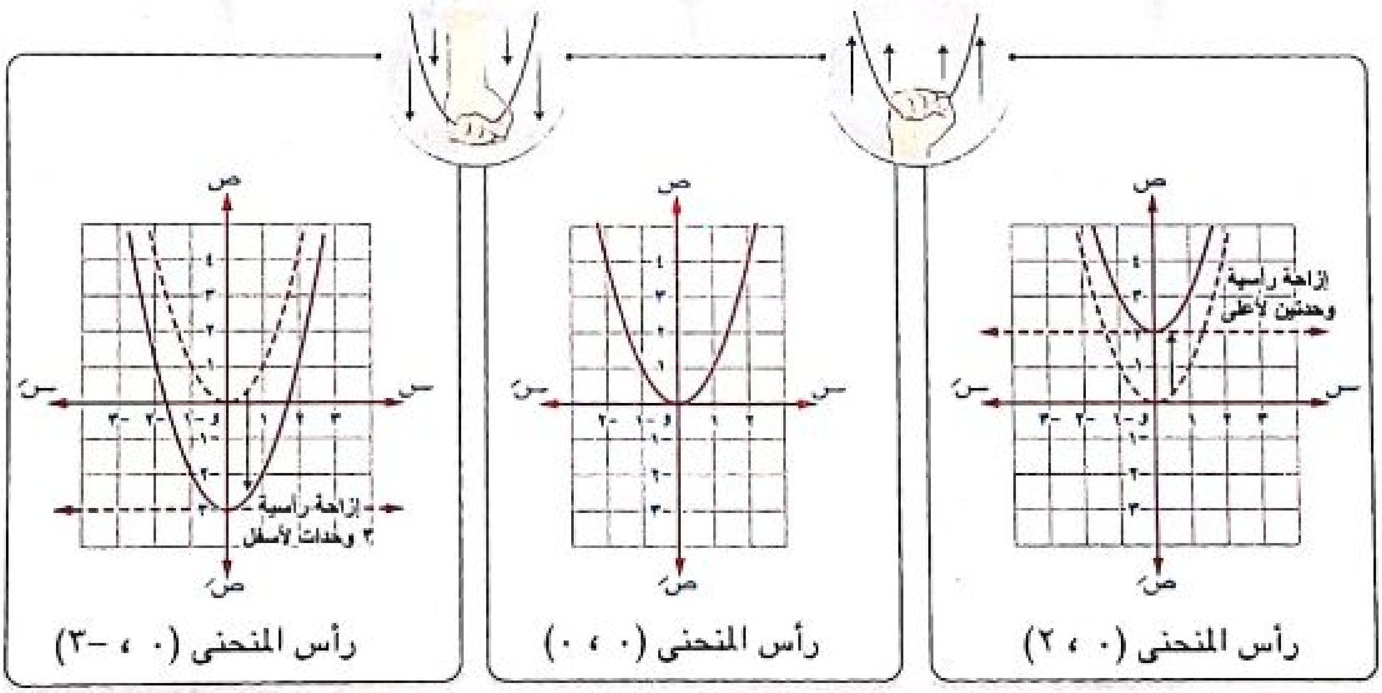
٦ إذا كانت د (س) = $س^2$ - ٤ س ، ر (س) = $س^2$ - ٤ فعين مجال الدالة $\frac{د}{ر}$ ومثلها بيانيًا ومن الرسم عين مداها وعين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك وابحث اطرادها واذكر هل هي دالة أحادية أم لا.



أولاً / الإزاحة الرأسية لمنحنى الدالة

الدالة الأساسية

ص = $س^2$ + ٢ ← إزاحة رأسية وحدتين لأعلى — ص = $س^2$ — إزاحة رأسية ٣ وحدات لأسفل → ص = $س^2$ − ٣



بصفة عامة

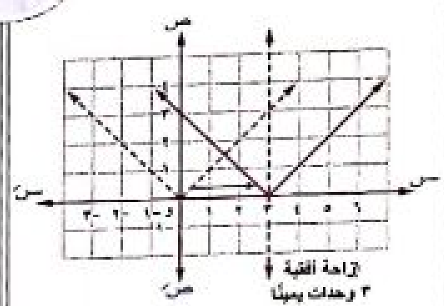
لأى دالة د يكون المنحنى ص = د (س) + أ ، أ ∈ ح − {٠} هو نفس المنحنى ص = د (س)

بإزاحة رأسية قدرها |أ| وحدة طول في اتجاه : و ص (أى لأعلى) عندما أ > ٠ .
و ص′ (أى لأسفل) عندما أ < ٠ .

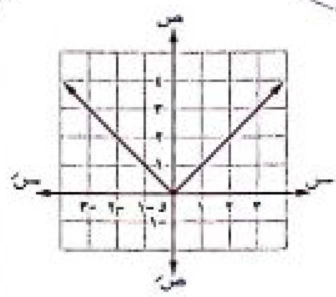
ثانيًا الإزاحة الأفقية لمنحنى الدالة

الدالة الأساسية

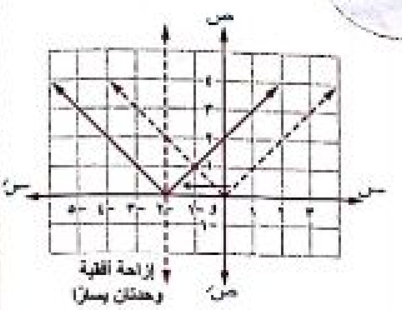
ص = |س − ٣| ← (إزاحة أفقية ٣ وحدات يمينًا) ← ص = |س| → (إزاحة أفقية وحدتان يسارًا) → ص = |س + ٢|



رأس المنحنى (٣ ، ٠)



رأس المنحنى (٠ ، ٠)



رأس المنحنى (−٢ ، ٠)

بصفة عامة

لأى دالة د يكون المنحنى ص = د (س + أ) ، أ ∈ ح − {٠} هو نفس المنحنى ص = د (س)

بإزاحة أفقية قدرها |أ| وحدة طول فى اتجاه : و س (يمينًا) عندما أ < ٠ ، و س (يسارًا) عندما أ > ٠

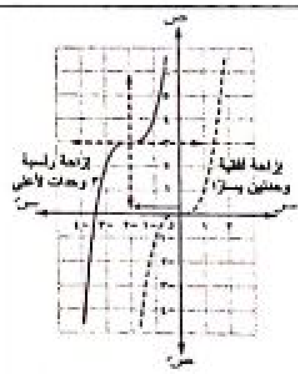
ثالثًا الإزاحة الأفقية متبوعة بالإزاحة الرأسية لمنحنى الدالة

الدالة الأساسية

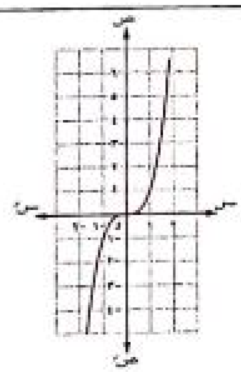
ص = $س^٣$

إزاحة أفقية وحدتين يسارًا ثم إزاحة رأسية ٣ وحدات لأعلى: ص = $(س + ٢)^٣ + ٣$

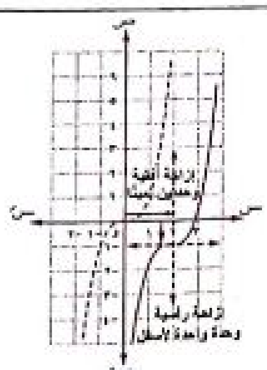
إزاحة أفقية وحدتين يمينًا ثم إزاحة رأسية وحدة واحدة لأسفل: ص = $(س − ٢)^٣ − ١$



نقطة التماثل (−٢ ، ٣)



نقطة التماثل (٠ ، ٠)



نقطة التماثل (٢ ، −١)

بصفة عامة

لأى دالة د يكون المنحنى ص = د (س + أ) + ب حيث أ ، ب ∈ ح − {٠} هو نفس المنحنى ص = د (س) بإزاحة أفقية مقدارها | أ | وحدة طول فى اتجاه وس إذا كان أ > ٠ أو فى اتجاه وس′ إذا كان أ < ٠ ثم إزاحة رأسية مقدارها | ب | وحدة طول فى اتجاه وص إذا كان ب > ٠ أو فى اتجاه وص′ إذا كان ب < ٠.

مثال ١

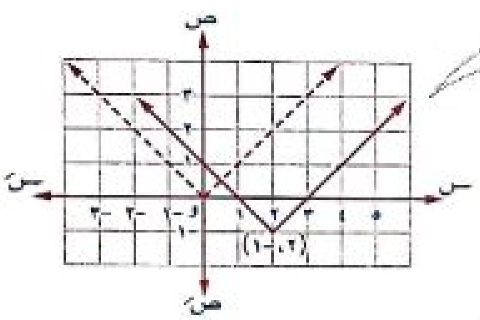
استخدم منحنيات الدوال الأساسية لرسم منحنيي الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين ومن الرسم عين مجال ومدى كل دالة وابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك :

[١] ر (س) = | س − ٢ | − ١

[٢] ر (س) = (٢ − س)^{٢} + ١

الحل

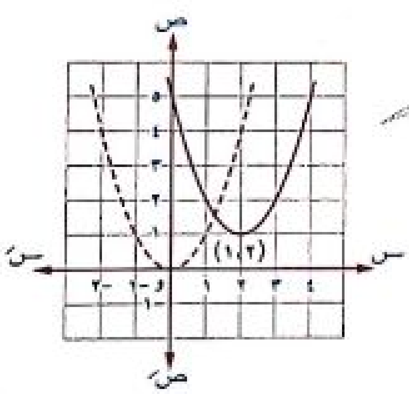
[١] منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د : د (س) = | س | بإزاحة أفقية ٢ وحدة فى اتجاه وس ثم إزاحة رأسية وحدة واحدة فى اتجاه وص′



* مجال ر = ح ، مدى ر = [−١ ، ∞[
* الدالة ر تناقصية فى]− ∞ ، ٢[وتزايدية فى]٢ ، ∞[
* الدالة ر ليست زوجية وليست فردية.

[٢] ∵ (٢ − س)^{٢} = (س − ٢)^{٢} ∴ ر (س) = (س − ٢)^{٢} + ١

منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د : د (س) = س^{٢} بإزاحة أفقية ٢ وحدة فى اتجاه وس ثم إزاحة رأسية وحدة واحدة فى اتجاه وص



* مجال ر = ح ، مدى ر = [١ ، ∞[
* الدالة ر تناقصية فى]− ∞ ، ٢[وتزايدية فى]٢ ، ∞[
* الدالة ر ليست زوجية وليست فردية.

مثال ٢

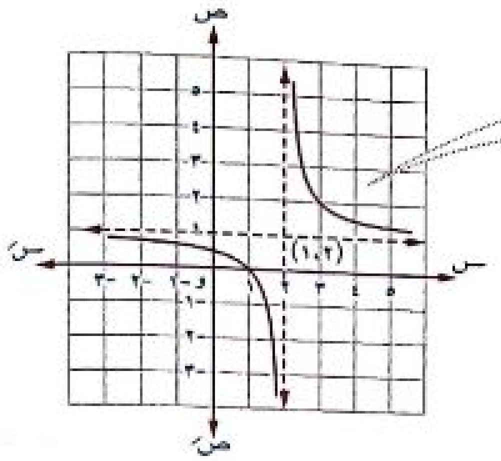
استخدم منحنى الدالة د : د (س) = $\frac{١}{س}$ لتمثيل الدوال ر ، ع ، هـ حيث :

١ ر (س) = $\frac{١}{س - ٢}$ + ١   ٢ ع (س) = $\frac{١}{س}$ + ٣   ٣ هـ (س) = $\frac{٢ س - ١}{س - ١}$

ومن الرسم حدد مجال ومدى كل دالة وابحث اطرادها.

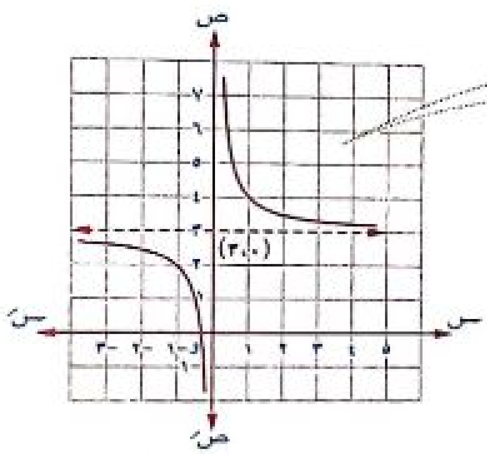
الحل

١ منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة أفقية قدرها ٢ وحدة فى اتجاه و س ثم إزاحة رأسية قدرها وحدة واحدة فى اتجاه و ص



* مجال ر = ح - {٢}   * مدى ر = ح - {١}
* الدالة تناقصية فى الفترة]- ∞ ، ٢[
وتناقصية أيضًا فى الفترة]٢ ، ∞[

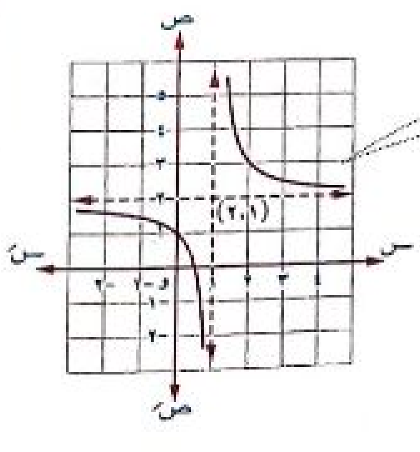
٢ منحنى الدالة ع هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة رأسية مقدارها ٣ وحدات فى اتجاه و ص



* مجال ع = ح - {٠}
* مدى ع = ح - {٣}
* الدالة تناقصية فى الفترة]- ∞ ، ٠[
وتناقصية أيضًا فى الفترة]٠ ، ∞[

٣ هـ (س) = $\frac{٢ س - ١}{س - ١}$ = $\frac{٢ س - ٢ + ١}{س - ١}$ = $\frac{٢ (س - ١) + ١}{(س - ١)}$ = ٢ + $\frac{١}{س - ١}$

منحنى الدالة هـ هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة أفقية وحدة واحدة فى اتجاه و س ثم إزاحة رأسية ٢ وحدة فى اتجاه و ص



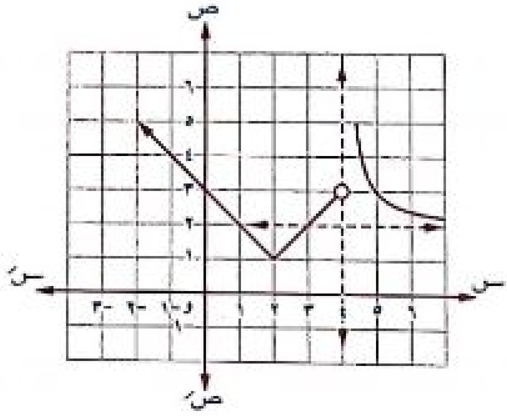
* مجال هـ = ح - {١}
* مدى هـ = ح - {٢}
* الدالة تناقصية فى]- ∞ ، ١[وتناقصية أيضًا فى]١ ، ∞[

مثال ٣

مثل بيانيًا الدالة د : د (س) = $\begin{cases} |س - ٢| + ١ & ، س < ٤ \\ \frac{١}{س - ٤} + ٢ & ، س > ٤ \end{cases}$ ومن الرسم أوجد مجال ومدى الدالة

واستنتج اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

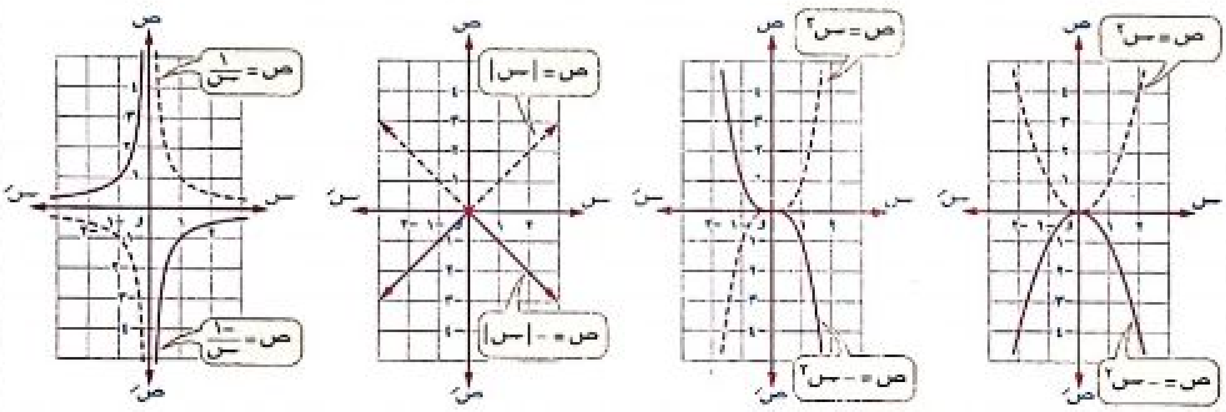
الحـــل



* المجال = ح - {٤}
* المدى =]١ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى كل من]- ∞ ، ٢[
،]٤ ، ∞[وتزايدية فى]٢ ، ٤[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.

رابعًا انعكاس منحنى الدالة فى محور السينات

لأى دالة د يكون المنحنى ص = - د (س) هو نفس المنحنى ص = د (س) بالانعكاس فى محور السينات.



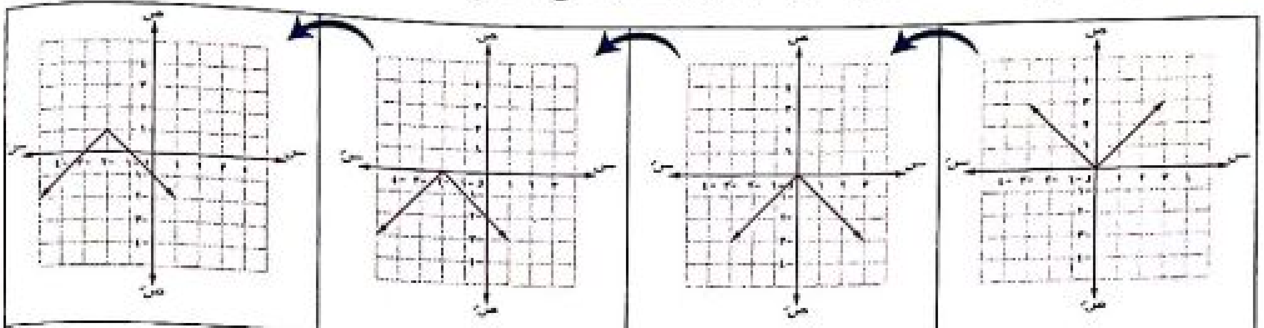
ملاحظــة هامة

من المهم ترتيب إجراء التحويلات على المنحنى ص = د (س) للحصول منه على المنحنى ص = - د (س + أ) + ب كالتالى :

[١] انعكاس فى محور السينات. [٢] إزاحة أفقية. [٣] إزاحة رأسية.

فإذا عكس الترتيب بإجراء الإزاحة الرأسية قبل إجراء الانعكاس فى محور السينات فإننا نحصل على منحنى آخر غير المنحنى المطلوب.

فمثلًا : من منحنى الدالة الأساسية ص = | س | نحصل على منحنى الدالة ص = - | س + ٢ | + ١ كالتالي :



ص = | س |	ثم ص = - | س |	ثم ص = - | س + ٢ |	ثم ص = - | س + ٢ | + ١
الدالة الأساسية	الانعكاس في محور السينات	إزاحة أفقية وحدتان يسارًا	إزاحة رأسية وحدة واحدة لأعلى

مثال ٤

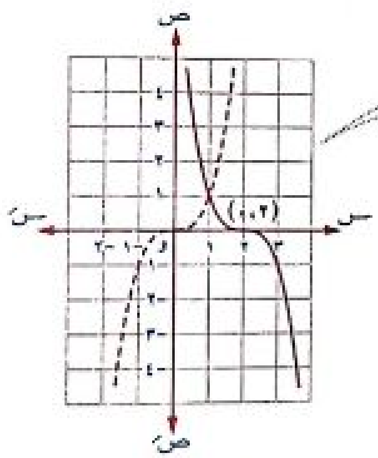
باستخدام منحنيات الدوال الأساسية ارسم منحنيات الدوال ى ، ع ، هـ حيث :

[١] ى (س) = - (س - ٢)^٣   [٢] ع (س) = $\frac{١}{س - ٢}$ + ٣   [٣] هـ (س) = ٤ س - س^٢ - ٣

ومن الرسم بين مدى كل دالة وابحث اطرادها وتماثلها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك.

الحـــل

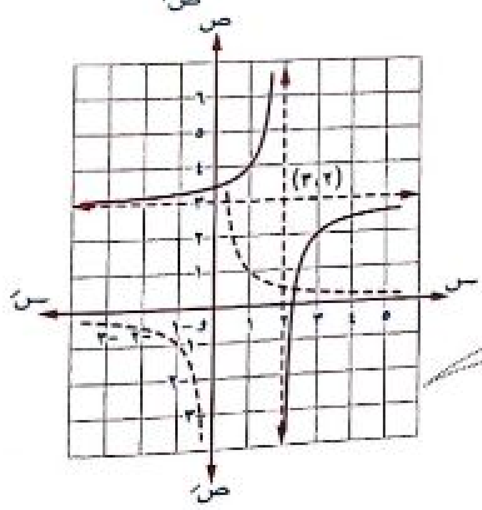
[١] منحنى الدالة ى هو نفس منحنى الدالة
د : د (س) = س^٣ بالانعكاس في محور السينات
ثم إزاحة أفقية ٢ وحدة في اتجاه و س



- مدى ى = ح
- الدالة ى تناقصية على مجالها ح
- الدالة ى متماثلة حول النقطة (٢ ، ٠)
- الدالة ى ليست زوجية وليست فردية.

[٢] ع (س) = $\frac{١}{- س + ٢}$ + ٣ = $\frac{١}{-(س - ٢)}$ + ٣

= $\frac{-١}{س - ٢}$ + ٣



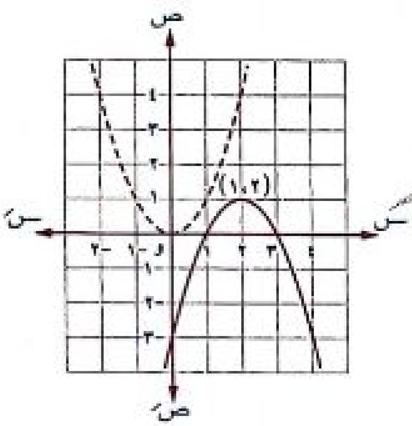
منحنى الدالة ع هو نفس منحنى الدالة
د : د (س) = $\frac{١}{س}$ بالانعكاس في محور السينات
متبوعًا بإزاحة أفقية وحدتين في اتجاه و س ثم
إزاحة رأسية ٣ وحدات في اتجاه و ص

* مدى ع = ح - {٢}
* الدالة ع تزايدية فى الفترة]- ∞ ، ٢[وتزايدية أيضًا في الفترة]٢ ، ∞[
* الدالة ع متماثلة حول النقطة (٢ ، ٣)
* الدالة ع ليست زوجية وليست فردية.

٣ ∵ هـ (س) = - س^{٢} + ٤ س - ٣ = - (س^{٢} - ٤ س + ٣)

= - (س^{٢} - ٤ س + ٤ - ١) = - [(س - ٢)^{٢} - ١]

= - (س - ٢)^{٢} + ١



منحنى الدالة هـ هو نفس منحنى الدالة د : د (س) = س^{٢} بالانعكاس في محور السينات متبوعًا بإزاحة أفقية وحدتين فى اتجاه و س ثم إزاحة رأسية وحدة واحدة فى اتجاه و ص

* مدى هـ =]- ∞ ، ١]
* الدالة هـ متزايدة فى الفترة]- ∞ ، ٢[ومتناقصة فى]٢ ، ∞[
* الدالة هـ متماثلة حول المستقيم س = ٢
* الدالة هـ ليست زوجية وليست فردية.

لاحظ أن

نقطة رأس المنحنى فى الدالة هـ هى (٢ ، ١)

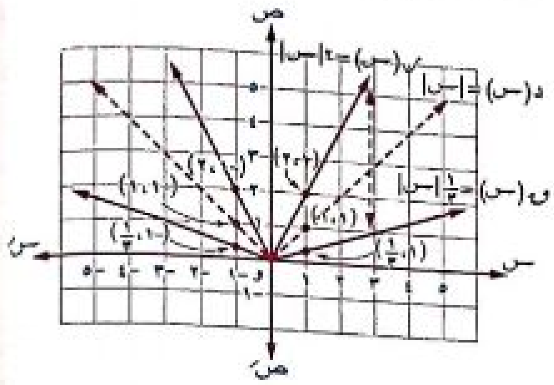
ويمكن الحصول عليها من القانون : رأس المنحنى = $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، د\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$

وذلك للدوال التى قاعدتها على الصورة : د (س) = أ س^{٢} + ب س + حـ

خامسًا تمدد منحنى الدالة

لأى دالة د يكون المنحنى ص = أ د (س) حيث أ ∈ ح$^{+}$

- تمدد رأسي للمنحنى ص = د (س) إذا كان أ > ١
- انكماش رأسى للمنحنى ص = د (س) إذا كان ٠ < أ < ١



فمثلًا : فى الشكل المقابل :

* منحنى الدالة ر : ر (س) = ٢ | س |

هو تمدد رأسى لمنحنى الدالة د : د (س) = | س |

لأن : أ > ١

أى أنه لكل (س ، ص) ∈ بيان د

يكون (س ، ٢ ص) ∈ بيان ر

* منحنى الدالة ى : ى (س) = $\frac{1}{2}$ | س | هو انكماش رأسى لمنحنى الدالة د : د (س) = | س |

لأن : ٠ < أ < ١

أى أنه لكل (س ، ص) ∈ بيان د يكون (س ، $\frac{1}{2}$ ص) ∈ بيان ى

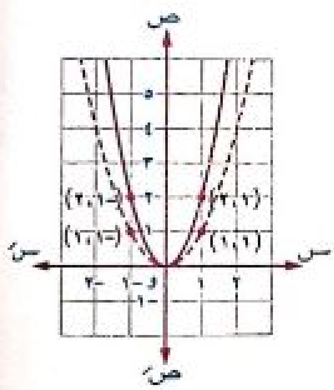
مثال ٥

استخدم منحنى الدالة د : د (س) = س٢ فى رسم كل من المنحنيات الآتية :

١ ر (س) = ٢ د (س) ٢ ى (س) = − $\frac{1}{2}$ د (س) ٣ هـ (س) = ٢ د (س − ١) − ٣

ومن الرسم عين مدى كل منها وابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك.

الحـــل



١ ر (س) = ٢ د (س) = ٢ س٢

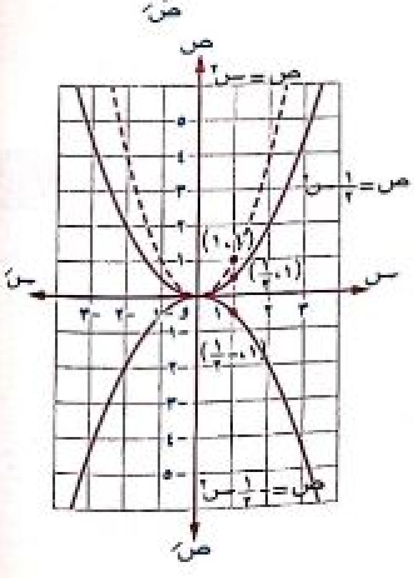
∴ منحنى الدالة ر هو تمدد رأسى لمنحنى الدالة د فيه أ = ٢ > ١

أى أنه لكل (س ، ص) ∈ بيان د يكون (س ، ٢ ص) ∈ بيان ر

* مدى ر = [٠ ، ∞[

* الدالة تناقصية فى الفترة]− ∞ ، ٠[وتزايدية فى]٠ ، ∞[

* الدالة ر زوجية.



٢ ى (س) = − $\frac{1}{2}$ د (س) = − $\frac{1}{2}$ س٢

∴ منحنى الدالة ى هو انكماش رأسى لمنحنى الدالة د فيه

أ = $\frac{1}{2}$ < ١ ثم انعكاس فى محور السينات.

أى أنه لكل (س ، ص) ∈ د يكون (س ، − $\frac{1}{2}$ ص) ∈ ى

* مدى ى =]− ∞ ، ٠]

* الدالة تزايدية فى]− ∞ ، ٠[وتناقصية فى]٠ ، ∞[

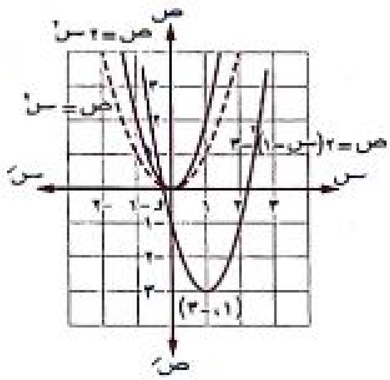
* الدالة ى زوجية.

[٣] هـ (س) = ٢ د (س − ١) − ٣ = ٢ (س − ١)^{٢} − ٣

∴ منحنى الدالة هـ هو تمدد رأسى للدالة د فيه

أ = ٢ > ١ ثم إزاحة أفقية وحدة واحدة

فى اتجاه و س يليها إزاحة رأسية ٣ وحدات فى اتجاه و ص′



* مدى هـ = [−٣ ، ∞[

* الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ١[وتزايدية فى]١ ، ∞[

* الدالة هـ ليست زوجية وليست فردية.

ملاحظتان

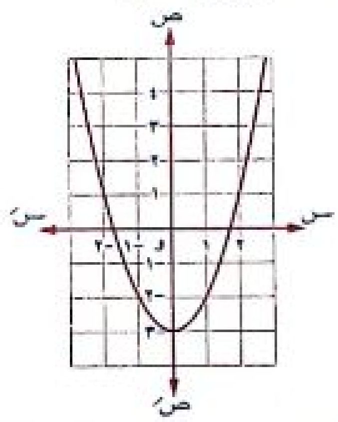
لأى دالة د كثيرة حدود :

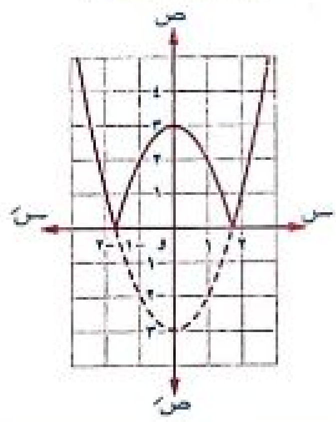
[١] المنحنى ص = | د (س) | أى ص = { د (س) ، د (س) ≥ ٠ ؛ − د (س) ، د (س) < ٠ }

يمثله بيانيًا المنحنى ص = د (س) مع استبدال الجزء من المنحنى أسفل محور السينات بصورته بالانعكاس فى محور السينات.

فمثلًا : ص = س^{٢} − ٣   ص = | س^{٢} − ٣ |

تمثل بيانيًا كالتالى :   تمثل بيانيًا كالتالى :



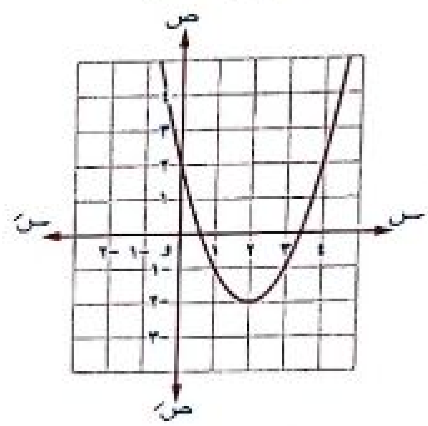


٢ المنحنى ص = − | د (س) | أى ص =
- − د (س) ، د (س) ≥ ٠
- د (س) ، د (س) < ٠

يمثله بيانيًا المنحنى ص = د (س) مع استبدال الجزء من المنحنى أعلى محور السينات بصورته بالانعكاس فى محور السينات.

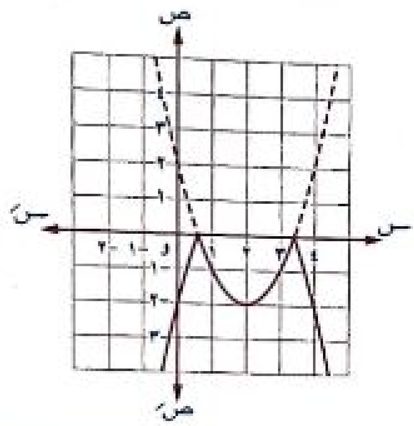
فمثلًا : ص = (س − ٢)^٢ − ٢

تمثل بيانيًا كالتالى :



ص = − | (س − ٢)^٢ − ٢ |

تمثل بيانيًا كالتالى :



مثال ٦

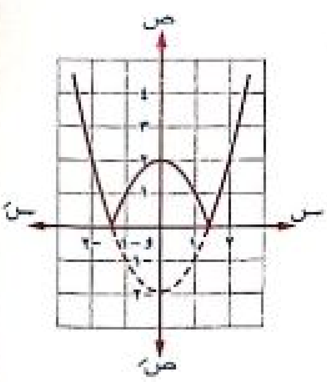
مثل بيانيًا كلًا من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم أوجد مداها وعين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك :

١ د (س) = | س^٢ − ٢ | **٢** د (س) = − | س^٣ | **٣** د (س) = | س^٣ | + ١

الحل

١ بفرض أن : ر (س) = س^٢ − ٢

منحنى الدالة د هو نفس منحنى الدالة ر مع استبدال الجزء من المنحنى أسفل محور السينات بصورته بالانعكاس فى محور السينات.



* مدى د = [٠ ، ∞[
* الدالة د زوجية.

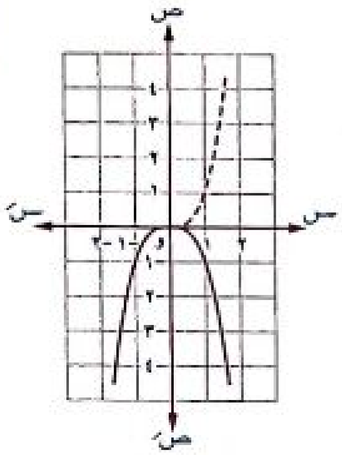
٢ بفرض أن : ر (س) = $س^{٣}$

منحنى الدالة د هو نفس منحنى الدالة ر مع استبدال

الجزء من المنحنى أعلى محور السينات بصورته بالانعكاس

فى محور السينات.

* مدى د =]− ∞ ، ٠]
* الدالة د زوجية.



٣ بفرض أن : ر (س) = $س^{٣}$

∴ د (س) = | ر (س) | + ١

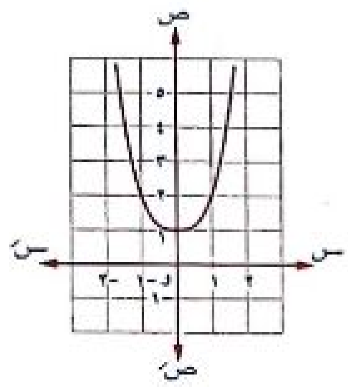
منحنى الدالة د هو نفس منحنى الدالة ر مع استبدال

الجزء من المنحنى أسفل محور السينات بصورته بالانعكاس

فى محور السينات ثم إزاحته رأسيًا فى

اتجاه و ص وحدة واحدة.

* مدى د = [١ ، ∞[
* الدالة د زوجية.



مثال ٧

مثل بيانيًا كلًا من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم أوجد مجال ومدى كل دالة وابحث اطرادها وتماثلها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

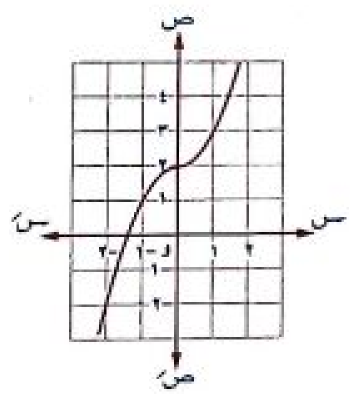
١ د (س) = س | س | + ٢   **٢** د (س) = $س^{٢}$ | س | − ٢

٣ د (س) = $\sqrt{س^{٢} - ٦ س + ٩}$

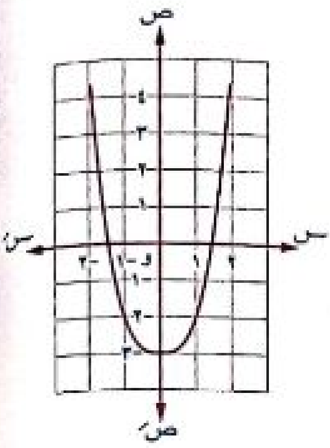
الحـــل

١ د (س) = { س (س) + ٢ ، س ≥ ٠ ؛ س (− س) + ٢ ، س < ٠ }

= { $س^{٢}$ + ٢ ، س ≥ ٠ ؛ − $س^{٢}$ + ٢ ، س < ٠ }



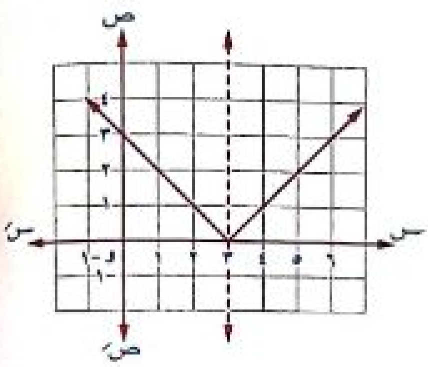
* مجال د = ح ، مدى د = ح
* الدالة تزايدية على مجالها ح
* الدالة متماثلة حول النقطة (٠ ، ٢)
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.



[٢] د (س) = $\begin{cases} س^٢ (س) - ٣ &، س \geq ٠ \\ س^٢ (-س) - ٣ &، س < ٠ \end{cases}$

$= \begin{cases} س^٢ - ٣ &، س \geq ٠ \\ -س^٢ - ٣ &، س < ٠ \end{cases}$

* مجال د = ح ، مدى د = [-٣ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]- ∞ ، ٠[وتزايدية فى]٠ ، ∞[
* الدالة متماثلة حول محور الصادات * الدالة زوجية.



[٣] د (س) = $\sqrt{(س - ٣)^٢}$

∴ د (س) = |س - ٣|

∴ الدالة د يمثلها بيانيًا المنحنى ص = | س |

بإزاحة أفقية ٣ وحدات فى اتجاه و س

* مجال د = ح ، مدى د = [٠ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]- ∞ ، ٣[

وتزايدية فى]٣ ، ∞[
* الدالة متماثلة حول المستقيم س = ٣
* الدالة ليست فردية وليست زوجية.

لاحظ أن

$\sqrt{س^٢} = |س| = \begin{cases} س &، س \geq ٠ \\ -س &، س < ٠ \end{cases}$

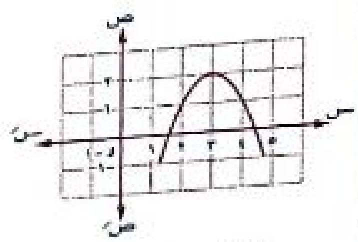
معلومة إثرائية

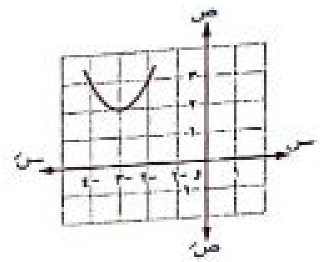
إذا كانت : د (س) دالة حقيقية فإن :

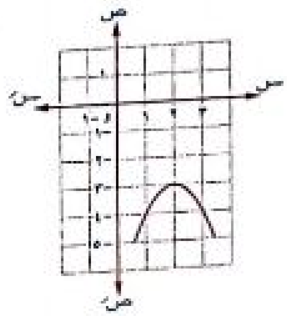
صورة منحنى الدالة د (س) بالانعكاس
- فى محور الصادات — **تكون منحنى الدالة** — ص = د (-س)
- فى محور السينات — **تكون منحنى الدالة** — ص = - د (س)
- فى نقطة الأصل — **تكون منحنى الدالة** — ص = - د (-س)

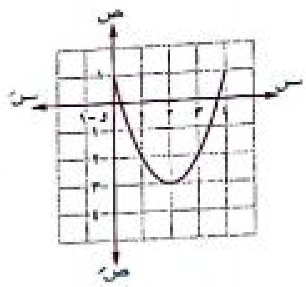
اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : د (س) = − (س − ٢)^{٢} + ٢ فإن الشكل الذى يمثل الدالة د هو ....

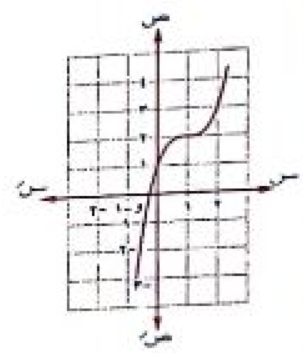

(أ)


(ب)

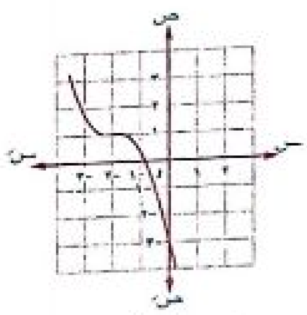

(جـ)

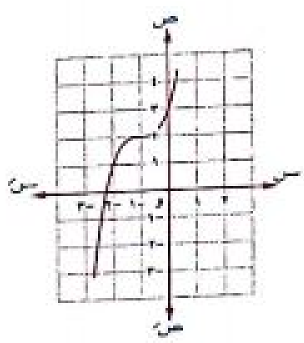

(د)

② إذا كانت : د (س) = ٢ − (س − ١)^{٣} فإن الشكل الذى يمثل الدالة د هو ....

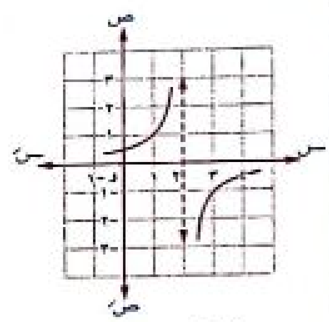

(أ)


(ب)

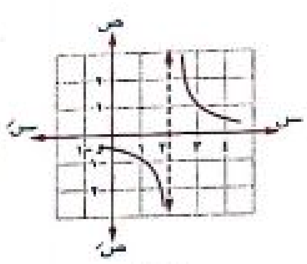

(جـ)

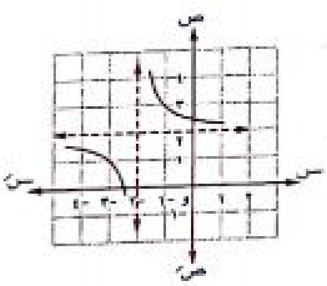

(د)

③ إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{س − ٢}$ فإن الشكل الذى يمثل الدالة د هو ....

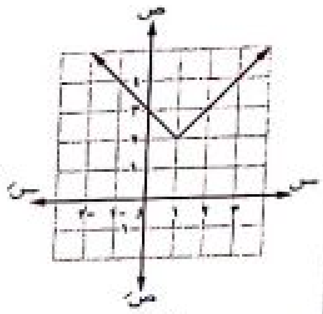

(أ)


(ب)

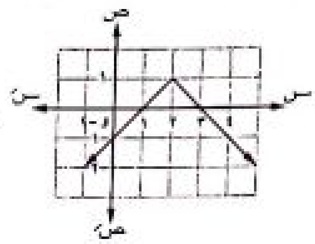

(جـ)


(د)

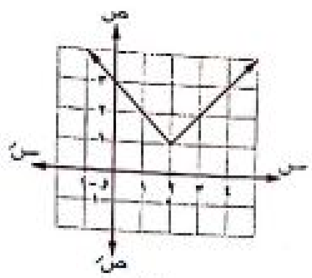
④ إذا كانت د : د (س) = ١ - | س - ٢ | فإن الشكل الذى يمثل الدالة د هو ....



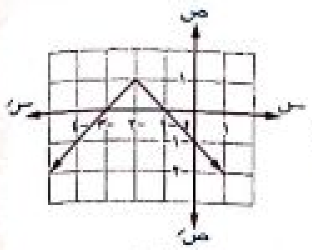
(أ)



(ب)

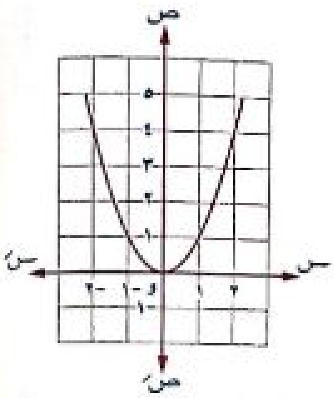


(جـ)



(د)

⑤ أُزيح منحنى الدالة فى الشكل المقابل بمقدار وحدتين موجبتين فى اتجاه كل من المحورين فإنه يمثلها الدالة د : ....



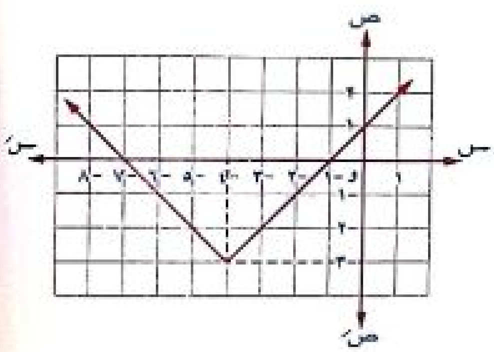
(أ) د (س) = (س + ٢)^{٢} + ٢

(ب) د (س) = (س + ٢)^{٢} - ٢

(جـ) د (س) = (س - ٢)^{٢} - ٢

(د) د (س) = (س - ٢)^{٢} + ٢

⑥ أى من قواعد الدوال الآتية تمثل المنحنى المرسوم فى الشكل المقابل ؟



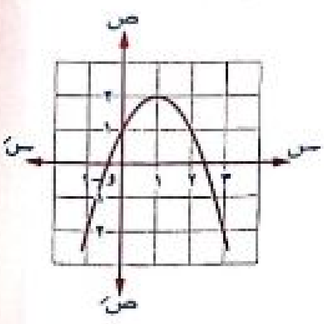
(أ) د (س) = | س - ٤ | - ٣

(ب) د (س) = | س - ٤ | + ٣

(جـ) د (س) = | س + ٤ | - ٣

(د) د (س) = | س + ٤ | + ٣

⑦ أى من قواعد الدوال الآتية تمثل المنحنى المرسوم فى الشكل المقابل ؟



(أ) د (س) = (س - ١)^{٢} + ٢

(ب) د (س) = ١ - (س - ٢)^{٢}

(جـ) د (س) = ٢ - (س - ١)^{٢}

(د) د (س) = (س + ١)^{٢} - ٢

⑧ نقطة رأس منحنى الدالة د : د (س) = (٢ - س)^{٢} + ٢ هى ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٢ ، -٣) (جـ) (-٢ ، ٣) (د) (-٢ ، -٣)

⑨ نقطة تماثل الدالة د : د (س) = س^{٢} − ٢ هي ....

(أ) (٠ ، ٢)　　(ب) (٠ ، −٢)　　(جـ) (٢ ، ٠)　　(د) (−٢ ، ٠)

⑩ نقطة تماثل منحنى الدالة د : د (س) = ٣ − (س + ٢)^{٣} هو ....

(أ) (٣ ، ٢)　　(ب) (٢ ، ٣)　　(جـ) (−٢ ، ٣)　　(د) (−٢ ، −٣)

⑪ نقطة تماثل الدالة د : د (س) = $\frac{١}{س}$ + ٢ هي ....

(أ) (٢ ، ٠)　　(ب) (١ ، ٢)　　(جـ) (٠ ، ٢)　　(د) (٠ ، ٠)

⑫ 📖 نقطة تماثل منحنى الدالة د حيث د (س) = $\frac{١}{س - ٣}$ + ٤ هي ....

(أ) (٣ ، −٤)　　(ب) (−٣ ، −٤)　　(جـ) (٣ ، ٤)　　(د) (−٣ ، ٤)

⑬ نقطة تماثل الدالة د : د (س) = $\frac{س + ١}{س}$ هي ....

(أ) (١ ، ٠)　　(ب) (٠ ، ١)　　(جـ) (٠ ، ٠)　　(د) (١ ، −١)

⑭ إذا كانت الدالة د حيث د (س) = $\frac{١}{س}$ فإن نقطة التماثل للدالة ر : ر (س) = د (س + ١) هي ....

(أ) (١ ، ٠)　　(ب) (٠ ، ١)　　(جـ) (−١ ، ٠)　　(د) (−١ ، ١)

⑮ إذا كانت د (س) = $\frac{أ}{ب - س}$ + حـ حيث أ ، ب ، حـ ∈ ح نقطة تماثلها هي (٣ ، ٣)

فإن : أ$^{ب+حـ}$ = ...

(أ) أ^{٩}　　(ب) ١　　(جـ) أ^{٦}　　(د) −١

⑯ نقطة رأس منحنى الدالة د : د (س) = |س + ٣| − ٢ هي ....

(أ) (٣ ، ٢)　　(ب) (−٣ ، −٢)　　(جـ) (−٣ ، ٢)　　(د) (٣ ، −٢)

⑰ منحنى الدالة د : د (س) = |س − ٢| متماثل حول المستقيم ....

(أ) س = ٢　　(ب) س = −٢　　(جـ) ص = ٢　　(د) ص = −٢

⑱ محور تماثل الدالة د : د (س) = س^{٢} − ١ هو المستقيم ....

(أ) س = ١　　(ب) س = ٠　　(جـ) ص = ١　　(د) ص = ٠

⑲ إذا كانت د (س) = $\frac{١}{|س|}$ فإن معادلة محور تماثل منحنى الدالة د هو ....

(أ) ص = ٠　　(ب) س = ٠　　(جـ) ص = س　　(د) ص = − س

⑳ الدالة د : د (س) = (س − ١)^{٢} + ٢ تكون متزايدة في الفترة ....

(أ) ح　　(ب)]١ ، ∞[　　(جـ)]−∞ ، ١[　　(د)]−١ ، ١[

(٢١) الدالة د حيث د (س) = $\frac{٢س - ١}{س - ١}$ تناقصية فى الفترة ....

(أ)]−∞ ، ١[(ب)]−∞ ، ١[،]١ ، ∞[
(جـ)]١ ، ∞[(د)]−∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[

(٢٢) المساحة المحصورة بين منحنى الدالة د : د (س) = |س + ٢| − ٢ ، محور السينات تساوى .... وحدة مربعة.

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) ٤

(٢٣) مدى الدالة د : د (س) = $\frac{١}{|س|}$ هو ....

(أ) ح − {٠} (ب)]٠ ، ∞[(جـ) [٠ ، ∞[(د) {٠}

(٢٤) مدى الدالة د حيث د (س) = (س − ٢)^٢ + ٤ هو ....

(أ)]−∞ ، ٣[(ب) [−٣ ، ٤] (جـ) [٤ ، ∞[(د)]−∞ ، ٤]

(٢٥) مدى الدالة د (س) = ٣ − (٢ − س)^٢ هو ....

(أ)]−∞ ، ٢] (ب) [٢ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ٣] (د) [٣ ، ∞[

(٢٦) مدى الدالة د : د (س) = $\frac{٢س^٢ - ٢س}{س - ١}$ يساوى ....

(أ) ح − {١} (ب) ح − {٢}
(جـ) ح − {١ ، ٢} (د) ح − {٠ ، ١}

(٢٧) مدى الدالة د : د (س) = ٢ − $\frac{٣}{س - ١}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {١} (جـ) ح − {٢} (د) ح − {٣}

(٢٨) مدى الدالة د : د (س) = |س − ٢| هو ....

(أ)]٠ ، ∞[(ب) [٢ ، ∞[(جـ) [٠ ، ∞[(د)]٢ ، ∞[

(٢٩) مدى الدالة د : د (س) = ٢ − |٣ − ٢س| هو ....

(أ)]−∞ ، ٢] (ب) [−٢ ، ∞[(جـ)]$\frac{٣}{٢}$ ، ∞[(د)]−∞ ، −٢]

(٣٠) مدى الدالة د حيث : د (س) = − |س^٢| هى ....

(أ) ح (ب) [٠ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ٠] (د) ح − {٠}

(٣١) مدى الدالة د : د (س) = س |س| هى ....

(أ) ح$^+$ (ب) ح$^-$ (جـ) ح (د) [٠ ، ∞[

(٣٢) مدى الدالة د : د (س) = $\frac{|س|}{س}$ هو ....

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]−∞ ، ٠] (جـ) ح − {٠} (د) {١ ، −١}

(٣٣) مدى الدالة د : د (س) = $\begin{cases} -\frac{١}{س} & ، س < -١ \\ |س| & ، -١ \leq س \leq ١ \\ \frac{١}{س} & ، س > ١ \end{cases}$ هو ....

(أ)]٠ ، ١[(ب) [٠ ، ١] (جـ)]٠ ، ∞[(د) ح - {٠}

(٣٤) مدى الدالة د : د (س) = $\begin{cases} س - ١ & ، س < ١ \\ ٢ & ، س > ١ \end{cases}$ هو ....

(أ) ح - [٠ ، ١] (ب) ح - {١}

(جـ)]-∞ ، ٠[∪ {٢} (د)]-∞ ، ٠[∩ {٢}

(٣٥) منحنى الدالة د : د (س) = $\frac{١}{س - ٣}$ + ٤ لا يقطع الخط المستقيم الذى معادلته ....

(أ) س = - ٣ (ب) س = ٣ (جـ) ص = -٤ (د) ص = ٣

(٣٦) إذا كان المنحنى ص = د (س) يمثل دالة حقيقية فإن صورته بإزاحة قدرها ٣ وحدات رأسيًا لأعلى هو المنحنى ر (س) = ...

(أ) د (س - ٣) (ب) د (س + ٣) (جـ) د (س) + ٣ (د) د (س) - ٣

(٣٧) إذا كان المنحنى ص = د (س) يمثل دالة حقيقية فإن صورته بإزاحة قدرها ٥ وحدات رأسيا لأسفل هو المنحنى ر (س) = ...

(أ) د (س - ٥) (ب) د (س + ٥) (جـ) د (س) + ٥ (د) د (س) - ٥

(٣٨) منحنى ر (س) = $س^٢$ + ٤ هو نفس منحنى د (س) = $س^٢$ بإزاحة مقدارها ٤ وحدات فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{و س}$ (ب) $\overrightarrow{و س}$ (جـ) $\overleftarrow{و ص}$ (د) $\overrightarrow{و ص}$

(٣٩) منحنى الدالة ر حيث : ر (س) = |س| - ٢ هو نفس منحنى الدالة د : د (س) = |س| بإزاحة مقدارها وحدتان فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{و س}$ (ب) $\overrightarrow{و س}$ (جـ) $\overleftarrow{و ص}$ (د) $\overrightarrow{و ص}$

(٤٠) إذا كانت : د دالة حقيقية مجالها [-٣ ، ٤] فإن مجال الدالة ر : ر (س) = د (س) + ٢ هو ....

(أ) [-٣ ، ٤] (ب) [-١ ، ٦] (جـ) [-٥ ، ٢] (د) ح

(٤١) منحنى الدالة ر : ر (س) = $\frac{١}{|س|}$ + ٢ هو نفس منحنى الدالة د : د (س) = $\frac{١}{|س|}$ بإزاحة مقدارها وحدتين فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{و س}$ (ب) $\overrightarrow{و س}$ (جـ) $\overleftarrow{و ص}$ (د) $\overrightarrow{و ص}$

(٤٢) منحنى ى (س) = |س + ٣| هو نفس منحنى د (س) = |س| بإزاحة مقدارها ٣ وحدات في اتجاه ....

(أ) $\overrightarrow{\text{و س}}$ (ب) $\overleftarrow{\text{و س}}$ (جـ) $\overrightarrow{\text{و ص}}$ (د) $\overleftarrow{\text{و ص}}$

(٤٣) إذا كانت : ص = د (س) دالة حقيقية فإن صورتها بإزاحة قدرها ٤ وحدات جهة اليسار هي ى (س) = ...

(أ) د (س − ٤) (ب) د (س + ٤) (جـ) د (س) + ٤ (د) د (س) − ٤

(٤٤) إذا كانت : د دالة حقيقية مجالها [−٢ ، ٣] فإن مجال الدالة ى : ى (س) = د (س − ٢) هو ....

(أ) [−٢ ، ٣] (ب) [−٤ ، ١] (جـ) [٠ ، ٥] (د) ح

(٤٥) بفرض أن د (س) = − س^{٢} ينتقل ٣ وحدات لليمين ووحدتان لأسفل وكان المنحنى الناتج هو ى (س) فإن : ى (٤) = ...

(أ) −٣ (ب) −١٦ (جـ) ١٦ (د) −٧

(٤٦) نفرض أن المنحنى : د (س) = − س^{٢} ينتقل ٤ وحدات لليسار ووحدتان لأعلى وكان المنحنى الناتج هو ى (س) فإن : ى (−٢) = ...

(أ) −٢١٨ (ب) ٢١٤ (جـ) ٦ (د) −٦

(٤٧) منحنى الدالة ى : ى (س) = س هو نفس منحنى الدالة د : د (س) = ... بالانعكاس على محور السينات.

(أ) س (ب) − س (جـ) س + ١ (د) − س + ١

(٤٨) المستقيمان د (س) = أ س + ب وصورته بالانعكاس فى محور السينات يكون حاصل ضرب ميليهما = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) أ (د) − أ^{٢}

(٤٩) المنحنى ى (س) = ١ − |س| هو نفس المنحنى د (س) = |س| بالانعكاس فى محور السينات ثم إزاحة مقدارها وحدة واحدة فى اتجاه ....

(أ) $\overrightarrow{\text{و س}}$ (ب) $\overleftarrow{\text{و س}}$ (جـ) $\overrightarrow{\text{و ص}}$ (د) $\overleftarrow{\text{و ص}}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ استخدم منحنى الدالة د حيث د (س) = س^{٢} لتمثيل كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم أوجد مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك واكتب معادلة محور تماثلها :

(١) ى (س) = س^{٢} − ٣
(٢) ى (س) = ٢ − س^{٢}
(٣) ى (س) = − (س − ٣)^{٢}
(٤) ى (س) = (س + ٢)^{٢} − ٤
(٥) ى (س) = (س + $\frac{٣}{٢}$)^{٢} − $\frac{١}{٢}$
(٦) ى (س) = $\frac{-١}{٢}$ س^{٢}
(٧) ى (س) = س^{٢} + ٤ س + ٤
(٨) ى (س) = س^{٢} + ٤ س + ١

٢ استخدم منحنى الدالة د حيث د (س) = س^{٣} لتمثيل كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم عين مجالها ومداها وابحث اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك واكتب نقطة تماثلها :

① ر (س) = س^{٢} + ٤
② ر (س) = (س − ٣)^{٢}
③ ر (س) = (٢ − س)^{٢}
④ ر (س) = ٢ − (س − ١)^{٢}
⑤ ر (س) = (٣ − س)^{٢} + ١
⑥ ر (س) = ٢ س^{٣} − ١

٣ استخدم منحنى الدالة د حيث د (س) = | س | لتمثيل كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم عين مجالها ومداها وابحث اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك و اكتب معادلة محور تماثلها :

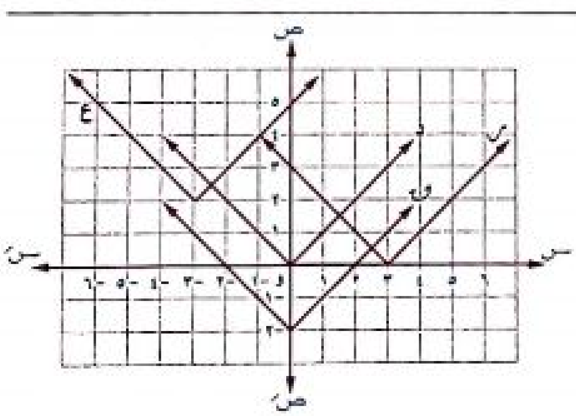
① ر (س) = | س | − ٢
② ر (س) = ٢ − | س |
③ ر (س) = − | س + ٥ |
④ ر (س) = | ٢ − س | + ١
⑤ ر (س) = ٤ − | س − ٢ |
⑥ ر (س) = ٢ | س |
⑦ ر (س) = ٢ | س − ٧ | + ٢
⑧ ر (س) = ٥ − ٢ | س + ٢ |
⑨ ر (س) = ١ − | $\frac{١}{٢}$ س − ١ |
⑩ ر (س) = ٢ $\sqrt{\text{س}^{٢} - ٨\,\text{س} + ١٦}$

٤ استخدم منحنى الدالة د حيث د (س) = $\frac{١}{\text{س}}$ لتمثيل كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم عين مجالها ومداها وابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك واكتب نقطة تماثلها :

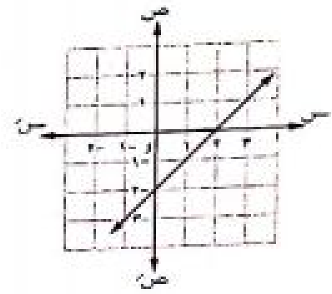
① ر (س) = $\frac{١}{\text{س}}$ + ٢
② ر (س) = $\frac{-١}{\text{س} + ٢}$
③ ر (س) = $\frac{١}{\text{س} - ٢}$ + ٣
④ ر (س) = $\frac{١}{\text{س} - ٤}$ − ٣
⑤ ر (س) = $\frac{\text{س} - ٣}{\text{س} - ٢}$
⑥ ر (س) = $\frac{٢\,\text{س}}{\text{س} + ١}$
⑦ ر (س) = $\frac{٣\,\text{س} - ٥}{\text{س} - ٢}$
⑧ ر (س) = $\frac{\text{س} - ١}{\text{س}^{٢} - ١}$

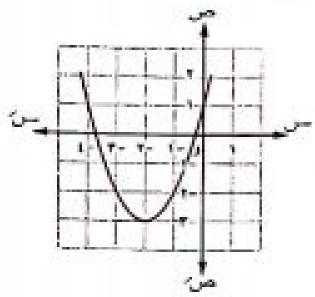
٥ رُسم منحنى الدالة د حيث د (س) = | س | ثم أُزيح فى اتجاه محورى الإحداثيات كما فى الشكل المقابل.

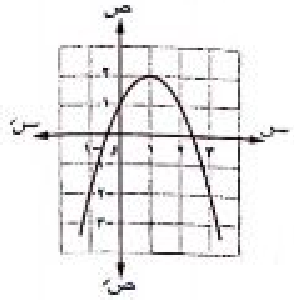
اكتب قاعدة لكل من الدوال الآتية : ر ، ك ، ع

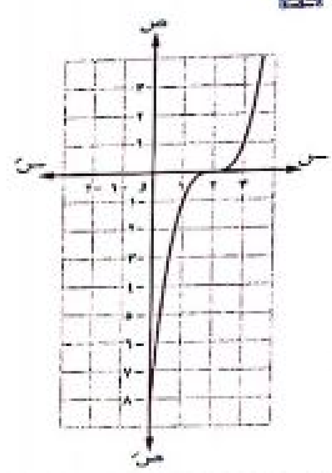


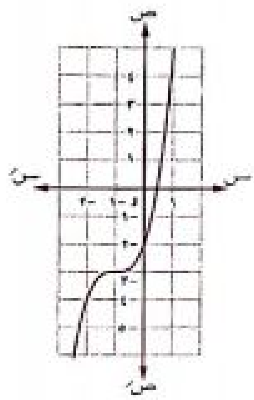
٦ اكتب قاعدة الدالة د الممثلة بيانيًا بكل من الأشكال الآتية :

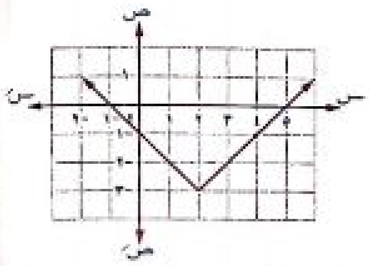
①


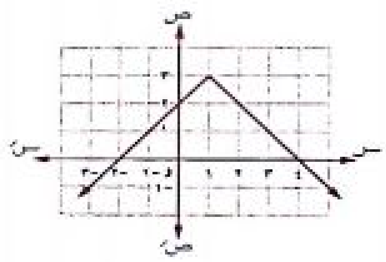
②


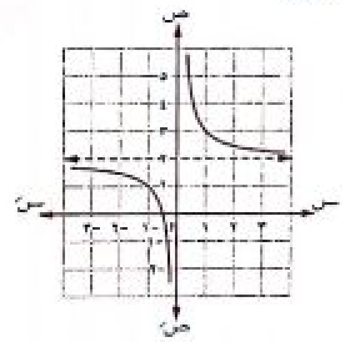
③


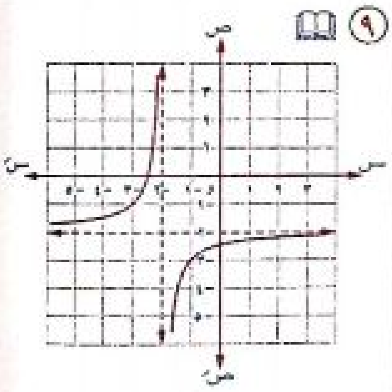
④


⑤


⑥


⑦


⑧


⑨


٧ إذا كانت د ، ر ، ع ، ه دوال حقيقية حيث د (س) = $س^2$ ، ر (س) = $س^3$
، ع (س) = | س | ، ه (س) = $\frac{1}{س}$ فمثل كلًا من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية موضحًا مجالها ومداها :

① $د_1$ (س) = د (س + ١)

② $د_2$ (س) = د (س) − ١

③ $د_3$ (س) = ٢ − د (س − ١)

④ $ر_1$ (س) = ر (س − ١)

⑤ $ر_2$ (س) = ر (س) − $\frac{1}{2}$

⑥ $ر_3$ (س) = ر (س − ١) + ٢

⑦ ع (س) = ٢ ق (س)　　　　⑧ ع (س) = $\frac{1}{2}$ ق (س) − ٣

⑨ ع (س) = ٢ ق (س − ١)　　　　⑩ ع (س) = ر (س − ٢)

⑪ ع (س) = ر (س) − ١　　　　⑫ ع (س) = ٢ − ر (س + ١)

٨ ارسم منحنى الدالة د في كل مما يأتي وعين مداها وابحث اطرادها :

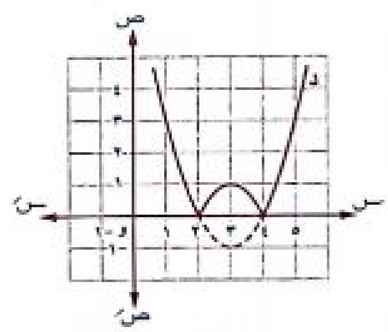
① د (س) = { س² + ١ ، س > ٠ ؛ − س² − ١ ، س < ٠ }

② د (س) = { س² + ١ ، −٤ ≤ س < ٠ ؛ − س² − ١ ، ٠ ≤ س ≤ ٤ }

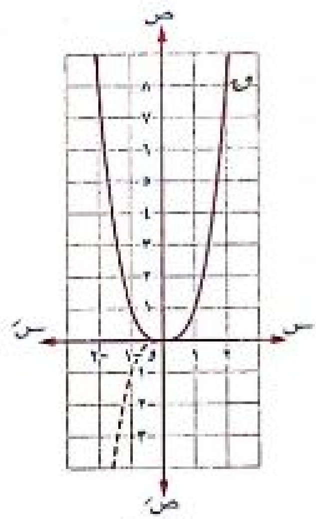
③ د (س) = { (س − ١)² ، س ≥ ٠ ؛ −١ ، س < ٠ }

④ د (س) = { (س + ١)² + ٢ ، س ≤ −١ ؛ $\frac{1}{س + 1}$ + ١ ، س > −١ }

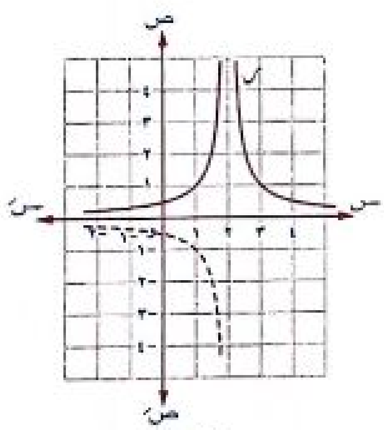
٩ تبين الأشكال التالية منحنيات الدوال د ، ق ، ر على الترتيب. اكتب قاعدة الدالة في كل شكل :



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

١٠ إذا كانت : د (س) = $\frac{1}{س}$ فارسم الشكل البياني للدالة ر في كل من الحالات الآتية :

① ر (س) = | د (س) |　　　　② ر (س) = − | د (س) |

③ ر (س) = ٢ + | د (س) |　　　　④ ر (س) = | د (س − ٢) |

⑤ ر (س) = | د (س + ١) | − ٢

١١ ارسم منحنى الدالة د فى كل مما يأتى :

① د (س) = س | س |
② د (س) = س | س | − ١
③ د (س) = | $س^٣$ |
④ د (س) = − | $س^٣$ |
⑤ د (س) = $\frac{س^٤}{|س|}$
⑥ د (س) = | $س^٣$ | + ٢
⑦ د (س) = $س^٢$ | س | + ٢
⑧ د (س) = $\frac{س^٢}{|س|}$ − ٣
⑨ د (س) = (س − ٢) | س |

١٢ ارسم منحنى الدالة د وحدد مداها وابحث اطرادها إذا كانت :

① د (س) = | ٤ − $س^٢$ |
② د (س) = | $س^٢$ − ٢ س − ٣ | ، س ∈ [−١ ، ٤]

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت د دالة كثيرة حدود وكانت د (س) = ٠ عندما س ∈ {−٣ ، ١ ، ٠}
فإن المنحنى ر (س) = د (س − ٣) يقطع محور السينات عندما س ∈ ....

(أ) {−٣ ، ١ ، ٠} (ب) {٣ ، ٠ ، −٢} (جـ) {٠ ، ٣ ، ٤} (د) {−٦ ، ٢ ، ٠}

② إذا كانت د : د (س) = $(س − أ + ١)^٢$ + ب − ٢ دالة تربيعية مداها = [١ ، ∞[، ومنحنى د يمر بالنقطة (٢ ، ٢) فإن : أ = ...

(أ) ± ٤ (ب) ٣ أ، ٥ (جـ) ٣ أ، −٥ (د) −٣ أ، ٥

③ إذا كانت : ر (س) تناقصية فى]−∞ ، ٠[، وتزايدية فى]٠ ، ∞[
فإن : د (س) = ر (س + ١) تكون متزايدة فى ....

(أ)]−١ ، ∞[(ب)]−∞ ، −١[(جـ)]٠ ، ∞[(د)]−∞ ، ٠[

④ المنحنى : ص = ٣ $(س − ٥)^٢$ + ٧ تحت تأثير انتقال ٣ وحدات فى الاتجاه الموجب للمحور السينى ووحدة فى الاتجاه السالب للمحور الصادى هو ....

(أ) ص = ٣ $(س + ٨)^٢$ + ٦
(ب) ص = ٣ $(س − ٨)^٢$ − ٦
(جـ) ص = ٣ $(س − ٨)^٢$ + ٦
(د) ص = ٣ $(س + ٨)^٢$ − ٦

⑤ إذا كانت : د (س) = | س | + ٢ فإن مدى الدالة (د ∘ د) = ...

(أ)]−∞ ، ٤]　　(ب) [٤ ، ∞[　　(جـ) [−٤ ، ٤]　　(د) [٠ ، ٤]

⑥ إذا كانت : ر (س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٢} − ٨ ، د (س) = | س | فإن مدى الدالة (د ∘ ر) = ...

(أ) [−٨ ، ∞[　　(ب) [٠ ، ∞[　　(جـ) [٨ ، ∞[　　(د) ح

⑦ إذا كانت : د دالة فردية فإن : | د (س) | تكون ....

(أ) فردية.　　(ب) زوجية.

(جـ) زوجية وفردية معًا.　　(د) ليست زوجية وليست فردية.

⑧ إذا كانت د : د (س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٢ & ، س > ٠ \\ ر (س) & ، س < ٠ \end{cases}$ متماثلة حول نقطة الأصل فإن : ر ....

(أ) تناقصية.　　(ب) تزايدية.　　(جـ) ليست أحادية.　　(د) زوجية.

⑨ إذا كانت د : د (س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٢ & ، س \geq ٠ \\ ر (س) & ، س < ٠ \end{cases}$ متماثلة حول محور الصادات

فإن : ر (س) = ...

(أ) س^{٢} − ٢　　(ب) س^{٢} + ٢　　(جـ) − س^{٢} + ٢　　(د) − س^{٢} − ٢

---

٢ ارسم منحنى الدالة د فى كل مما يأتى ومن الرسم حدد المجال والمدى وابحث الاطراد وبيّن هل الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك :

① د (س) = س^{٣} + س^{٢} | س | + ٢

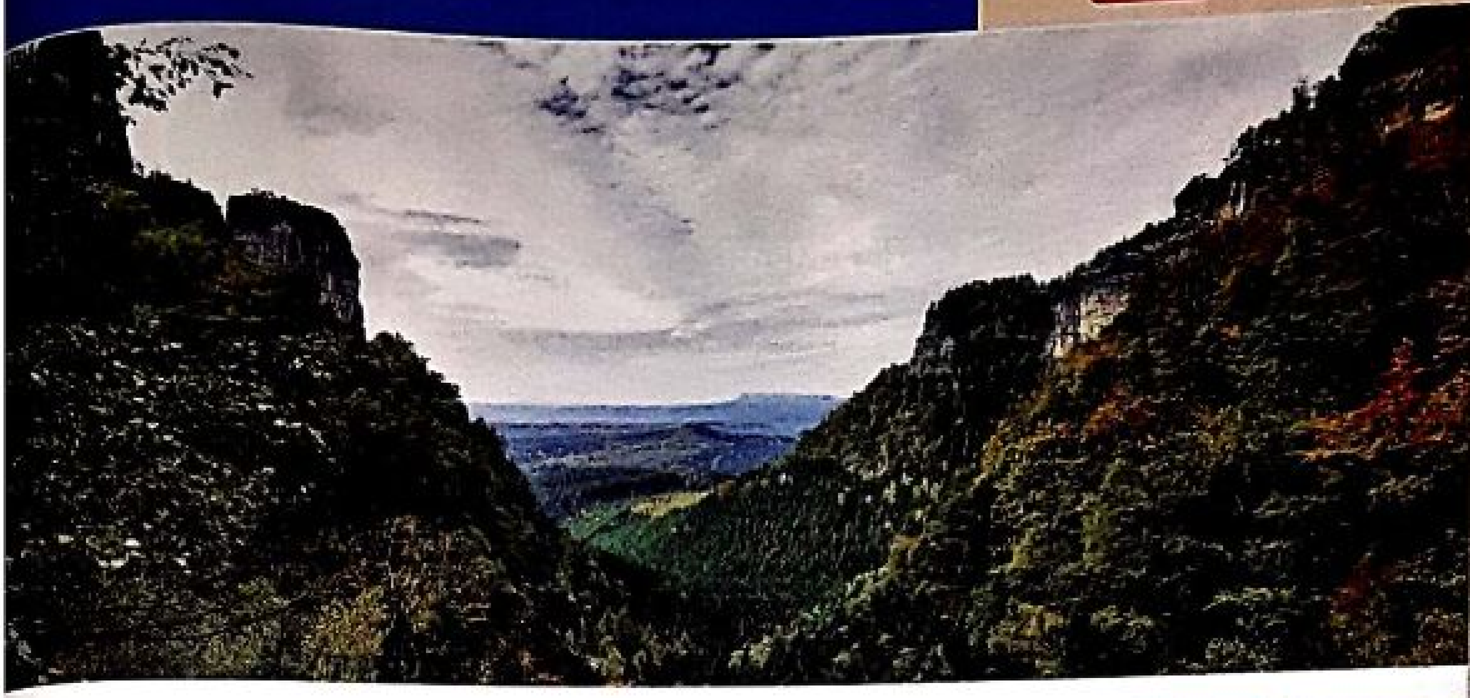
② د (س) = (| س | − ١)^{٢}

③ د (س) = $\frac{| س + ١ |}{س^{٢} + ٣ س + ٢}$

④ د (س) = $\begin{cases} | س + ٢ | & ، س \leq −١ \\ ١ & ، −١ < س < ١ \\ | س − ٢ | & ، س \geq ١ \end{cases}$

⑤ د (س) = | س + ١ | − | س − ١ |

الدرس 6 حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة



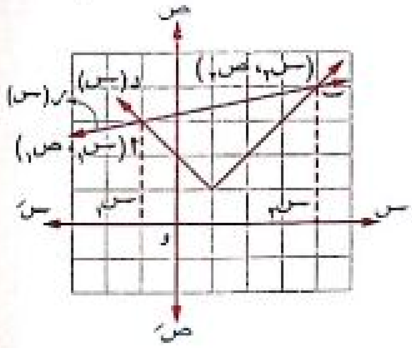
أولاً حـل معادلات القيمة المطلقة

توجد طريقتان لحل معادلات القيمة المطلقة (المقياس).

١ الطريقة البيانية :

وفيها نستخدم التمثيل البياني للدوال الحقيقية في حل المعادلات مع ملاحظة أنه : لأى دالتين د ، ر تكون مجموعة حل المعادلة : د (س) = ر (س) هى مجموعة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنيى الدالتين د ، ر

ففى الشكل المقابل :



إذا كان منحنيا الدالتين د ، ر يتقاطعان فى النقطتين

$\text{أ}(\text{س}_1 ، \text{ص}_1) ، \text{ب}(\text{س}_2 ، \text{ص}_2)$

فإن مجموعة حل المعادلة :

د (س) = ر (س) فى ح هى $\{\text{س}_1 ، \text{س}_2\}$

٢ الطريقة الجبرية :

وفيها نستخدم تعريف المقياس وبعض خواص مقياس العدد الحقيقى فى حل المعادلات كما يلى.

تعريف المقياس

إذا كانت : س $\in$ ح ، أ ، ب عددين حقيقيين فإن : $|\text{س}| = \begin{cases} \text{س} & ، \text{س} \geq 0 \\ -\text{س} & ، \text{س} < 0 \end{cases}$

ومنها $|\text{س} + \text{أ}| = \begin{cases} \text{س} + \text{أ} & ، \text{س} \geq -\text{أ} \\ -\text{س} - \text{أ} & ، \text{س} < -\text{أ} \end{cases}$ ، $|\text{أس} + \text{ب}| = \begin{cases} \text{أس} + \text{ب} & ، \text{س} \geq -\frac{\text{ب}}{\text{أ}} \\ -\text{أس} - \text{ب} & ، \text{س} < -\frac{\text{ب}}{\text{أ}} \end{cases}$

خواص مقياس العدد الحقيقى

(١) $|أ| \geq ٠$ (٢) $|أب| = |أ| \times |ب|$

(٣) $|أ + ب| \leq |أ| + |ب|$

أى أن مقياس مجموع عددين أصغر من أو يساوى مجموع مقياسيهما ويحدث التساوى إذا كان أ ، ب سالبين معًا أو موجبين معًا أو كليهما يساوى الصفر

فمثلًا : $|٤ + (-٧)| < |٤| + |-٧|$ ، $|-٤ + (-٧)| = |-٤| + |-٧|$

ملاحظات

(١) لأى عدد حقيقى أ يكون $|أ| = |-أ|$ **فمثلًا :** $|٣| = |-٣|$

(٢) $|أ - س| = |س - أ|$ **فمثلًا :** $|٢ - س| = |س - ٢|$

(٣) $|س| = ج ، ج > ٠ \Leftrightarrow س = \pm ج$

فمثلًا : إذا كان : $|س| = ٣$ فإن : $س = \pm ٣$

وإذا كان : $أ = \pm ٥$ فإن : $|أ| = ٥$

(٤) إذا كان : أ ، ب عددين حقيقيين فإن : $|أ| = |ب| \Leftrightarrow أ = \pm ب$

(٥) لأى عدد حقيقى أ يكون $(|أ|)^٢ = أ^٢$ **فمثلًا :** $(|-٢|)^٢ = ٤$ ، $(|-\frac{١}{٢}|)^٢ = \frac{١}{٤}$

(٦) لأى عدد حقيقى أ يكون $\sqrt{أ^٢} = |أ|$ **فمثلًا :** $\sqrt{(٥)^٢} = |٥| = ٥$ ، $\sqrt{(-٣)^٢} = |-٣| = ٣$

(٧) إذا كان : $|س| = س$ فإن : $س \in [٠ ، \infty[$

(٨) إذا كان : $|س| = -س$ فإن : $س \in]-\infty ، ٠]$

١ حل المعادلة على الصورة : $|أس + ب| = ج ، ج \in [٠ ، \infty[$

«أى مقياس مقدار من الدرجة الأولى = عدد حقيقى غير سالب»

الحـل البيانـى

الاحداثيات السينية لنقط تقاطع المنحنيين

د $(س) = |أس + ب|$

، ر $(س) = ج$

الحـل الجبـرى

(١) باستخدام تعريف المقياس.

(٢) ما بداخل المقياس = ± العدد الحقيقى

ملاحظـة

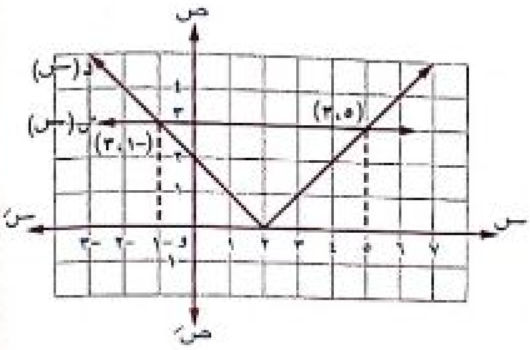
إذا كان | أ س + ب | = حـ ، حـ ∈]- ∞ ، ٠[فإن مجموعة الحل فى ح = ∅

فمثلًا : مجموعة حل المعادلة : | ٢ س - ٤ | = -٥ فى ح هى ∅

مثال ١

أوجد بيانيًا ثم جبريًا مجموعة حل المعادلة : | س - ٢ | = ٣

الحـــل



الحل البيانى : بوضع د (س) = | س - ٢ | ، ر (س) = ٣

- نرسم منحنى الدالة

د : د (س) = | س - ٢ |

وهو نفس المنحنى ص = | س |

بإزاحة أفقية وحدتين فى اتجاه و س

- نرسم منحنى الدالة ر : ر (س) = ٣

وهى دالة ثابتة يمثلها بيانيًا خط مستقيم يوازى محور السينات ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ٣)

- نوجد نقطتى تقاطع المنحنيين وهما (-١ ، ٣) ، (٥ ، ٣)

∴ مجموعة الحل فى ح = {-١ ، ٥}

الحل الجبرى : أولًا : باستخدام تعريف دالة المقياس :

د (س) = | س - ٢ | = { س - ٢ ، س - ٢ ≥ ٠ ؛ - س + ٢ ، س - ٢ < ٠ } ∴ د (س) = { س - ٢ ، س ≥ ٢ ؛ - س + ٢ ، س < ٢ }

عندما س ≥ ٢ : س - ٢ = ٣ ومنها س = ٥ ∈ [٢ ، ∞[

عندما س < ٢ : - س + ٢ = ٣ ومنها س = -١ ∈]- ∞ ، ٢[

∴ مجموعة الحل فى ح = {-١ ، ٥}

ثانيًا : باستخدام الخاصية «ما بداخل المقياس = ± العدد الحقيقى»

∵ | س - ٢ | = ٣ ∴ س - ٢ = ± ٣

∴ س - ٢ = ٣ ومنها س = ٥ أ، س - ٢ = -٣ ومنها س = -١

∴ مجموعة الحل = {٥ ، -١}

٢ حل المعادلة على الصورة : | أ س + ب | = | جـ س + ء |

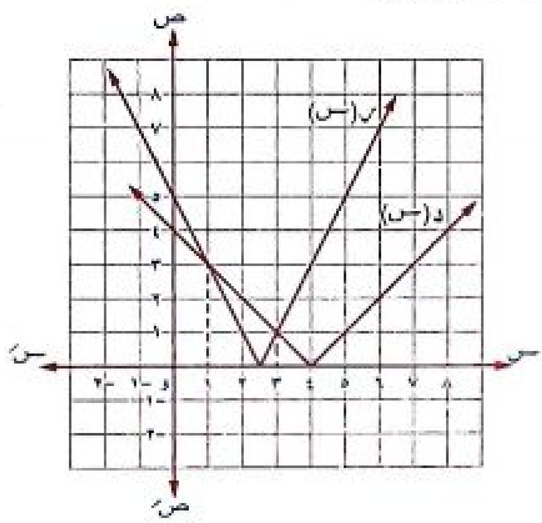
«أى أن : مقياس مقدار من الدرجة الأولى فى س = مقياس مقدار آخر من الدرجة الأولى فى س»

الحل البيانى	الحل الجبرى
الإحداثيات السينية لنقط تقاطع المنحنيين د (س) = | أ س + ب | ، ر (س) = | جـ س + ء |	① أحد المقدارين = ± المقدار الآخر. ② بتربيع طرفى المعادلة.

مثال ٢

أوجد بيانيًا ثم جبريًا مجموعة حل المعادلة : | س − ٤ | = | ٢ س − ٥ | فى ح

الحل



بوضع د (س) = | س − ٤ |

، ر (س) = | ٢ س − ٥ | = ٢ | س − $\frac{1}{2}$٢ |

الحل البيانى : الدالة د يمثلها بيانيًا المنحنى : ص = | س |

بإزاحة أفقية ٤ وحدات فى اتجاه و س

، الدالة ر يمثلها بيانيًا المنحنى : ص = ٢ | س |

بإزاحة أفقية $\frac{1}{2}$٢ وحدة فى اتجاه و س

، ∵ المنحنيين يتقاطعان فى النقطتين (١ ، ٣) ، (٣ ، ١)

∴ مجموعة الحل = {١ ، ٣}

الحل الجبرى : أولاً : باستخدام الخاصية : أحد المقدارين = ± المقدار الآخر

∵ | س − ٤ | = | ٢ س − ٥ | ∴ س − ٤ = ± (٢ س − ٥) (من خواص المقياس)

∴ س − ٤ = ٢ س − ٥ ومنها س = ١

أ، س − ٤ = −٢ س + ٥ ∴ ٣ س = ٩ ومنها س = ٣

∴ مجموعة الحل = {١ ، ٣}

ثانيًا : بتربيع طرفى المعادلة :

∵ (س − ٤)^{2} = (٢ س − ٥)^{2} ∴ س^{2} − ٨ س + ١٦ = ٤ س^{2} − ٢٠ س + ٢٥

∴ ٣ س^{2} − ١٢ س + ٩ = ٠ ∴ س^{2} − ٤ س + ٣ = ٠

∴ (س − ٣) (س − ١) = ٠ ∴ س = ٣ أ، س = ١

∴ مجموعة الحل = {٣ ، ١}

٣ حل المعادلة على الصورة : | أ س + ب | = جـ س + ء

«أى أن : مقياس مقدار من الدرجة الأولى فى س = مقدار من الدرجة الأولى فى س»

الحـل البيانـى

الإحداثيات السينية لنقط تقاطع المنحنيين

د (س) = | أ س + ب |

، ر (س) = جـ س + ء

الحـل الجبـرى

نستخدم إعادة تعريف المقياس فنحصل على المعادلتين

أ س + ب = جـ س + ء عند س $\geq \frac{-ب}{أ}$

، − أ س − ب = جـ س + ء عند س $< \frac{-ب}{أ}$

مثال ٣

أوجد بيانيًا ثم جبريًا مجموعة الحل فى ح لكل من المعادلات الآتية :

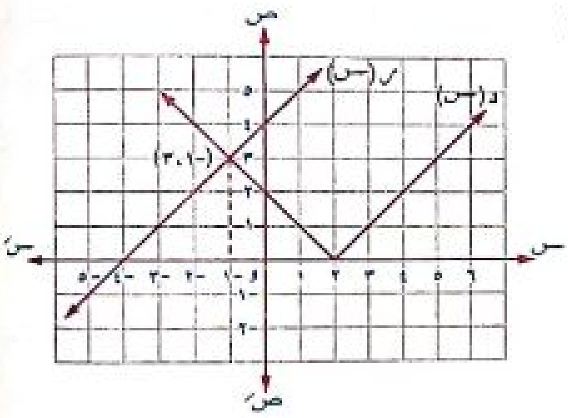
١ | س − ٢ | = س + ٤

٢ | س + ٣ | − $\frac{١}{٢}$ س = ٣

٣ | س − ٣ | = ٣ − س

الحـل

١ بوضع د (س) = | س − ٢ | ، ر (س) = س + ٤



الحل البيانى :

∵ الدالة د يمثلها بيانيًا المنحنى ص = | س |

بإزاحة أفقية وحدتين فى اتجاه و س

، الدالة ر يمثلها بيانيًا المنحنى

ص = س بإزاحة رأسية

٤ وحدات فى اتجاه و ص

∴ المنحنيان يتقاطعان فى نقطة واحدة (−١ ، ٣)

∴ مجموعة الحل = {−١}

الحل الجبرى : د (س) = | س − ٢ | = { س − ٢ ، س ≥ ٢ ؛ − س + ٢ ، س < ٢ }

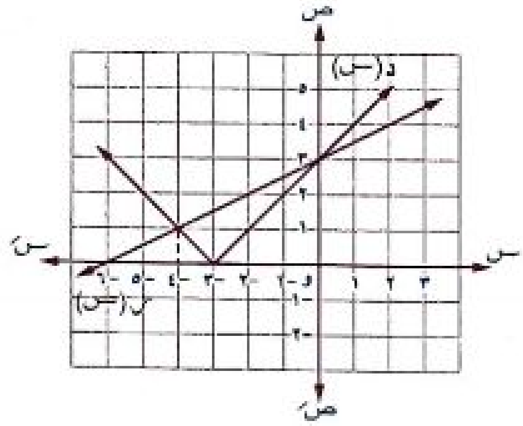
• عندما س ≥ ٢ : س − ٢ = س + ٤ ومنها −٢ = ٤ (غير ممكن) ∴ لا يوجد حل

• عندما س < ٢ : − س + ٢ = س + ٤ ومنها س = −١ ∈]− ∞ ، ٢[

∴ مجموعة الحل = {−١}

٢ | س + ٣ | = $\frac{1}{2}$ س + ٣ بوضع د (س) = | س + ٣ | ، ر (س) = $\frac{1}{2}$ س + ٣

الحل البيانى :



د يمثلها المنحنى ص = | س | بإزاحة أفقية ٣ وحدات فى اتجاه و س← ، ر يمثلها

المنحنى ص = س مع انكماش رأسى فيه : أ = $\frac{1}{2}$

وإزاحة رأسية ٣ وحدات فى اتجاه و ص

(أى مستقيم ميله = $\frac{1}{2}$ ويمر بالنقطة (٠ ، ٣))

∴ المنحنيان يتقاطعان فى (٠ ، ٣) ، (−٤ ، ١)

∴ مجموعة الحل = {٠ ، −٤}

الحل الجبرى : د (س) = | س + ٣ | = { س + ٣ ، س ≥ −٣ ؛ − س − ٣ ، س < −٣ }

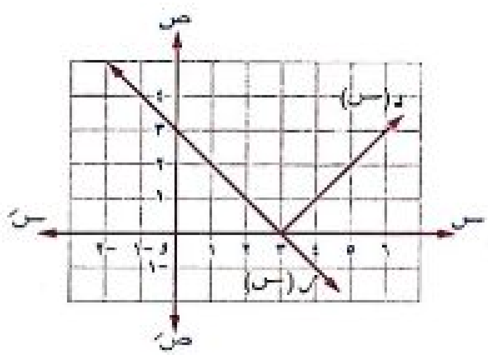
عندما س ≥ − ٣ : س + ٣ = $\frac{1}{2}$ س + ٣ ومنها س = ٠ ∈ [−٣ ، ∞[

عندما س < − ٣ : − س − ٣ = $\frac{1}{2}$ س + ٣ ومنها س = −٤ ∈]− ∞ ، −٣[

∴ مجموعة الحل = {٠ ، −٤}

٣ بفرض أن : د (س) = | س − ٣ | ، ر (س) = ٣ − س = − س + ٣

الحل البيانى :



د يمثلها بيانيًا المنحنى ص = | س | بإزاحة أفقية ٣ وحدات فى اتجاه و س← ، ر يمثلها بيانيًا

المنحنى ص = س بالانعكاس فى محور السينات

ثم إزاحة رأسية ٣ وحدات فى اتجاه و ص

∴ المنحنيان يتقاطعان فى عدد لا نهائى من النقط

(س ، ص) بحيث إن : س ∈]− ∞ ، ٣]

∴ مجموعة الحل =]− ∞ ، ٣]

الحل الجبرى : د (س) = | س − ٣ | = { س − ٣ ، س ≥ ٣ ؛ − س + ٣ ، س < ٣ }

عندما س ≥ ٣ : ∴ س − ٣ = ٣ − س ∴ ٢ س = ٦

∴ س = ٣ ∈ [٣ ، ∞[

عندما س < ٣ : ∴ − س + ٣ = ٣ − س

وهذه العلاقة تتحقق لجميع قيم س ∈]− ∞ ، ٣[

∴ مجموعة الحل = {٣} ∪]− ∞ ، ٣[=]− ∞ ، ٣]

مثال ٤

أوجد جبريًا مجموعة الحل فى ح لكل من المعادلات الآتية :

[١] |٣س − ٩| − |٣ − س| = ١٠

[٢] $\sqrt{س^{٢} − ٤س + ٤}$ + س = ١٠

[٣] $س^{٢}$ − ٣|س| − ٢٨ = ٠

الحل

[١] ∵ |٣س − ٩| − |٣ − س| = ١٠ ∴ ٣|س − ٣| − |س − ٣| = ١٠

(لاحظ أن : |س − ٣| = |٣ − س|)

∴ ٢|س − ٣| = ١٠ ∴ |س − ٣| = ٥ ∴ س − ٣ = ± ٥

∴ س − ٣ = ٥ ومنها س = ٨

أ، س − ٣ = −٥ ومنها س = −٢ ∴ مجموعة الحل = {٨ ، −٢}

[٢] ∵ $\sqrt{س^{٢} − ٤س + ٤}$ + س = ١٠ ∴ $\sqrt{(س − ٢)^{٢}}$ = ١٠ − س

∴ |س − ٢| = ١٠ − س

، ∵ |س − ٢| = { س − ٢ ، س ≥ ٢ ؛ −س + ٢ ، س < ٢ }

عندما س ≥ ٢ : س − ٢ = ١٠ − س ومنها س = ٦ ∈ [٢ ، ∞[

، عندما س < ٢ : −س + ٢ = ١٠ − س

∴ ٢ = ١٠ (وهذا مستحيل) ∴ مجموعة الحل = {٦}

[٣] ∵ |س| = { س ، س ≥ ٠ ؛ −س ، س < ٠ }

∴ $س^{٢}$ − ٣|س| − ٢٨ = { $س^{٢}$ − ٣س − ٢٨ ، س ≥ ٠ ؛ $س^{٢}$ + ٣س − ٢٨ ، س < ٠ }

، عندما س ≥ ٠ : $س^{٢}$ − ٣س − ٢٨ = ٠

∴ (س − ٧) (س + ٤) = ٠ ومنها س = ٧ ∈ [٠ ، ∞[أ، س = −٤ ∉ [٠ ، ∞[

، عندما س < ٠ : $س^{٢}$ + ٣س − ٢٨ = ٠

∴ (س + ٧) (س − ٤) = ٠ ومنها س = −٧ ∈]−∞ ، ٠[

أ، س = ٤ ∉]−∞ ، ٠[∴ مجموعة الحل = {٧ ، −٧}

حل آخر : ∵ |س|^2 = |س^2| = س^2

∴ |س|^2 − ٣ |س| − ٢٨ = ٠ ∴ (|س| − ٧) (|س| + ٤) = ٠

∴ |س| = ٧ ومنها س = ± ٧ أ، |س| = −٤ (مرفوض)

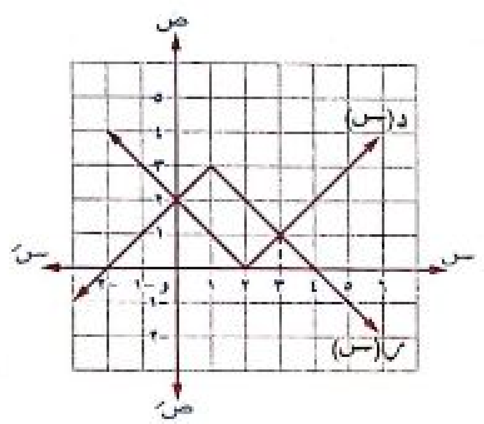
∴ مجموعة الحل = {٧ ، −٧}

مثال ٥

أوجد مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين بيانيًا فى ح :

[١] |س − ٢| + |س − ١| = ٣ [٢] |س − ٣| = ٣ − |س|

الحل



[١] |س − ٢| = −|س − ١| + ٣

بوضع د (س) = |س − ٢|

، ر (س) = −|س − ١| + ٣

∵ د يمثلها المنحنى ص = |س|

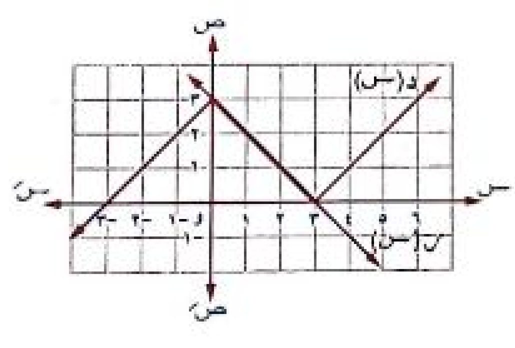
بإزاحة أفقية وحدتين فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$

، ر يمثلها المنحنى ص = |س|

بالانعكاس فى محور السينات ثم إزاحة أفقية وحدة واحدة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$ وإزاحة رأسية ٣ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$

∴ المنحنيان يتقاطعان فى (٠ ، ٢) ، (٣ ، ١) ∴ مجموعة الحل = {٠ ، ٣}

[٢] بوضع د (س) = |س − ٣| ، ر (س) = ٣ − |س|



∴ د يمثلها المنحنى ص = |س|

بإزاحة أفقية ٣ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$

، ر يمثلها صورة المنحنى ص = |س|

بالانعكاس فى محور السينات ثم إزاحة رأسية ٣ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$

∴ المنحنيان يتقاطعان فى عدد لا نهائى من النقط (س ، ص) بحيث س ∈ [٠ ، ٣]

∴ مجموعة الحل = [٠ ، ٣]

مثال ٤

أوجد جبريًا مجموعة الحل فى ح لكل من المعادلات الآتية :

[١] | ٣ س − ٩ | − | ٢ − س | = ١٠

[٢] √(س^{٢} − ٤ س + ٤) + س = ١٠

[٣] س^{٢} − ٣ | س | − ٢٨ = ٠

الحـــل

[١] ∵ | ٣ س − ٩ | − | ٢ − س | = ١٠

∴ ٣ | س − ٣ | − | س − ٣ | = ١٠

(لاحظ أن : | س − ٢ | = | ٢ − س |)

∴ ٢ | س − ٣ | = ١٠   ∴ | س − ٣ | = ٥   ∴ س − ٣ = ± ٥

∴ س − ٣ = ٥ ومنها س = ٨

أ، س − ٣ = −٥ ومنها س = −٢

∴ مجموعة الحل = {٨ ، −٢}

[٢] ∵ √(س^{٢} − ٤ س + ٤) + س = ١٠

∴ √((س − ٢)^{٢}) = ١٠ − س

∴ | س − ٢ | = ١٠ − س

، ∵ | س − ٢ | = { س − ٢ ، س ≥ ٢
  { −س + ٢ ، س < ٢

عندما س ≥ ٢ : س − ٢ = ١٠ − س ومنها س = ٦ ∈ [٢ ، ∞[

، عندما س < ٢ : −س + ٢ = ١٠ − س

∴ ٢ = ١٠ (وهذا مستحيل)

∴ مجموعة الحل = {٦}

[٣] ∵ | س | = { س ، س ≥ ٠
  { −س ، س < ٠

∴ س^{٢} − ٣ | س | − ٢٨ = { س^{٢} − ٣ س − ٢٨ ، س ≥ ٠
  { س^{٢} + ٣ س − ٢٨ ، س < ٠

، عندما س ≥ ٠ : س^{٢} − ٣ س − ٢٨ = ٠

∴ (س − ٧) (س + ٤) = ٠ ومنها س = ٧ ∈ [٠ ، ∞[أ، س = −٤ ∉ [٠ ، ∞[

، عندما س < ٠ : س^{٢} + ٣ س − ٢٨ = ٠

∴ (س + ٧) (س − ٤) = ٠   ومنها س = −٧ ∈]−∞ ، ٠[

أ، س = ٤ ∉]−∞ ، ٠[

∴ مجموعة الحل = {٧ ، −٧}

حل آخر : ∵ |س|^٢ = |س^٢| = س^٢

∴ |س|^٢ − ٣ |س| − ٢٨ = ٠   ∴ (|س| − ٧) (|س| + ٤) = ٠

∴ |س| = ٧ ومنها س = ± ٧   أ، |س| = −٤ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {٧ ، −٧}

مثال ٥

أوجد مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين بيانيًا فى ح :

[١] |س − ٢| + |س − ١| = ٣   [٢] |س − ٣| = ٣ − |س|

الحـــل

[١] |س − ٢| = − |س − ١| + ٣

بوضع د (س) = |س − ٢|

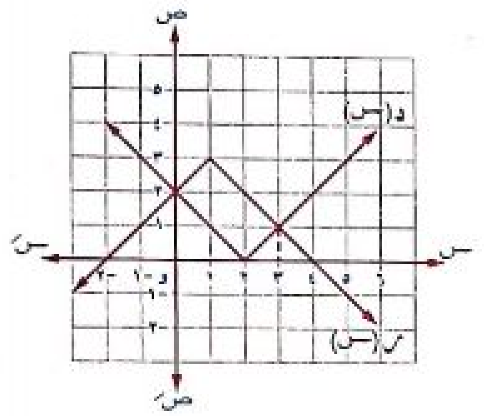
، ر (س) = − |س − ١| + ٣

∵ د يمثلها المنحنى ص = |س|

بإزاحة أفقية وحدتين فى اتجاه و س⃖

، ر يمثلها المنحنى ص = |س|

بالانعكاس فى محور السينات ثم إزاحة أفقية وحدة واحدة فى اتجاه و س⃖ وإزاحة رأسية ٣ وحدات فى اتجاه و ص⃖



∴ المنحنيان يتقاطعان فى (٠ ، ٢) ، (٣ ، ١)   ∴ مجموعة الحل = {٠ ، ٣}

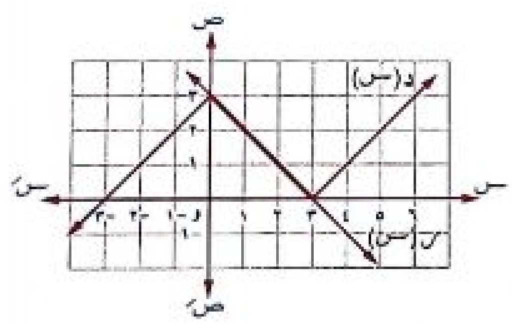
[٢] بوضع د (س) = |س − ٣| ، ر (س) = ٣ − |س|

∴ د يمثلها المنحنى ص = |س|

بإزاحة أفقية ٣ وحدات فى اتجاه و س⃖

، ر يمثلها صورة المنحنى ص = |س|

بالانعكاس فى محور السينات ثم إزاحة رأسية ٣ وحدات فى اتجاه و ص⃖



∴ المنحنيان يتقاطعان فى عدد لا نهائى من النقط (س ، ص) بحيث س ∈ [٠ ، ٣]

∴ مجموعة الحل = [٠ ، ٣]

مثال ٤

أوجد جبريًا مجموعة الحل فى ح لكل من المعادلات الآتية :

[١] $|٢ س - ٩| - |٢ - س| = ١٠$ [٢] $\sqrt{س^٢ - ٤ س + ٤} + س = ١٠$

[٣] $س^٢ - ٣ |س| - ٢٨ = ٠$

الحـــل

[١] ∵ $|٢ س - ٩| - |٢ - س| = ١٠$ ∴ $٣ |س - ٣| - |س - ٣| = ١٠$

(لاحظ أن : $|س - ٣| = |٣ - س|$)

∴ $٢ |س - ٣| = ١٠$ ∴ $|س - ٣| = ٥$ ∴ $س - ٣ = \pm ٥$

∴ $س - ٣ = ٥$ ومنها $س = ٨$

أ، $س - ٣ = -٥$ ومنها $س = -٢$ ∴ مجموعة الحل = $\{٨ ، -٢\}$

[٢] ∵ $\sqrt{س^٢ - ٤ س + ٤} + س = ١٠$ ∴ $\sqrt{(س - ٢)^٢} = ١٠ - س$

∴ $|س - ٢| = ١٠ - س$

، ∵ $|س - ٢| = \begin{cases} س - ٢ & ، س \geq ٢ \\ -س + ٢ & ، س < ٢ \end{cases}$

عندما $س \geq ٢$: $س - ٢ = ١٠ - س$ ومنها $س = ٦ \in [٢ ، \infty[$

، عندما $س < ٢$: $-س + ٢ = ١٠ - س$

∴ $٢ = ١٠$ (وهذا مستحيل) ∴ مجموعة الحل = $\{٦\}$

[٣] ∵ $|س| = \begin{cases} س & ، س \geq ٠ \\ -س & ، س < ٠ \end{cases}$

∴ $س^٢ - ٣ |س| - ٢٨ = \begin{cases} س^٢ - ٣ س - ٢٨ & ، س \geq ٠ \\ س^٢ + ٣ س - ٢٨ & ، س < ٠ \end{cases}$

، عندما $س \geq ٠$: $س^٢ - ٣ س - ٢٨ = ٠$

∴ $(س - ٧)(س + ٤) = ٠$ ومنها $س = ٧ \in [٠ ، \infty[$ أ، $س = -٤ \notin [٠ ، \infty[$

، عندما $س < ٠$: $س^٢ + ٣ س - ٢٨ = ٠$

∴ $(س + ٧)(س - ٤) = ٠$ ومنها $س = -٧ \in]-\infty ، ٠[$

أ، $س = ٤ \notin]-\infty ، ٠[$ ∴ مجموعة الحل = $\{٧ ، -٧\}$

حل آخر : ∵ |س|^{٢} = |س^{٢}| = س^{٢}

∴ |س|^{٢} − ٣ |س| − ٢٨ = ٠ ∴ (|س| − ٧) (|س| + ٤) = ٠

∴ |س| = ٧ ومنها س = ± ٧ أو |س| = −٤ (مرفوض)

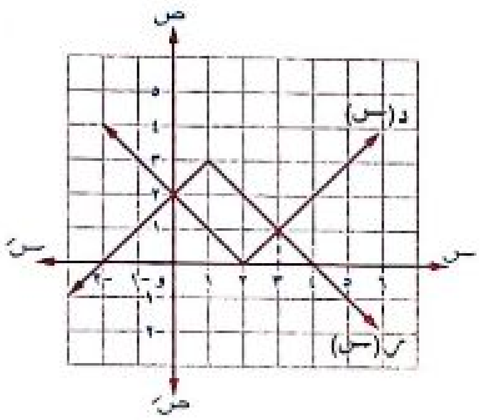
∴ مجموعة الحل = {٧ ، −٧}

مثال ٥

أوجد مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين بيانيًا في ح :

[١] |س − ٢| + |س − ١| = ٣ [٢] |س − ٣| = ٣ − |س|

الحل



[١] |س − ٢| = − |س − ١| + ٣

بوضع د (س) = |س − ٢|

، ر (س) = − |س − ١| + ٣

∵ د يمثلها المنحنى ص = |س|

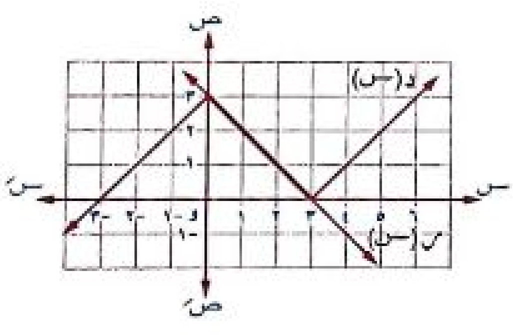
بإزاحة أفقية وحدتين فى اتجاه و س→

، ر يمثلها المنحنى ص = |س|

بالانعكاس فى محور السينات ثم إزاحة أفقية وحدة واحدة فى اتجاه و س→ وإزاحة رأسية ٣ وحدات فى اتجاه و ص→

∴ المنحنيان يتقاطعان فى (٠ ، ٢) ، (٣ ، ١) ∴ مجموعة الحل = {٠ ، ٣}

[٢] بوضع د (س) = |س − ٣| ، ر (س) = ٣ − |س|



∴ د يمثلها المنحنى ص = |س|

بإزاحة أفقية ٣ وحدات فى اتجاه و س→

، ر يمثلها صورة المنحنى ص = |س|

بالانعكاس فى محور السينات ثم إزاحة رأسية ٣ وحدات فى اتجاه و ص→

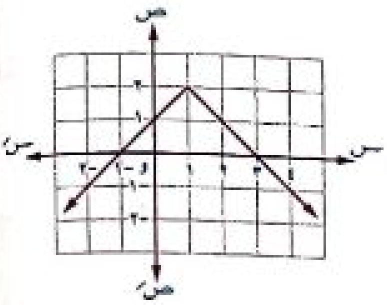
∴ المنحنيان يتقاطعان فى عدد لا نهائى من النقط (س ، ص) بحيث س ∈ [٠ ، ٣]

∴ مجموعة الحل = [٠ ، ٣]

مثال ٦

ارسم الشكل البياني للدالة د : د (س) = ٢ - | س - ١ |
ومن الرسم استنتج مجموعة الحل للمعادلة : د (س) = ٠

الحل



∵ د (س) = - | س - ١ | + ٢

∴ د يمثلها بيانيًا صورة المنحنى ص = | س | بالانعكاس

فى محور السينات ثم إزاحة أفقية وحدة واحدة فى اتجاه

و س ثم إزاحة رأسية وحدتان فى اتجاه و ص

∴ مجموعة الحل للمعادلة : د (س) = ٠

هى مجموعة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع الخط البيانى للدالة د مع محور السينات

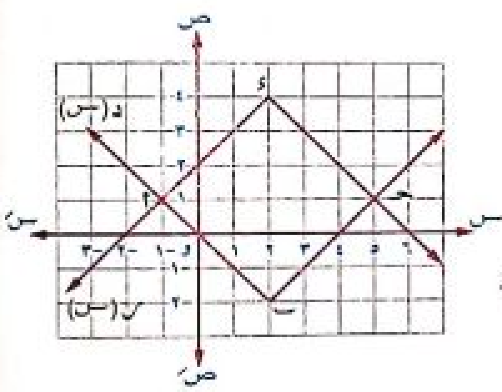
أى مع المستقيم ص = ٠ فنجدها ٣ ، -١ ∴ مجموعة الحل للمعادلة = {٣ ، -١}

مثال ٧

أوجد بالوحدات المربعة المساحة المحصورة بين المنحنيين د ، ر حيث :

د (س) = | س - ٢ | - ٢ ، ر (س) = ٤ - | س - ٢ |

الحل



د يمثلها المنحنى ص = | س | بإزاحة أفقية

وحدتين فى اتجاه و س وإزاحة رأسية

وحدتين فى اتجاه و ص ، ر يمثلها صورة

المنحنى ص = | س | بالانعكاس فى محور السينات ثم إزاحة أفقية

وحدتين فى اتجاه و س وإزاحة رأسية ٤ وحدات فى اتجاه و ص

من الرسم :

المساحة المحصورة بين منحنيى الدالتين د ، ر

هى سطح مربع رؤوسه النقط أ (-١ ، ١) ، ب (٢ ، -٢)

، حـ (٥ ، ١) ، ء (٢ ، ٤)

وطول قطره أحـ = ٥ - (-١) = ٦ وحدة طول

∴ مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين د ، ر

= مساحة سطح المربع أ ب حـ ء = $\frac{١}{٢}$ (أحـ)^{٢}

= $\frac{١}{٢}$ × ٣٦ = ١٨ وحدة مربعة.

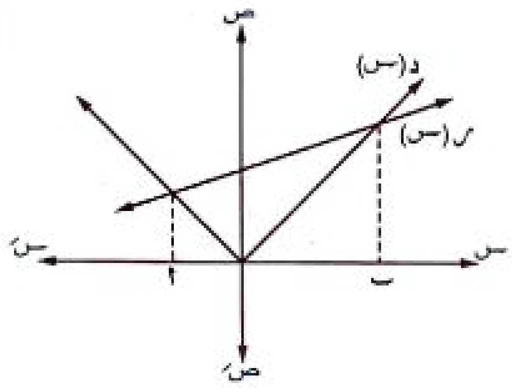
لاحظ أن

القطرين أحـ ، ب ء ينصف كل منهما الآخر ومتعامدان ومتساويان فى الطول

∴ الشكل يمثل مربعًا.

ثانيًا حـل متباينات القيمة المطلقة

١ الحل البيانى لمتباينات القيمة المطلقة



فى الشكل المقابل : لأى دالتين د ، ر :

- مجموعة حل المتباينة : د (س) < ر (س) هى]أ ، ب[

وهى مجموعة قيم س التى يكون عندها منحنى الدالة د أسفل منحنى الدالة ر

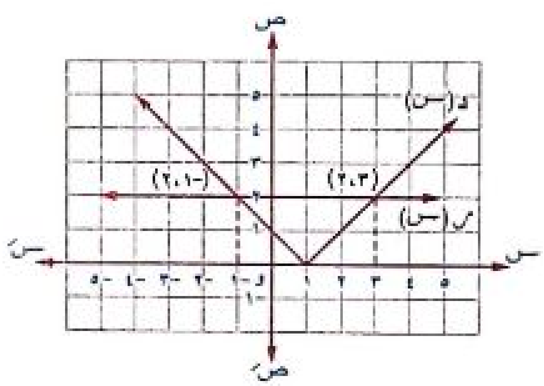
- مجموعة حل المتباينة : د (س) > ر (س) هى]− ∞ ، أ[∪]ب ، ∞[= ح − [أ ، ب]

وهى مجموعة قيم س التى يكون عندها منحنى الدالة د أعلى منحنى الدالة ر

لاحظ من الشكل أن : مجموعة حل المعادلة د (س) = ر (س) هى {أ ، ب} ولذلك فإن :

- مجموعة حل المتباينة : د (س) ≤ ر (س) هى [أ ، ب]
- مجموعة حل المتباينة : د (س) ≥ ر (س) هى]− ∞ ، أ] ∪ [ب ، ∞[= ح −]أ ، ب[

فمثلًا فى : الشكل ①



مجموعة حل المتباينة :

د (س) < ر (س) هى]−١ ، ٣[

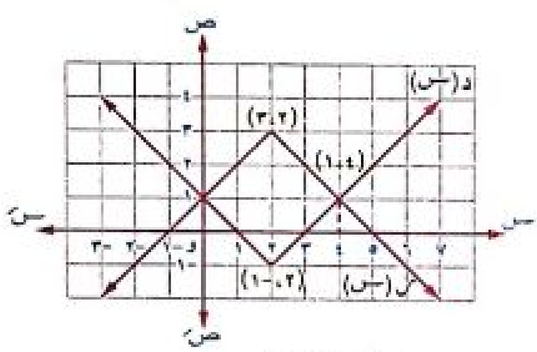
مجموعة حل المتباينة :

د (س) > ر (س) هى ح − [−١ ، ٣]

مجموعة حل المعادلة :

د (س) = ر (س) هى {−١ ، ٣}

الشكل ②



مجموعة حل المتباينة :

د (س) < ر (س) هى]٠ ، ٤[

مجموعة حل المتباينة :

د (س) > ر (س) هى ح − [٠ ، ٤]

مجموعة حل المعادلة :

د (س) = ر (س) هى {٠ ، ٤}

مثال ٨

أوجد بيانيًا فى ح مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

١ |س + ٣ | < ٢

٢ | ٢ س - ٨ | ≤ ٦

٣ | س - ٣ | > ١/٢ س

٤ | س - ٢ | ≤ ٣ - | س - ٣ |

الحل

١ بوضع د (س) = | س + ٣ | ، ر (س) = ٢

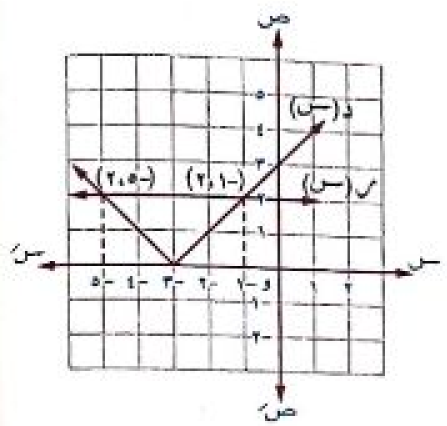
من التمثيل البيانى للدالتين د ، ر

فى الشكل المقابل ينتج أن :

د (س) < ر (س) أى | س + ٣ | < ٢

فى الفترة]-٥ ، -١[

∴ مجموعة حل المتباينة =]-٥ ، -١[



٢ ∵ | ٢ (س - ٤) | ≤ ٦

∴ ٢ | س - ٤ | ≤ ٦

∴ | س - ٤ | ≤ ٣

بوضع د (س) = | س - ٤ | ، ر (س) = ٣

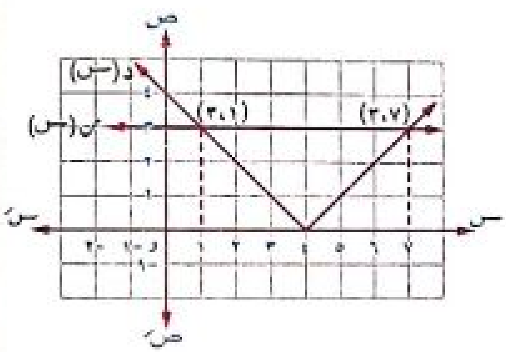
من التمثيل البيانى للدالتين د ، ر

فى الشكل المقابل ينتج أن :

د (س) ≤ ر (س)

أى | س - ٤ | ≤ ٣ فى الفترة [١ ، ٧]

∴ مجموعة حل المتباينة = [١ ، ٧]



٣ بوضع د (س) = | س - ٣ | ، ر (س) = ١/٢ س

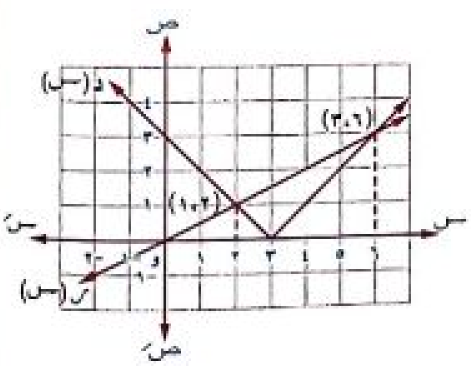
من التمثيل البيانى للدالتين د ، ر

فى الشكل المقابل ينتج أن : د (س) > ر (س)

أى | س - ٣ | > ١/٢ س فى الفترة

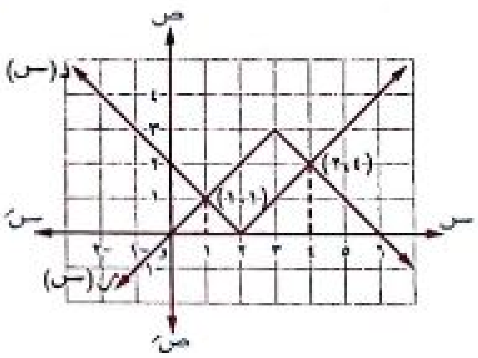
]-∞ ، ٢[∪]٦ ، ∞[= ح - [٢ ، ٦]

∴ مجموعة حل المتباينة = ح - [٢ ، ٦]



٤ بوضع د (س) = | س − ٢ | ، ر (س) = ٢ − | س − ٣ | = − | س − ٣ | + ٢

من التمثيل البيانى للدالتين د ، ر



فى الشكل المقابل ينتج أن : د (س) ≤ ر (س) أى :

| س − ٢ | ≤ ٢ − | س − ٣ | فى الفترة

]−∞ ، ١] ∪ [٤ ، ∞[= ح −]١ ، ٤[

∴ مجموعة حل المتباينة = ح −]١ ، ٤[

٢ الحل الجبرى لمتباينات القيمة المطلقة

نتائج

* **لكل أ ∈ ح⁺**

١ إذا كان : | س | < أ فإن : − أ < س < أ

أى أن س ∈]− أ ، أ[



٢ إذا كان : | س | ≤ أ فإن : − أ ≤ س ≤ أ

أى أن س ∈ [− أ ، أ]



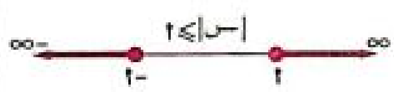
٣ إذا كان : | س | > أ فإن : س > أ أو س < − أ

أى أن س ∈ ح − [− أ ، أ]



٤ إذا كان : | س | ≥ أ فإن : س ≥ أ أو س ≤ − أ

أى أن س ∈ ح −]− أ ، أ[



* **لكل أ ∈ ح⁻**

١ مجموعة حل المتباينة : | س | < أ ، | س | ≤ أ فى ح تساوى ∅

٢ مجموعة حل المتباينة : | س | > أ ، | س | ≥ أ فى ح تساوى ح

مثال ٩

أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية :

١ | ٢ س − ٥ | < ١

٢ | س + ٢ | > ٣

٣ √(٤ س² + ١٢ س + ٩) ≤ ١

٤ ١ / | ٣ س − ١ | ≥ ٥

٥ | ٢ س − ٥ | + | ٥ − ٢ س | < ١٤

الحل

(١) ∵ |٢ س − ٥| < ١

∴ −١ < ٢ س − ٥ < ١

∴ −١ + ٥ < ٢ س < ١ + ٥

∴ ٤ < ٢ س < ٦ بالقسمة على ٢

∴ ٢ < س < ٣

∴ مجموعة الحل =]٢ ، ٣[

(٢) ∵ |س + ٢| > ٣

∴ س + ٢ > ٣ أ، س + ٢ < −٣

∴ س > ١ | ∴ س < −٥

∴ مجموعة الحل = ح − [−٥ ، ١]

لاحظ أنه

عند حل المتباينة : |س + ٢| > ٣
يمكن أن نحل أولاً المتباينة
|س + ٢| ≤ ٣ كالتالي
∴ −٣ ≤ س + ٢ ≤ ٣
∴ −٥ ≤ س ≤ ١ ∴ م.ح = [−٥ ، ١]
∴ م.ح المتباينة المطلوبة |س + ٢| > ٣
هى ح − [−٥ ، ١]

(٣) ∵ $\sqrt{٤ س^٢ + ١٢ س + ٩} \leq ١$

∴ $\sqrt{(٢ س + ٣)^٢} \leq ١$

∴ |٢ س + ٣| ≤ ١

∴ −١ ≤ ٢ س + ٣ ≤ ١

∴ −٤ ≤ ٢ س ≤ −٢

∴ −٢ ≤ س ≤ −١

∴ مجموعة الحل = [−٢ ، −١]

(٤) ∵ $\frac{١}{|٣ س - ١|} \geq ٥$

∴ $|٣ س - ١| \leq \frac{١}{٥}$

∴ $-\frac{١}{٥} \leq ٣ س - ١ \leq \frac{١}{٥}$

∴ $\frac{٤}{٥} \leq ٣ س \leq \frac{٦}{٥}$

∴ $\frac{٤}{١٥} \leq س \leq \frac{٢}{٥}$

، ∵ |٣ س − ١| = ٠ عندما س = $\frac{١}{٣}$

∴ مجموعة الحل = $[\frac{٤}{١٥} ، \frac{٢}{٥}] - \{\frac{١}{٣}\}$

لاحظ أنه

- إذا كان أ ، ب ∈ $ح^+$ ، أ > ب فإن $\frac{١}{أ} < \frac{١}{ب}$
- عند إيجاد مجموعة حل المتباينة يجب استبعاد مجموعة أصفار المقام من مجموعة الحل.

(٥) ∵ |٢ س − ٥| + |٥ − ٢ س| < ١٤

∴ |٢ س − ٥| + |٢ س − ٥| < ١٤

∴ ٢ |٢ س − ٥| < ١٤ وبالقسمة على ٢

∴ |٢ س − ٥| < ٧

∴ −٧ < ٢ س − ٥ < ٧

∴ −٢ < ٢ س < ١٢

∴ −١ < س < ٦

∴ مجموعة الحل =]−١ ، ٦[

ثالثًا تطبيقات على خواص معادلات ومتباينات القيمة المطلقة

مثال ١٠

عين مجال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية :

[١] د (س) = $\frac{٢ س}{|س| - ٣}$

[٢] د (س) = $\frac{س^٢}{|س - ١| + ٢}$

[٣] د (س) = $\sqrt{٤ - |س|}$

[٤] د (س) = $\sqrt{|س| - ٢}$

[٥] د (س) = $\frac{٢ س}{\sqrt{|س - ٣| - ٢}}$

[٦] د (س) = $\frac{س^٢}{\sqrt{٣ - |س + ٢|}}$

الحل

[١] نوجد أصفار المقام : |س| − ٣ = ٠ ∴ |س| = ٣

∴ س = ± ٣ ∴ المجال = ح − {٣ ، −٣}

[٢] نوجد أصفار المقام : |س − ١| + ٢ = ٠ ∴ |س − ١| = −٢

، ∵ −٢ < صفر وهذا يتعارض مع تعريف القيمة المطلقة

∴ لا يوجد أصفار للمقام ∴ المجال = ح

[٣] تكون الدالة د معرفة بشرط : ٤ − |س| ≥ ٠ ∴ |س| ≤ ٤

∴ −٤ ≤ س ≤ ٤ ∴ المجال = [−٤ ، ٤]

[٤] تكون الدالة د معرفة بشرط : |س| − ٢ ≥ ٠ ∴ |س| ≥ ٢

∴ س ≥ ٢ ، أ س ≤ −٢

∴ المجال = ح −]−٢ ، ٢[

[٥] تكون الدالة د معرفة بشرط : |س − ٣| − ٢ > ٠ ∴ |س − ٣| > ٢

∴ س − ٣ > ٢ ، أ س − ٣ < −٢

∴ س > ٥ | س < ١

∴ المجال = ح − [١ ، ٥]

[٦] تكون الدالة د معرفة بشرط : ٣ − |س + ٢| > ٠ ∴ |س + ٢| < ٣

∴ −٣ < س + ٢ < ٣ ∴ −٥ < س < ١

∴ المجال =]−٥ ، ١[

مثال ⑪

اكتب متباينة القيمة المطلقة التى تعبر عن :

1 درجة طالب فى أحد الاختبارات تتراوح من ٧٠ إلى ٩٠ درجة

2 العمق الذى تعيش فيه بعض الأسماك تحت سطح الماء فى حوض سمك ارتفاعه الداخلى ٤٠ سم

الحل

1 بفرض أن درجة الطالب = س درجة

∴ ٧٠ ≤ س ≤ ٩٠

(بإضافة −٨٠ إلى أطراف المتباينة)

∴ ٧٠ − ٨٠ ≤ س − ٨٠ ≤ ٩٠ − ٨٠

∴ −١٠ ≤ س − ٨٠ ≤ ١٠

∴ متباينة القيمة المطلقة هى |س − ٨٠| ≤ ١٠

لاحظ أن
٨٠ هو الوسط الحسابى للعددين ٧٠ ، ٩٠

2 بفرض أن العمق الذى تعيش فيه هذه الأسماك = س سم

∴ ٠ < س < ٤٠ (بإضافة −٢٠ إلى أطراف المتباينة)

∴ ٠ − ٢٠ < س − ٢٠ < ٤٠ − ٢٠

∴ −٢٠ < س − ٢٠ < ٢٠

∴ متباينة القيمة المطلقة هى |س − ٢٠| < ٢٠

لاحظ أن
٢٠ هو الوسط الحسابى للعددين ٠ ، ٤٠

مثال ⑫

ابحث نوع كل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

1 $د(س) = \frac{جتا س}{|س| - ٢}$

2 $د(س) = \frac{|٢ + س| - |٢ - س|}{|٢ + س| + |٢ - س|}$

الحل

1 ∵ $د(-س) = \frac{جتا (-س)}{|-س| - ٢} = \frac{جتا س}{|س| - ٢} = د(س)$

∴ الدالة د زوجية.

لاحظ أن
|س| = |−س|

2 ∵ $د(-س) = \frac{|٢ - س| - |٢ + س|}{|٢ - س| + |٢ + س|}$

$= \frac{-(|٢ + س| - |٢ - س|)}{|٢ + س| + |٢ - س|} = -د(س)$

∴ الدالة د فردية.

تمارين 6

على حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مجموعة حل المعادلة : |س − ٢| = ٣ هى ....

(أ) {٢ ، ٣} (ب) {−١ ، ٥} (جـ) [−١ ، ٥] (د) {٥ ، −٥}

(٢) مجموعة حل المعادلة |٥ س − ١| + ٤ = ١ فى ح هى ....

(أ) $\{\frac{-٤}{٥}\}$ (ب) $\{\frac{-٤}{٥} ، \frac{٦}{٥}\}$ (جـ) ∅ (د) $\{\frac{٦}{٥}\}$

(٣) مجموعة حل المعادلة : |س − ٢| = |٢ − س| فى ح هى ....

(أ) {٢} (ب) {٣ ، −٣} (جـ) ح (د) ∅

(٤) مجموعة حل المعادلة : |٢ س − ٤| = |س + ١| هى ....

(أ) {١ ، ٥} (ب) {٥ ، −١} (جـ) {١ ، −٥} (د) {−٥ ، −١}

(٥) مجموعة حل المعادلة : |٢ س − ١| = س + ٢ هى ....

(أ) {٣} (ب) $\{٣ ، \frac{١}{٣}\}$ (جـ) $\{٣ ، \frac{-١}{٣}\}$ (د) ∅

(٦) مجموعة حل المعادلة : |س − ٢| = س − ٢ هى ....

(أ) ∅ (ب) {٢} (جـ) [٢ ، ∞[(د) ح

(٧) مجموعة حل المعادلة : $\frac{١}{|س - ٣|} = \frac{١}{٢}$ هى .... حيث س ≠ ٣

(أ) {٥} (ب) {١} (جـ) {٥ ، ١} (د) ∅

(٨) مجموعة حل المعادلة : |س| + س = ٠ هى ....

(أ) {٠} (ب)]−∞ ، ٠] (جـ)]−∞ ، ٠[(د) ∅

(٩) مجموعة حل المعادلة : $\frac{|س|}{س} = ١$ فى ح هى ....

(أ) {٠} (ب) $ح^+$ (جـ) $ح^-$ (د) [٠ ، ∞[

(١٠) مجموعة حل المعادلة : $\sqrt{س^٢} - ٣ س = ٨$ هى ....

(أ) ∅ (ب) {−٢ ، −٤} (جـ) {−٤} (د) {−٢}

(١١) مجموعة حل المعادلة : $س^{٢}$ = ٢ − | س | هى ....

(أ) {١ ، −١} (ب) {٢ ، −٢} (جـ) {١ ، −٢} (د) {−١ ، ٢}

(١٢) إذا كانت : د (س) = $\sqrt{س^{٢}}$ + | س | فإن مجموعة حل المعادلة : د (س) = ٢ فى ح ....

(أ) {٢ ، −٢} (ب) {١ ، −١} (جـ) {٢ ، ٠} (د) {−١ ، ٠}

(١٣) إذا كان : د (س) = | س − ٢ | + ٤ فإن مجموعة حل المعادلة : د (س + ٢) = ٣ هى ....

(أ) {١ ، ٣} (ب) ح (جـ) ∅ (د) {−١ ، −٣}

(١٤) إذا كان : د (س) = | س − ٢ | + ٤ فإن مجموعة حل المعادلة : د (س + ٢) = ٦ هى ....

(أ) {٠ ، ٤} (ب) {٢ ، −٢} (جـ) {٢ ، ٤} (د) {−٢ ، −٤}

(١٥) مجموعة حل المعادلة : $\sqrt{٤س^{٢} − ١٢س + ٩}$ = ٥ هى ....

(أ) {٤} (ب) {−١} (جـ) {٤ ، −١} (د) ح

(١٦) أى مما يأتى لا ينتمى لمجموعة حل المعادلة | س + ٢ | + | س − ١ | = ٣

(أ) −٢ (ب) صفر (جـ) −٣ (د) ١

(١٧) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{٢}{|س| − ٢}$ هو ....

(أ) ح − {٢} (ب) ح − {−٢} (جـ) ح (د) ح − {٢ ، −٢}

(١٨) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{١}{|س| + ٢}$ هو ....

(أ) ح (ب) {٢ ، −٢} (جـ) ح − {٢ ، −٢} (د) ح − {٢}

(١٩) إذا كان مجال الدالة د : د (س) = $\frac{س}{|س| + أ}$ هو ح − {−٢ ، ٢} فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ± ٢ (د) صفر

(٢٠) الدالة د : د (س) = $\frac{س ظا س}{|س|}$ من حيث نوعها تكون ....

(أ) فردية. (ب) زوجية.

(جـ) ليست فردية وليست زوجية. (د) أحادية.

(٢١) العبارة الخطأ فيما يلى هى ....

(أ) | س ص | = | س | × | ص | (ب) | س | = | − س |

(جـ) | س + ص | = | س | + | ص | (د) $\sqrt{س^{٢}}$ = | س |

(٢٢) إذا كان : أ > ٠ ، ب < ٠ فإن أى مما يأتى يكون دائمًا سالبًا ؟

(أ) | أ ب | (ب) أ | ب | (جـ) | أ | ب (د) أ + | ب |

(٢٣) إذا كان : أ - ب > ٠ فإن أى مما يأتى يجب أن يساوى | أ - ب | ؟

(١) أ - ب (٢) ب - أ (٣) | ب - أ |

(أ) (٣) فقط (ب) (١) ، (٣) فقط (جـ) (٢) ، (٣) فقط (د) (١) ، (٢) ، (٣)

(٢٤) إذا كان : $\frac{أ}{|أ|}$ = -١ ، $\frac{ب}{|ب|}$ = ١ فإن كل العبارات الآتية خطأ ما عدا ....

(أ) أ × ب > ٠ (ب) أ - ب > ٠ (جـ) أ - ب = ٠ (د) أ^٢ + ب > ٠

(٢٥) إذا كان : أ < ٠ < ب فإن : | أ | + | ب | + | ب - أ | - | أ - ب | = ...

(أ) ٢ أ (ب) ٢ ب (جـ) أ - ب (د) ب - أ

(٢٦) عدد نقط تقاطع المنحنيين : ص = | س + ٢ | ، ص = ٢ - | س | هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى.

(٢٧) مجموعة حل المتباينة : | س | > -١ هى ....

(أ)]٠ ، ∞[(ب) ح (جـ) ∅ (د) ح - {٠}

(٢٨) مجموعة حل المتباينة : $\frac{١}{|س|}$ ≤ ١ هى ....

(أ) [-١ ، ١] (ب)]-١ ، ١[

(جـ) [-١ ، ١] - {٠} (د)]-١ ، ١[- {٠}

(٢٩) مجموعة حل المتباينة : | ٢ - س | > ٠ هى ....

(أ)]-٣ ، ٣[(ب) ح - [-٣ ، ٣] (جـ) ح - {٢} (د) ح

(٣٠) مجموعة حل المتباينة : $\frac{١}{|س - ٢|}$ ≤ $\frac{١}{٢}$ هى ....

(أ)]٠ ، ٤[- {٢} (ب) [٠ ، ٤] - {٢} (جـ) [٠ ، ٤] (د)]٠ ، ٤]

(٣١) مجموعة حل المتباينة : | س + ٣ | ≥ ٠ هى ....

(أ) ∅ (ب)]-∞ ، -٣] (جـ) [-٣ ، ∞[(د) {-٣}

(٣٢) إذا كان : | س | < أ ، أ ∈ ح$^+$ فإن : س ∈ ....

(أ) ح - [-أ ، أ] (ب) [-أ ، أ] (جـ) ح -]-أ ، أ[(د)]-أ ، أ[

(٣٣) مجموعة حل المتباينة : | س - ٢ | ≥ -٤ فى ح هى ....

(أ)]-٢ ، ٦[(ب) [-٢ ، ٦] (جـ) ح (د) ∅

(٣٤) مجموعة حل المتباينة : | ٢ س - ٥ | ≥ ٩ فى ح هى ....

(أ)]-∞ ، ٧[(ب) [-٢ ، ٧] (جـ) ح -]-٢ ، ٧[(د) ح - [-٢ ، ٧]

(٣٥) مجموعة حل المتباينة : | ٤ − ٦ س | ≤ ١٤ في ح هي ....

(أ)]− $\frac{٥}{٣}$ ، ٣[(ب) [− $\frac{٥}{٣}$ ، ٣]

(جـ) ح −]− $\frac{٥}{٣}$ ، ٣[(د) ح − [− $\frac{٥}{٣}$ ، ٣]

(٣٦) إذا كانت : س ∈ [−١ ، ٤] فإن : | ٢ س − ٣ | ≥ ....

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) −٥

(٣٧) مجموعة حل المتباينة : $\sqrt{س^٢ − ٢س + ١}$ ≤ ٤ هي ....

(أ) [−٣ ، ٥] (ب) ح −]−٣ ، ٥[(جـ)]−٣ ، ٥[(د) ح − [−٣ ، ٥]

(٣٨) مجموعة حل المتباينة : $\sqrt{٤س^٢ − ١٢س + ٩}$ ≥ ٩ هي ....

(أ) [−٦ ، ١٢] (ب) [−٣ ، ٦] (جـ) ح − [−٣ ، ٦] (د) ح −]−٣ ، ٦[

(٣٩) مجموعة حل المتباينة : | ٢ س − ٣ | + | ٦ − ٤ س | ≥ ٢١ هي ....

(أ) [−٢ ، ٥] (ب) ح −]−٢ ، ٥[(جـ)]−٢ ، ٥[(د) {−٢ ، ٥}

(٤٠) مجموعة حل المتباينة : $\sqrt{(س + ٢)^٢}$ + | ٢ س + ٤ | > ٦ في ح هي ....

(أ) [−٤ ، ٠] (ب) ح − [−٤ ، ٠] (جـ)]−٤ ، ٠[(د) ح −]−٤ ، ٠[

(٤١) إذا كان : ١ < س < ٢ فإن : $\sqrt{س^٢ − ٢س + ١}$ + $\sqrt{س^٢ − ٤س + ٤}$ = ...

(أ) ٢ س − ٣ (ب) ٢ س − ١ (جـ) ١ (د) ٣

(٤٢) متباينة القيمة المطلقة التي تعبر عن أن درجة الطالب في أحد الاختبارات (س) تتراوح من ٧٠ إلى ٩٠ درجة هي ....

(أ) | س | ≤ ٩٠ (ب) | س | ≥ ٧٠ (جـ) | س − ٨٠ | ≤ ١٠ (د) | س − ٧٠ | ≤ ٩٠

(٤٣) عدد الحلول التي تنتمي لمجموعة الأعداد الصحيحة للمتباينة | س − ٢ | ≤ ٥ هي ....

(أ) صفر (ب) ٧ (جـ) ٩ (د) ١١

(٤٤) مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{\sqrt{س^٢} − ١}$ هو ....

(أ) [−١ ، ١] (ب)]−١ ، ١[(جـ) ح − [−١ ، ١] (د) ح −]−١ ، ١[

ثانيًا الأسئلة المقالية

تمارين على حل معادلات القيمة المطلقة

١ أوجد جبريًا في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

(١) ٤ | س | − ٢٠ = ٠ «{٥ ، −٥}»

(٢) | ٢ س − ٣ | = ٧ «{٥ ، −٢}»

(٣) ٣ − | س + ٢ | = ٢ «{−١ ، −٣}»

(٤) ٢ | س | = ٣ − | س | «{١ ، −١}»

(٥) | س − ٢ | = ٣ س − ٤ «{$\frac{٣}{٢}$}»

(٦) | س + ٢ | − س + ١ = ٠ «∅»

(٧) |س + ٢| + س − ٢ = ٠ «{٠}»

(٨) ٥ س − ٢ |س| = ٢١ «{٧}»

(٩) |س + ٥| = |س − ٣| «{−١}»

(١٠) |٢ س − ٦| = |س − ٣| «{٣}»

(١١) |س − ١| − ٢ |٢ − س| = ٠ «{٣ ، $\frac{٥}{٣}$}»

(١٢) س^{٢} − ٥ |س| + ٦ = ٠ «{٢ ، −٢ ، ٣ ، −٣}»

(١٣) $\sqrt{\text{س}^{٢}}$ − ٢ س = ٦ «{−٢}»

(١٤) $\sqrt{\text{س}^{٢} - ٤\,\text{س} + ٤}$ = ٤ «{−٢ ، ٦}»

(١٥) |س| + س = ٠ «]−∞ ، ٠]»

(١٦) |س + ٣| + ٢ س = ٠ «{−١}»

(١٧) $\sqrt{\text{س}^{٢} - ٦\,\text{س} + ٩}$ + ٢ س = ٩ «{٤}»

(١٨) |س − ٣|^{٢} − |س − ٣| = صفر «{٢ ، ٣ ، ٤}»

(١٩) ٥ |٣ − س| − ٢ $\sqrt{\text{س}^{٢} - ٦\,\text{س} + ٩}$ = ١٢ «{٧ ، −١}»

(٢٠) |س^{٢} − ١| = |س − ١| «{١ ، ٠ ، −٢}»

(٢١) |س + ١| |س − ١| = ٢٦ «{٣$\sqrt{٣}$ ، −٣$\sqrt{٣}$}»

(٢٢) |س + ١|^{٢} − ٣ |س + ١| − ١٠ = ٠ «{٤ ، −٦}»

(٢٣) (س − ٥)^{٢} = |٢ س − ١٠| «{٣ ، ٧ ، ٥}»

(٢٤) س |س| − س = ٠ «{٠ ، ١ ، −١}»

(٢٥) س |٥ − س| = ٦ «{٢ ، ٣ ، ٦}»

(٢٦) |س^{٢} + س − ١٠| = ١٠ «{٠ ، −١ ، −٥ ، ٤}»

(٢٧) $\frac{٤\,\text{س} - ٨}{|\text{س} - ٢|}$ = س «{٤ ، −٤}»

(٢٨) س^{٢} |س| = ٨ س «{−٢ ، ٠ ، ٢}»

---

٢ أوجد بيانيًا فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية ، وحقق الناتج جبريًا :

(١) |س| − ٤ = ٠ «{٤ ، −٤}»

(٢) |س| + ٢ = ٠ «∅»

(٣) ٢ − |س + ٢| = ٠ «{٠ ، −٤}»

(٤) $\sqrt{\text{س}^{٢} - ٤\,\text{س} + ٤}$ = ٣ «{٥ ، −١}»

(٥) |س + ٣| + س = ٥ «{١}»

(٦) |س − ٢| = ٣ س − ٤ «{$١\frac{١}{٢}$}»

(٧) |٢ س + ٤| = ١ − س «{−١ ، −٥}»

(٨) |٢ س + ٥| = س − ٤ «∅»

(٩) |س + ٢| = |س − ٣| «{$\frac{١}{٢}$}»

(١٠) |س − ٢| + |س − ١| = صفر «∅»

(١١) |س − ٣| = |٢ س + ١| «{−٤ ، $\frac{٢}{٣}$}»

(١٢) |س − ٤| = ٤ − س «]−∞ ، ٤]»

(١٣) |س + ٢| = س + ٢ «[−٢ ، ∞[»

(١٤) |س − ٣| − |س + ٢| = ٥ «]−∞ ، −٢]»

(١٥) |س − ٣| = ٤ − |س + ١| «[−١ ، ٣]»

(١٦) |س + ٢| = س^{٢} + ٢ «{٠ ، ١}»

٣ أثبت أن الدالة د حيث د (س) = $\frac{١٢}{|س| + ٢}$ زوجية ، ثم أوجد جبريًا مجموعة حل المعادلة د (س) = ٢ «{-٤ ، ٤}».

٤ ارسم الشكل البياني للدالة د حيث د (س) = | ٢ س + ٥ | - ٣ وعين مدى الدالة وادرس اطرادها ومن الرسم استنتج مجموعة حل المعادلة : | ٢ س + ٥ | - ٣ = ٠ وحقق ذلك جبريًا. «{-١ ، -٤}».

٥ ارسم منحنى الدالة د : د (س) = ١ - | ٢ س | واستنتج من الرسم مدى الدالة واطرادها ، وأثبت أنها زوجية ، ثم من الرسم أو بأى طريقة أخرى أوجد مجموعة حل المعادلة : ١ - | ٢ س | = -٣ «{-٢ ، ٢}».

٦ أثبت أن الدالة د : د (س) = $\frac{١ - |س|}{|س|}$ زوجية ثم ارسم منحنى د ثم أوجد بيانيًا أو جبريًا مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠ ، وتحقق من صحة الناتج. «{-١ ، ١}».

٧ ارسم الشكل البياني للدالة د حيث د (س) = | س - ١ | + س + ١ موضحًا مدى الدالة ودارسًا الاطراد ثم أوجد مجموعة حل المعادلة : د (س) = ٣ «{$\frac{٣}{٢}$}».

٨ ارسم فى شكل واحد الدالتين د ، ر حيث د (س) = س٢ | س | ، ر (س) = ٢ - | س | ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة د (س) = ر (س) «{-١ ، ١}».

تمارين على حل متباينات القيمة المطلقة

٩ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المتباينات الآتية جبريًا :

(١) | س - ٣ | ≥ ٥ «[-٢ ، ٨]».

(٢) | س - ٣ | ≤ ٥ «ح -]-٢ ، ٨[».

(٣) | ٢ س + ٥ | > ٣ «ح - [-٤ ، -١]».

(٤) | ٣ - س | < ٧ «]-٤ ، ١٠[».

(٥) | $\frac{س - ٣}{٤}$ | ≥ ١ «[-١ ، ٧]».

(٦) | ٣ س + ٢ | + ٥ < ٤ «∅».

(٧) $\frac{١}{|٣ س|}$ ≤ ٥ «[-$\frac{١}{١٥}$ ، $\frac{١}{١٥}$] - {٠}».

(٨) $\frac{١}{|٢ س - ٣|}$ > ٢ «]$\frac{٥}{٤}$ ، $\frac{٧}{٤}$[- {$\frac{٣}{٢}$}».

(٩) | ٢ س - ٣ | + ٣ > ٧ «ح - [-$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٧}{٢}$]».

(١٠) $\sqrt{س^٢ - ٢ س + ١}$ ≤ ٤ «ح -]-٣ ، ٥[».

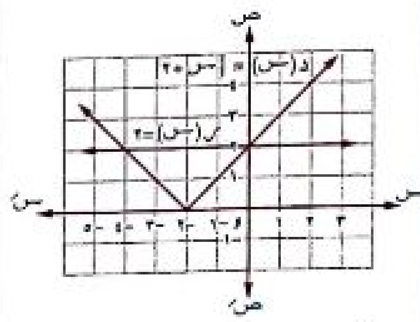
(١١) $\sqrt{٤ س^٢ - ١٢ س + ٩}$ ≥ ٩ «[-٣ ، ٦]».

(١٢) | س - ٢ | + | ٢ - س | < ٦ «]-١ ، ٥[».

(١٣) $\sqrt{(س + ٢)^٢}$ + | ٢ س + ٤ | ≤ ٦ «ح -]-٤ ، ٠[».

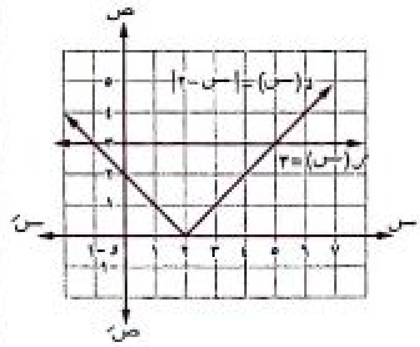
١٠ باستخدام الأشكال البيانية الآتية :

(١)



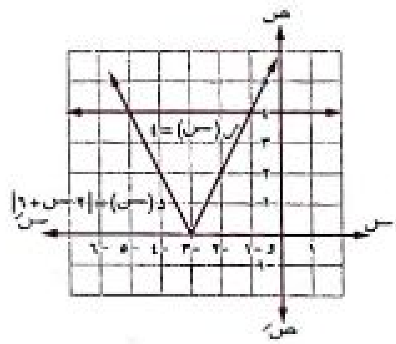
أوجد : مجموعة حل المتباينة
د (س) > ر (س) في ح

(٢)



أوجد : مجموعة حل المتباينة
د (س) > ر (س) في ح

(٣)



أوجد : مجموعة حل المتباينة
د (س) ≥ ر (س) في ح

---

١١ أوجد في ح مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية بيانيًا ثم حقق الناتج جبريًا :

(١) |س − ١| < ٢

(٢) |٢ س − ٥| ≥ ٢

(٣) $\sqrt{٤ س^٢ − ١٢ س + ٩} > ٥$

(٤) |س + ٣| < − س

(٥) |س − ٢| < $\frac{١}{٢}$ س + ٦

(٦) |س − ٣| + |س − ٤| > ٥

---

١٢ اكتب على صورة متباينة القيمة المطلقة كلًّا مما يأتي :

(١) −٤ ≤ س ≤ ٤

(٢) ٠ < س < ٦

(٣) س ≤ −٢ أ، س ≥ ٢

(٤) س ∈ ح − [−٢ ، ٦]

---

١٣ اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تعبر عن :

(١) درجة طالب في اختبار ما تقع بين ٦٠ إلى ١٠٠ درجة

(٢) درجة حرارة مقيسة بالترمومتر الطبي تقع بين ٣٥° C ، ٤٢° C

(٣) توجد الطحالب الخضراء في المحيطات على عمق يصل إلى ٣٠ مترًا.

تمارين متنوعة

١٤ أوجد مجال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية :

(١) د (س) = $\frac{٢}{|س| − ١}$

(٢) د (س) = $\frac{٣}{|س| + ١}$

(٣) د (س) = $\frac{٣ س}{|س − ٢| − ٥}$

(٤) د (س) = $\sqrt{٥ − |س|}$

(٥) د (س) = $\sqrt{|س| − ٥}$

(٦) د (س) = $\frac{١}{\sqrt{٥ − |س|}}$

15 ابحث نوع كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

① د (س) = س |س|

② د (س) = س^٢ |س| − ١

③ د (س) = $\frac{|١ + س| + |١ − س|}{|١ + س| − |١ − س|}$

④ د (س) = $\frac{س^٢ جتا ٢ س}{٥ + |٢ س|}$

⑤ د (س) = ٢ |س| ظا س + ٢ س |ظا س|

⑥ د (س) = $\sqrt{|س| + س}$

16 أوجد بالوحدات المربعة المساحة المحصورة بين منحنيي الدالتين د ، ر حيث :

① د (س) = |س + ٣| + ٢ ، ر (س) = ٤

② د (س) = − |س − ٢| + ٣ ، ر (س) = صفر

③ د (س) = |س − ٢| − ١ ، ر (س) = ٥ − |س − ٢|

17 أثبت أن الدالة د حيث د (س) = $\frac{|س| + ١}{|س|}$ زوجية ، وارسم منحنى د ،

ثم أوجد بيانيًا وجبريًا مجموعة حل المعادلة د (س) = ٢ س − ٢ ، وتحقق من صحة الحل.

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① مجموعة حل المعادلة : |س + ١|^٢ + |٢ س + ٣| = ٠ في ح هي ....

(أ) {−١ ، $\frac{-٣}{٢}$} (ب) ح (جـ) {١ ، $\frac{٣}{٢}$} (د) ∅

② مجموعة حل المعادلة : |س^٢ − ٤ س + ٣| = |س − ٣| في ح هي ....

(أ) {٠ ، ٢} (ب) {٢ ، ٣} (جـ) {٠ ، ٣} (د) {٠ ، ٢ ، ٣}

③ أصغر قيمة للمقدار : $\frac{|س| + |ص|}{|س + ص|}$ هي ....

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٢

④ إذا كان : ٢^س = ٦١ فإن : |س − ٦| + |س − ٥| = ...

(أ) −١١ (ب) −١ (جـ) ١ (د) ١١

⑤ إذا كان : أ^٢ ب < ٠ ، $\frac{أ}{ب}$ > ٠ فإن : $\sqrt{أ^٢} + \sqrt{ب^٢}$ − (ب − أ) = ...

(أ) ٢ أ (ب) −٢ ب (جـ) −٢ أ + ٢ ب (د) صفر

⑥ إذا كان : −٤ ≤ س ≤ ٦ وكان أ ≤ | ٤ س − ٨ | ≤ ب فإن : أ + ب = ...

(أ) ٢٤ (ب) ٢٠ (جـ) ١٨ (د) ١٦

⑦ حاصل ضرب جذرى المعادلة : $س^٢$ − ٣ | س | − ١٠ = ٠ يساوى ....

(أ) −٢٥ (ب) −١٠ (جـ) ١٠ (د) ٢٥

⑧ عدد قيم س الصحيحة التى تحقق أن : ٣ < | س | < ٨ يساوى ....

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٠

⑨ إذا كانت د (س) = | ٢ س − ٥ | ، ر (س) = | س + ١ |

فإن مجموعة حل المعادلة : (ر ∘ د) (س) = ٣ فى ح هى ....

(أ) {٢ ، −٤} (ب) $\{\frac{٣}{٢} ، \frac{٧}{٢}\}$ (جـ) {٣ ، ٧} (د) $\{\frac{٣}{٢} ، \frac{٩}{٢}\}$

---

٢ أوجد جبريًا فى ح* مجموعة حل كل مما يأتى :

① (س + ١) (| س | − ١) + $\frac{١}{٢}$ = صفر « $\{\frac{١}{\sqrt{٢}} ، −١ + \frac{١}{\sqrt{٢}} ، −١ − \frac{١}{\sqrt{٢}}\}$ »

② || ٢ س + ٣ | − ٨ | = ٥ « {−٨ ، ٥ ، ٠ ، −٣} »

③ $\frac{٢}{| س |}$ + | س | = ٣ « {٢ ، −٢ ، ١ ، −١} »

④ $\sqrt{(س − \frac{١}{س})^٢ + ٤}$ = ٢ « {١ ، −١} »

⑤ | $س^٢$ − ٣ | + $\frac{٢}{| س^٢ − ٣ |}$ = ٣ « {± ٢ ، ± $\sqrt{٢}$ ، ± $\sqrt{٥}$ ، ± ١} »

⑥ | ٤ − س | + | س − ٢ | = ١٠ « {٨ ، −٢} »

⑦ (| ٢ س − ٣ | − ٥) (| ٢ س − ٣ | + ٥) < ١١ « ح − $[\frac{-٣}{٢} ، \frac{٩}{٢}]$ »

1 الربط بالميكانيكا :

إذا كانت سرعة دراجة بخارية ع (ن) بالسنتيمتر/ثانية تعطى بالدالة ع حيث :

$$ع(ن) = \begin{cases} ٨ ن & ، ٠ \leq ن \leq ١٠ \\ ٨٠ & ، ١٠ < ن < ٢٠٠ \\ -٤ ن + ٨٨٠ & ، ٢٠٠ \leq ن < ٢٢٠ \end{cases}$$

حيث ن الزمن بالثانية

أوجد : (١) ع (١٠) (٢) ع (١٥٠) (٣) ع (٢١٠)

---

2 الربط بالهندسة : إذا كان ح محيط مربع طول ضلعه ل اكتب محيط المربع كدالة فى طول ضلعه ح (ل)

ثم أوجد : (١) ح (٣) (٢) ح $\left(\frac{١٥}{٤}\right)$

---

3 الربط بالهندسة : إذا كانت م مساحة دائرة طول نصف قطرها نق. اكتب المساحة كدالة فى طول نصف القطر م (نق)

ثم أوجد : (١) م $\left(\frac{١}{٢}\right)$ (٢) م (٥)

---

4 الربط بالصناعة : يعمل سعيد فى مصنع لإنتاج المصابيح الموفرة للطاقة ، فإذا كان يتقاضى ٨ جنيهات أجرًا عن كل ساعة عمل بالإضافة إلى ٠,٣ جنيهًا عن كل مصباح ينتج يوميًا.

(١) اكتب قاعدة الدالة د التى تعبر عن أجر سعيد إذا كان يعمل ٧ ساعات يوميًا.

(٢) هل الدالة د أحادية ؟ فسر إجابتك.

---

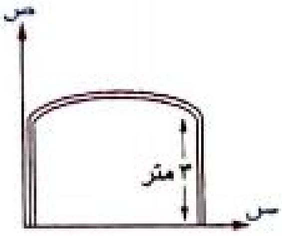
5 الربـط بالتجـارة : يدفع تاجر غلال ٥٠ جنيهًا عن كل طن يدخل أو يخرج من مسـتودعه كأجر تحميل أو تنزيل ، اكتب الدالة التى تمثل تكاليف التحميل أو التنزيل ومثلها بيانيًا.

---

6 الربط بالميكانيكا : يقطع جسم مسافة ف مترًا فى ٣ دقائق. إذا تحرك الجسم بسرعة ثابتة مقدارها ٣٠ مترًا / دقيقة ، بين أن سرعة الجسم ع تتغير عكسيًا بتغير الزمن (ن) لقطع هذه المسافة ، واكتب الدالة التى تمثل السرعة والزمن ومثلها بيانيًا ثم أوجد زمن قطع هذه المسافة إذا تحرك الجسم بسرعة ٤٥ مترًا / دقيقة.

٧ [ ] **الربط بالصناعة :** صممت بوابة حديدية ارتفاع جانبيها ٣ أمتار وقوسها على شكل جزء من منحنى الدالة د : د (س) = أ (س − ٢)^٢ + ٤

كما فى الشكل المقابل.



أوجد : (١) قيمة أ

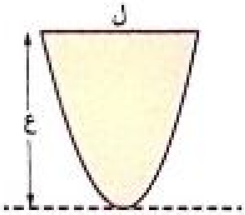
(٢) أقصى ارتفاع للبوابة.

(٣) عرض البوابة.

«− ١/٤ ، ٤ أمتار ، ٤ أمتار»

---

٨ [ ] **الربط بالهندسة :** إذا علمت أن مساحة الشكل المحصور بين منحنى الدالة التربيعية والقطعة المستقيمة الأفقية المرسومة بين أى نقطتين عليه والموضحة فى الشكل المقابل تعطى بالعلاقة م = ٢/٣ ل ع



(١) أوجد مساحة الشكل المحصور بين محور السينات ومنحنى الدالة

د : د (س) = س^٢ − ٦ س + ٥ بالوحدات المربعة.

(٢) ارسم على نفس الشبكة البيانية منحنيى الدالتين د ، ر حيث ر (س) = | س − ٣ | − ٢

ثم أوجد مساحة الجزء المحصور بينهما بالوحدات المربعة.

« ٣٢/٣ ، ٢٠/٣ وحدة مربعة»

---

٩ [ ] **تخطيط المدن :**

قطعة أرض محصورة بين منحنيى الدالتين د ، ر حيث : د (س) = | س − ٣ | − ٢ ، ر (س) = ٣ ، احسب مساحتها بالوحدات المربعة وإذا كان طول الوحدة ٨ أمتار احسب مساحة الأرض بالأمتار المربعة.

«١٦٠٠ م^٢»

---

١٠ [ ] **شبكات الطرق :** طريقان الأول يمثله منحنى الدالة د : د (س) = | س − ٥ | ، والثانى يمثله منحنى الدالة ر : ر (س) = ٥ − ٢/٣ س ، إذا تقاطع الطريقان فى نقطتى أ ، ب أوجد المسافة بين أ ، ب لأقرب كيلو متر إذا كانت وحدة الأطوال تمثل مسافة قدرها ٥ كيلو مترات.

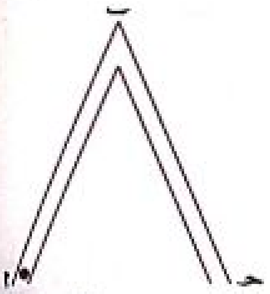
«٣٦ كم»

---

١١ [ ] **تطبيق حياتى على حل المتباينة :** تسمح إحدى شركات الغاز الطبيعى بتوظيف قارئ العداد إذا كان طوله يتراوح بين ١٧٨ سم ، ١٩٢ سم. عبر عن الأطوال الممكنة لمن يتقدم لشغل هذه الوظيفة بمتباينة القيمة المطلقة.

«| س − ١٨٥ | ≤ ٧»

١٢ **الربط بالميكانيكا :** يتحرك جسم بسرعة منتظمة مقدارها ٨ سم/ث من الموضع أ إلى الموضع حـ مرورًا بالموضع ب دون توقف ، وكانت المسافة بين الجسم والموضع ب تحسب بالقاعدة ف (ن) = ٨ | ٥ − ن | حيث ن الزمن بالثوانى ، ف المسافة بالسنتيمترات.



① احسب المسافة بين الجسم والموضع ب بعد ثانيتين وبعد ٨ ثوان.

ماذا تلاحظ ؟ فسر إجابتك.

② متى يكون الجسم على بعد ١٦ سم من الموضع ب ؟ فسر إجابتك.

③ متى يكون الجسم على بعد يقل عن ٨ سم من الموضع ب ؟

[٢٤ سم ، ٢٤ سم ، ٣ ، ٧ ،]٤ ، ٦[ ]

---

١٣ **تطبيق حياتى :** إذا سقط شعاع الضوء على سطح عاكس فإن مساره يخضع لدالة المقياس فيكون قياس زاوية السقوط مساويًا لقياس زاوية الانعكاس ، كذلك مسار كرة البلياردو قبل وبعد تصادمها مع حافة الطاولة فى بعض الحالات.

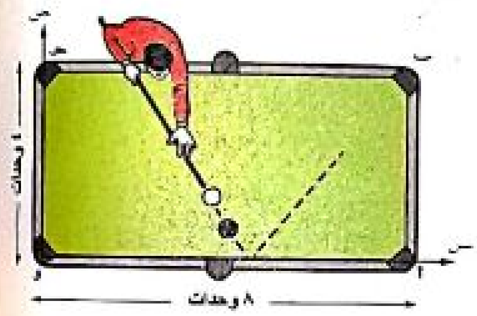


* **يوضح الشكل المقابل :**

تصويب لاعب البلياردو على الكرة السوداء ، باعتبار $\overleftrightarrow{\text{و س}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{و ص}}$ محورى الإحداثيات المتعامدة ، وأن مسار الكرة يتبع منحنى الدالة د حيث د (س) = $\frac{٤}{٣}$ | س − ٥ |

هل تسقط الكرة السوداء فى الجيب ب ؟

فسر إجابتك رياضيًا.



الوحدة الثانية

الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

دروس الوحدة

الدرس 1 الأسس الكسرية والمعادلات الأسية.

الدرس 2 الدالة الأسية وتطبيقاتها.

الدرس 3 الدالة العكسية.

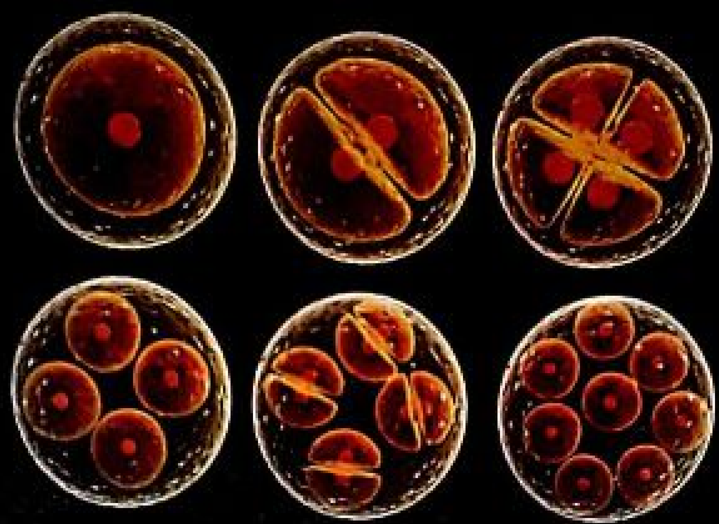
الدرس 4 الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البيانى.

الدرس 5 بعض خواص اللوغاريتمات.

فى نهاية الوحـــدة : تطبيقات حياتيـة على الوحدة الثانية.

الدرس 1

الأسس الكسرية والمعادلات الأسية



الجذر النونى

المعادلة : $س^ن = أ$ حيث $أ \in ح$ ، $ن \in ص^+$ لها ن من الجذور

وتستعرض فيما يلى بعض الحالات :

[١] إذا كان : ن عددًا زوجيًا ، $أ > ٠$

فإن المعادلة $س^ن = أ$ لها جذران حقيقيان أحدهما موجب والآخر سالب وباقى الجذور أعداد مركبة غير حقيقية (عندما $ن > ٢$) ويرمز للجذرين الحقيقيين بالرمزين $\sqrt[ن]{أ}$ ، $-\sqrt[ن]{أ}$ ويسمى الجذر النونى الذى له نفس إشارة أ بالجذر النونى الأساسى للعدد أ

فمثلًا : المعادلة $س^٦ = ٦٤$ لها جذران حقيقيان هما $\sqrt[٦]{٦٤} = ٢$ ، $-\sqrt[٦]{٦٤} = -٢$

وتوجد أربعة جذور أخرى مركبة غير حقيقية (حاول إيجادهم بالتحليل)

[٢] إذا كان : ن عددًا زوجيًا ، $أ < ٠$

فإن المعادلة $س^ن = أ$ ليس لها جذور حقيقية (جذورها أعداد مركبة غير حقيقية)

فمثلًا : عند حل المعادلة $س^٢ = -١٦$

فإن $س = \pm\sqrt{-١٦} = \pm ٤ ت$ (أعداد مركبة غير حقيقية)

[٣] إذا كان : ن عددًا فرديًا ، $أ \in ح - \{٠\}$

فإن المعادلة $س^ن = أ$ لها جذر حقيقى وحيد هو $\sqrt[ن]{أ}$ وباقى الجذور أعداد مركبة غير حقيقية

فمثلًا : المعادلة $س^٣ = -٢٧$ لها جذر حقيقى وحيد هو $\sqrt[٣]{-٢٧} = -٣$

ويوجد جذران مركبان غير حقيقيين (حاول إيجادهما بالتحليل)

٤ إذا كان : $ن \in ص^+$ ، أ = صفر فإن المعادلة $س^ن$ = صفر لها حل حقيقي وحيد هو س = ٠

(عدد جذور المعادلة يساوي ن وكل منها يساوي صفر عندما ن > ١)

فمثلاً : المعادلة $س^٣ = ٠$ لها ثلاثة جذور حقيقية متساوية وكل منها يساوي صفر

ملاحظة

$\sqrt[ن]{أ^ن} = |أ|$ إذا كان ن عددًا زوجيًا ، $\sqrt[ن]{أ^ن} = أ$ إذا كان ن عددًا فرديًا

فمثلاً : $\sqrt[٤]{(-٤)^٤} = |-٤| = ٤$ ، $\sqrt[٣]{(-٣)^٣} = -٣$

خواص الجذور النونية

إذا كان : أ ، ب عددين حقيقيين ، $\sqrt[ن]{أ}$ ، $\sqrt[ن]{ب} \in ح$ فإن :

١ $\sqrt[ن]{أ ب} = \sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب}$ ٢ $\sqrt[ن]{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt[ن]{أ}}{\sqrt[ن]{ب}}$ حيث ب ≠ ٠ لاحظ أن : $\sqrt[ن]{أ \pm ب} \ne \sqrt[ن]{أ} \pm \sqrt[ن]{ب}$

فمثلاً : $\sqrt[٣]{٢٧ ب^{١٥}} = \sqrt[٣]{٢٧} \times \sqrt[٣]{ب^{١٥}} = ٣ ب^٥$ ، $\sqrt[٤]{٨١ س^٤ ص^٨} = \sqrt[٤]{٨١} \times \sqrt[٤]{س^٤} \times \sqrt[٤]{ص^٨} = ٣ |س| ص^٢$

الأسس الكسرية

بفرض أن : $أ^م$ تمثل الجذر التربيعي الأساسي للعدد أ

∴ $أ^م = \sqrt{أ}$ وبتربيع الطرفين ∴ $(أ^م)^٢ = أ$ ∴ $أ^{٢م} = أ$

∴ ٢ م = ١ ∴ $م = \frac{١}{٢}$

أي أن : $أ^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{أ}$ **وبالمثل :** $أ^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{أ}$ ، $أ^{\frac{١}{٤}} = \sqrt[٤]{أ}$

تعريف

١ إذا كان : $ن \in ص^+ - \{١\}$ ، $أ \in ح$ فإن : $أ^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{أ}$

مع ملاحظة أن : إذا كان : ن عدد زوجي ، أ < ٠ فإن : $أ^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{أ} \notin ح$

فمثلاً : $٩^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٩} = ٣ \in ح$ ، $\left(\frac{-١}{٨}\right)^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{\frac{-١}{٨}} = \frac{-١}{٢} \in ح$

بينما : $(-١٦)^{\frac{١}{٤}} = \sqrt[٤]{-١٦} \notin ح$

٢ إذا كان م ، ن عددين صحيحين ليس بينهما عامل مشترك ، ن > ١ ، $\sqrt[ن]{أ} \in ح$

فإن : $أ^{\frac{م}{ن}} = (\sqrt[ن]{أ})^م = \sqrt[ن]{أ^م}$

فمثلاً : $(٨)^{\frac{٢}{٣}} = (\sqrt[٣]{٨})^٢ = ٢^٢ = ٤$ ، $(٨١)^{-\frac{٣}{٤}} = (\sqrt[٤]{٨١})^{-٣} = ٣^{-٣} = \frac{١}{٢٧}$

قوانين الأسس

إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين ، م ، ن عددين نسبيين ومع مراعاة استثناء الحالات التى يكون فيها المقام = صفر ، والحالات التى يكون فيها الأساس = صفر ، الأس = صفر معًا وأن تكون جميع التعبيرات المستخدمة معرفة فإن :

١ $أ^{صفر} = ١$	٢ $أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}$	٣ $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$
٤ $\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م-ن}$	٥ $(أ^{م})^{ن} = أ^{من}$	٦ $(أب)^{ن} = أ^{ن} ب^{ن}$
٧ $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{-ن} = \left(\frac{ب}{أ}\right)^{ن} = \frac{ب^{ن}}{أ^{ن}}$		

ملاحظــات

١ إذا كان : $أ \in ح^{-}$ فإن :

$أ^{ن} > ٠$ إذا كان ن عددًا صحيحًا زوجيًا

$أ^{ن} < ٠$ إذا كان ن عددًا صحيحًا فرديًا

فمثلًا : $(-٤)^{٢} = ١٦ > ٠$ بينما $(-٤)^{٣} = -٦٤ < ٠$

٢ • إذا كان : $س^{\frac{م}{ن}} = أ$ فإن : $س = أ^{\frac{ن}{م}}$ حيث م عدد فردى

• إذا كان : $س^{\frac{م}{ن}} = أ$ فإن : $س = \pm أ^{\frac{ن}{م}}$ حيث م عدد زوجى

بشرط أن يكون م ، ن عددان صحيحان ليس بينهما عامل مشترك (أى $\frac{م}{ن}$ عدد نسبى فى أبسط صورة) وإذا كان أحدهما زوجيًا فيجب أن يكون $أ \geq ٠$

٣ **خطأ شائع :** * $(-٣٢)^{\frac{٢}{١٠}} = \sqrt[١٠]{(-٣٢)^{٢}} = ٢$ (حل خطأ)

* $(-٣٢)^{\frac{٢}{١٠}} = \left(\sqrt[١٠]{-٣٢}\right)^{٢} =$ غير معرف فى ح (حل خطأ)

وذلك لأن الأس $\frac{٢}{١٠}$ ليس فى أبسط صورة ويجب اختصاره أولًا $\left[\frac{٢}{١٠} = \frac{١}{٥}\right]$

$\therefore (-٣٢)^{\frac{٢}{١٠}} = (-٣٢)^{\frac{١}{٥}} = \sqrt[٥]{-٣٢} = -٢$ (الحل الصحيح)

مثال ①

أوجد ناتج كل مما يأتى فى أبسط صورة :

١ $\sqrt[٥]{أ^{٣}} \times \sqrt{أ^{٣}}$ ٢ $(\sqrt[٥]{س})^{٢} \times \sqrt[٤]{س^{٣}}$ ٣ $(\sqrt[٣]{أ^{-٥}})^{٢} \times (\sqrt[٤]{أ^{٣}})^{٢}$

الحـــل

١ $\sqrt[٥]{أ^{٣}} \times \sqrt{أ^{٣}} = أ^{\frac{٣}{٥}} \times أ^{\frac{٣}{٢}} = أ^{\frac{٣}{٥} + \frac{٣}{٢}} = أ^{\frac{٢١}{١٠}} = أ^{٢} \times أ^{\frac{١}{١٠}} = أ^{٢} \sqrt[١٠]{أ}$

[٢] $\left(\sqrt[5]{\text{س}}\right)^{2} \times \sqrt[3]{\text{س}^{2}} = \text{س}^{\frac{2}{5}} \times \text{س}^{\frac{2}{3}} = \text{س}^{\frac{2}{5}+\frac{2}{3}} = \text{س}^{\frac{16}{15}} = \text{س} \times \text{س}^{\frac{1}{15}} = \text{س}\sqrt[15]{\text{س}}$

[٣] $\left(\sqrt[3]{\text{أ}^{-5}}\right)^{2} \times \left(\sqrt[4]{\text{أ}^{3}}\right)^{3} = \left(\text{أ}^{\frac{-5}{3}}\right)^{2} \times \left(\text{أ}^{\frac{3}{4}}\right)^{3} = \text{أ}^{\frac{-10}{3}} \times \text{أ}^{\frac{9}{4}} = \text{أ}^{\frac{-13}{12}} = \frac{1}{\text{أ}^{\frac{13}{12}}} = \frac{1}{|\text{أ}| \times \text{أ}^{\frac{1}{12}}} = \frac{1}{|\text{أ}|\sqrt[12]{\text{أ}}}$

مثال ٢

اختصر لأبسط صورة : $\dfrac{\sqrt[4]{8} \times \sqrt[8]{0.01} \times 125}{\sqrt[4]{(15)^{3}} \times \sqrt[8]{4^{5}} \times (36)^{-\frac{3}{8}}}$

الحل

المقدار $= \dfrac{\sqrt[4]{2^{3}} \times \sqrt[8]{(10)^{-2}} \times 5^{3}}{\sqrt[4]{(15)^{3}} \times \sqrt[8]{4^{5}} \times (36)^{-\frac{3}{8}}} = \dfrac{2^{\frac{3}{4}} \times (10)^{-\frac{1}{4}} \times 5^{3}}{(15)^{\frac{3}{4}} \times 4^{\frac{5}{8}} \times (36)^{-\frac{3}{8}}}$

$= \dfrac{2^{\frac{3}{4}} \times (2 \times 5)^{-\frac{1}{4}} \times 5^{3}}{(3 \times 5)^{\frac{3}{4}} \times (2^{2})^{\frac{5}{8}} \times (2^{2} \times 3^{2})^{-\frac{3}{8}}} = \dfrac{2^{\frac{3}{4}} \times 2^{-\frac{1}{4}} \times 5^{-\frac{1}{4}} \times 5^{3}}{3^{\frac{3}{4}} \times 5^{\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{5}{4}} \times 2^{-\frac{3}{4}} \times 3^{-\frac{3}{4}}}$

$= 2^{\frac{3}{4} - \frac{1}{4} - \frac{5}{4} + \frac{3}{4}} \times 3^{-\frac{3}{4} + \frac{3}{4}} \times 5^{-\frac{1}{4} + 3 - \frac{3}{4}} = 2^{0} \times 3^{0} \times 5^{2}$

$= 1 \times 1 \times 25 = 25$

مثال ٣

أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية :

[١] $3\text{س}^{5} = -96$
[٢] $\text{س}^{6} = -64$
[٣] $(\text{س} - 2)^{4} = 81$
[٤] $\text{س}^{\frac{3}{4}} = 27$
[٥] $\sqrt[5]{\text{س}^{2}} = 1$
[٦] $\sqrt[4]{(3\text{س} + 2)^{3}} = 8$
[٧] $\text{س}^{\frac{4}{3}} - 5 \times \text{س}^{\frac{2}{3}} + 4 = 0$
[٨] $(\text{س}^{2} - 4\text{س} - 13)^{\frac{3}{5}} = 8$

الحل

لاحظ أن المطلوب إيجاد مجموعة الحل فى ح أى إيجاد الجذور الحقيقية فقط.

[١] ∵ $3\text{س}^{5} = -96$ ∴ $\text{س}^{5} = -32$

∴ $\text{س} = \sqrt[5]{-32} = -2$ ∴ م.ح = $\{-2\}$

[٢] $\text{س}^{6} = -64$ ∵ $-64 < 0$ ، ٦ عدد زوجى ∴ م.ح = $\varnothing$

[٣] ∵ $(\text{س} - 2)^{4} = 81$ ∴ $\text{س} - 2 = \sqrt[4]{81} = 3$ أ، $\text{س} - 2 = -\sqrt[4]{81} = -3$

∴ $\text{س} = 3 + 2 = 5$ أ، $\text{س} = -3 + 2 = -1$ ∴ م.ح = $\{5 ، -1\}$

[٤] ∵ $\text{س}^{\frac{3}{4}} = 27$ ∴ $\text{س} = 27^{\frac{4}{3}} = (3^{3})^{\frac{4}{3}} = 3^{4}$

∴ $\text{س} = 81$ ∴ م.ح = $\{81\}$

٥ ∵ $\sqrt[5]{س^{2}} = 1$ ∴ $س^{\frac{2}{5}} = 1$

∴ $س = \pm 1^{\frac{5}{2}}$ ∴ $س = \pm 1$ ∴ م.ح = {١ ، -١}

٦ ∵ $\sqrt[4]{(3س + 2)^{3}} = 8$ ∴ $(3س + 2)^{\frac{3}{4}} = 8$ ∴ $3س + 2 = 8^{\frac{4}{3}}$

∴ $3س + 2 = (2^{3})^{\frac{4}{3}}$ ∴ $3س + 2 = 16$

∴ $س = \frac{14}{3}$ ∴ م.ح = $\{\frac{14}{3}\}$

٧ ∵ $س^{\frac{4}{3}} - 5 \times س^{\frac{2}{3}} + 4 = 0$ ∴ $(س^{\frac{2}{3}} - 1)(س^{\frac{2}{3}} - 4) = 0$

∴ $س^{\frac{2}{3}} = 1$ ومنها $س = \pm 1^{\frac{3}{2}} = \pm 1$

أ، $س^{\frac{2}{3}} = 4$ ومنها $س = \pm 4^{\frac{3}{2}} = \pm (2^{2})^{\frac{3}{2}} = \pm 2^{3} = \pm 8$

∴ م.ح = {١ ، -١ ، ٨ ، -٨}

حل آخر : نفرض $س^{\frac{2}{3}} = ك$ ∴ $ك^{2} - 5ك + 4 = 0$

∴ $(ك - 4)(ك - 1) = 0$ ∴ $ك = 4$ ∴ $س^{\frac{2}{3}} = 4$

∴ $س = \pm\sqrt{4^{3}} = \pm 8$ أ، $ك = 1$ ∴ $س^{\frac{2}{3}} = 1$

∴ $س = \pm\sqrt{1^{3}} = \pm 1$ ∴ م.ح = {١ ، -١ ، ٨ ، -٨}

٨ $س^{2} - 4س - 13 = 8^{\frac{5}{3}} = 32$ ∴ $س^{2} - 4س - 45 = 0$

∴ $(س - 9)(س + 5) = 0$ ∴ $س = 9$ أ، $س = -5$

∴ م.ح = {٩ ، -٥}

المعادلة الأسية

هى معادلة تتضمن متغيرًا (مجهولاً) فى الأس مثل ($2^{س + 1} = 8$)

قوانين المعادلة الأسية

لكل م ، ن ∈ ص ، أ ، ب ∈ ح - {-١ ، ٠ ، ١} نجد أن :

١ إذا كان : $أ^{ن} = 1$ فإن : ن = صفر

٢ إذا كان : $أ^{م} = أ^{ن}$ فإن : م = ن

٣ إذا كان : $أ^{ن} = ب^{ن}$

- وكان ن عددًا فرديًا فإن أ = ب
- وكان ن عددًا زوجيًا فإن أ = ± ب
- وكان أ ≠ ب فإن ن = صفر

مثال ٤

أوجد قيمة س التى تحقق كلاً من المعادلات الآتية :

[١] $٢^{س+٥} = ٨$ | [٢] $٣^{س^٢-٤} = ١$ | [٣] $٤^{س+٢} = س^{س+٢}$

[٤] $٤^{س-٣} = ٣^{٢س-٦}$ | [٥] $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{|س-٥|} = \left(٣\frac{٣}{٨}\right)^{-٢}$

الحـــل

[١] ∵ $٢^{س+٥} = ٨$ ∴ $٢^{س+٥} = ٢^٣$

∴ $س + ٥ = ٣$ ∴ $س = -٢$

[٢] ∵ $٣^{س^٢-٤} = ١$ ∴ $س^٢ - ٤ = ٠$

∴ $س = \pm ٢$

[٣] ∵ $٤^{س+٢} = س^{س+٢}$ ∴ إما $س = \pm ٤$

أ، $س + ٢ = ٠$ ومنها $س = -٢$ ∴ $س \in \{-٢ ، ٤ ، -٤\}$

[٤] ∵ $٤^{س-٣} = ٣^{٢س-٦}$ ∴ $٤^{س-٣} = ٣^{٢(س-٣)}$

∴ $٤^{س-٣} = ٩^{س-٣}$ ∵ $٤ \neq ٩$ ∴ $س - ٣ = ٠$ ومنها $س = ٣$

[٥] ∵ $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{|س-٥|} = \left(\frac{٢٧}{٨}\right)^{-٢}$ ∴ $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{|س-٥|} = \left(\left(\frac{٣}{٢}\right)^٣\right)^{-٢}$

∴ $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{|س-٥|} = \left(\frac{٣}{٢}\right)^{-٦} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٦}$ ∴ $|س - ٥| = ٦$

∴ $س - ٥ = \pm ٦$

∴ إما $س - ٥ = ٦$ أ، $س - ٥ = -٦$

ومنها $س = ١١$ | ومنها $س = -١$

مثال ٥

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

[١] $٢^{س} \times \sqrt[٣]{٤} = \left(\sqrt[٣]{١٦}\right)^{-١}$ | [٢] $٤^{س^٢-١} = ٨^{-س}$ | [٣] $\frac{٣^{٣س} + ٣^{٢س} + ٣^{س}}{٣^{٢س} + ٣^{س} + ١} = \frac{١}{٩}$

الحـــل

[١] ∵ $٢^{س} \times ٤^{\frac{١}{٣}} = (١٦)^{-\frac{١}{٣}}$ ∴ $٢^{س} \times (٢^٢)^{\frac{١}{٣}} = (٢^٤)^{-\frac{١}{٣}}$

∴ $٢^{س} \times ٢^{\frac{٢}{٣}} = ٢^{-\frac{٤}{٣}}$ ∴ $٢^{س+\frac{٢}{٣}} = ٢^{-\frac{٤}{٣}}$

∴ $س + \frac{٢}{٣} = -\frac{٤}{٣}$ ∴ $س = -٢$ ∴ مجموعة الحل = $\{-٢\}$

[٢] ∵ $٤^{س^٢-١} = ٨^{-س}$ ∴ $(٢^٢)^{س^٢-١} = (٢^٣)^{-س}$

∴ $٢^{٢س^٢-٢} = ٢^{-٣س}$ ∴ $٢س^٢ - ٢ = -٣س$

∴ $٢س^٢ + ٣س - ٢ = ٠$ ∴ $(٢س - ١)(س + ٢) = ٠$

∴ $٢س - ١ = ٠$ ومنها $٢س = ١$ ∴ $س = \frac{١}{٢}$

أ، $س + ٢ = ٠$ ∴ $س = -٢$ ∴ مجموعة الحل = $\{\frac{١}{٢}، -٢\}$

[٣] ∵ $\frac{٣^{٣س} + ٣^{٢س} + ٣^{س}}{٣^{٢س} + ٣^{س} + ١} = \frac{١}{٩}$ ∴ $\frac{٣^{س}(٣^{٢س} + ٣^{س} + ١)}{٣^{٢س} + ٣^{س} + ١} = ٣^{-٢}$

∴ $٣^{س} = ٣^{-٢}$ ∴ $س = -٢$ ∴ مجموعة الحل = $\{-٢\}$

مثال ٦

أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين :

[١] $٢^{س+١} + ٢^{س-١} = ٥$ [٢] $٥^{س} + \frac{١٢٥}{٥^{س}} = ٣٠$

الحل

[١] بأخذ $٢^{س-١}$ عامل مشترك ∴ $٢^{س-١}(٢^٢ + ١) = ٥$

∴ $٢^{س-١}(٤ + ١) = ٥$ ∴ $٢^{س-١} = ١$

∴ $س - ١ =$ صفر ∴ $س = ١$ ∴ مجموعة الحل = $\{١\}$

حل آخر : $٢^{س+١} + ٢^{س-١} = ٥$ ∴ $٢^{س} \times ٢ + ٢^{س} \times ٢^{-١} = ٥$

∴ $٢^{س}\left[٢ + \frac{١}{٢}\right] = ٥$ ∴ $٢^{س} \times \frac{٥}{٢} = ٥$

∴ $٢^{س} = ٢$ ∴ $س = ١$ ∴ مجموعة الحل = $\{١\}$

[٢] بضرب الطرفين × $٥^{س}$ ∴ $٥^{٢س} + ١٢٥ = ٣٠ \times ٥^{س}$

∴ $٥^{٢س} - ٣٠ \times ٥^{س} + ١٢٥ = ٠$

وبالتحليل : ∴ $(٥^{س} - ٥)(٥^{س} - ٢٥) = ٠$

∴ إما $٥^{س} - ٥ =$ صفر أ، $٥^{س} - ٢٥ = ٠$

∴ $٥^{س} = ٥$ | ∴ $٥^{س} = ٥^٢$

∴ $س = ١$ | ∴ $س = ٢$ ∴ مجموعة الحل = $\{١، ٢\}$

حل آخر :

بوضع $٥^{س} =$ ص ∴ ص + $\frac{١٢٥}{ص} = ٣٠$ وبضرب الطرفين في ص

∴ $ص^٢ - ٣٠ص + ١٢٥ = ٠$ ∴ $(ص - ٥)(ص - ٢٥) = ٠$

∴ ص = ٥ أ، ص = ٢٥ ∴ $٥^{س} = ٥$ ∴ $س = ١$

أ، $٥^{س} = ٥^٢$ ∴ $س = ٢$ ∴ مجموعة الحل = $\{١، ٢\}$

على الأسس الكسرية والمعادلات الأسية

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $أ^م \times أ^م = $ ....

(أ) $أ^{٢م}$ (ب) $أ^{م^٢}$ (جـ) $٢ أ^م$ (د) $م أ^م$

(٢) $\sqrt[٣]{أ^٢} \times \sqrt[٣]{أ^٢} = $ ....

(أ) $\sqrt[٣]{أ^٢}$ (ب) $\sqrt[٦]{أ^٤}$ (جـ) $\sqrt[٩]{أ^{١٢}}$ (د) $أ^٢ \sqrt[٣]{أ^٢}$

(٣) إذا كان : $٢^{س+١} = ٨$ فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٤) $٣^{س+٥} = \frac{١}{٢٧}$ فإن : س = ...

(أ) −٢ (ب) ٨ (جـ) −٨ (د) ٢

(٥) إذا كان : $٥^{س-١} = أ^{س-١}$ فإن : س = ...

(أ) ٥ (ب) ١ (جـ) −١ (د) صفر

(٦) مجموعة حل المعادلة : $٥^{س^٢-٤} = ٧^{س^٢-٤}$ هي ....

(أ) {٢} (ب) {−٢} (جـ) {٢ ، −٢} (د) {صفر}

(٧) إذا كانت : $٧^{س+١} = ٣^{٢س+٢}$ فإن : $٥^{س+١} = $ ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٥

(٨) إذا كان : $\left(\frac{١}{٢}\right)^{أ^٢-أ-٢} = ١$ حيث أ > صفر فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) ٣

(٩) مجموعة حل المعادلة : $٧^{س^٢} = ٤٩^{س+٤}$ هو ....

(أ) {−٢} (ب) {−٢ ، ٤} (جـ) {−٢ ، ٣} (د) {٢ ، −٤}

(١٠) إذا كان : $٣^{س} = ٢$ ، $٢^{ص} = ٩$ فإن : س ص = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٨ (د) ١٨

(١١) إذا كان : $٥^{س} = ٢$ فإن : $٢٥^{س} = $ ....

(أ) ١٠ (ب) ٦٢٥ (جـ) ٤ (د) ٢

(١٢) إذا كان : $٢^{س} = ٥$ فإن : $٢^{س+٢} = $ ....

(أ) ١٥ (ب) ٤ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

(١٣) إذا كان : $س^{\frac{٣}{٢}} = ٦٤$ فإن : س = ...

(أ) ٥١٢ (ب) ١٦ (جـ) ٤ (د) ٢

(١٤) إذا كانت : $س^{\frac{٢}{٥}} = ٤$ فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ١٦ (جـ) ± ٤ (د) ± ٣٢

(١٥) 📖 إذا كان : $٤ س^{٥} = ١٢٨$ فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ± ٢ (جـ) ٢ (د) −٢

(١٦) $(١٢٨)^{-\frac{٢}{٧}}$ = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) ٤

(١٧) 📖 $\sqrt[٤]{(١٦)^{-٣}}$ = ...

(أ) ٨ (ب) −٨ (جـ) $\frac{-١}{٨}$ (د) $-\frac{١}{٨}$

(١٨) إذا كان : س ، ص ∋ ح فإن : $\sqrt[٤]{س^{٢} ص^{٦}}$ = ...

(أ) $س ص^{٣}$ (ب) $|س ص^{٣}|$ (جـ) $\frac{١}{٢} س^{٢} ص^{٦}$ (د) $\pm س ص^{٣}$

(١٩) $\sqrt[٤]{١٦ س^{٤} ص^{٨}}$ = ...

(أ) $٢ س ص^{٢}$ (ب) $٢ |س| ص^{٢}$ (جـ) $٢ س |ص|^{٢}$ (د) $٢ س |ص^{٢}|$

(٢٠) إذا كان : $٢^{س - ١} = ٤٤$ فإن : $٢^{س - ٢}$ = ...

(أ) ١٨ (ب) ٢٢ (جـ) ١٠ (د) ١٦

(٢١) إذا كان : $س^{\frac{٥}{٣}} = ٢ ص^{\frac{٤}{٣}} = ٣٢$ فإن : س + ص = ...

(أ) ١٦ (ب) صفر (جـ) ١٦ ، −١٦ (د) صفر ، ١٦

(٢٢) مجموعة حل المعادلة : $٣^{س + ١} + ٣^{س} = ١٢$ في ح هي ....

(أ) {٠} (ب) {٣} (جـ) {١} (د) {١ ، ٠}

(٢٣) مجموعة حل المعادلة : $٣^{س} + ٣^{٢ - س} = ١٢$ هي ....

(أ) {١ ، ٢} (ب) {٠ ، ٢} (جـ) {٣ ، ٤} (د) {−١ ، −٢}

(٢٤) مجموعة حل المعادلة : $\sqrt[٣]{س^{٢}} - ٣ \sqrt[٣]{س} + ٢ = ٠$ هي ....

(أ) {١ ، ٨} (ب) {٩ ، ٢} (جـ) {٨} (د) {١}

(٢٥) مجموعة حل المعادلة : $٩^{س} - ٣٠ \times ٣^{س - ١} + ٩ =$ صفر هي ....

(أ) {٠ ، ١} (ب) {١ ، ٢} (جـ) {٠ ، ٢} (د) {٠ ، ٣}

(٢٦) عدد الجذور الحقيقية للمعادلة $س^{ن} = أ$ حيث ن عدد فردي هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ن

(٢٧) عدد الجذور الحقيقية للمعادلة : $س^{٦} = أ$ ، $أ > ٠$ هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٦

(٢٨) المعادلة : $س^{٣} = ٤$ عدد جذورها يساوي ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢٩) عدد الجذور الحقيقية للمعادلة : $س^{٤} = -١٦$ هو ....

(أ) صفر　　(ب) ١　　(ج) ٢　　(د) ٤

(٣٠) 📖 مجموعة الجذور الحقيقية للمعادلة : $(س - ٢)^{٤} = ١٦$ هى ....

(أ) $\{٠\}$　　(ب) $\{٤\}$　　(ج) $\{٨\}$　　(د) $\{٠ ، ٤\}$

(٣١) مجموعة حل المعادلة : $(س - ٣)^{\frac{٥}{٢}} = ٣٢$ فى ح هى ....

(أ) $\{٢\}$　　(ب) $\{١١\}$　　(ج) $\{١١ ، -٥\}$　　(د) $\{-١١ ، ١١\}$

(٣٢) إذا كانت : $س \in ح^{*}$ ، ن عدد صحيح زوجى فأى مما يأتى صحيح ؟

(أ) $س^{ن} > ٠$　　(ب) $س^{ن} < ٠$　　(ج) $س^{ن} \leq ٠$　　(د) $س^{ن} = ٠$

(٣٣) إذا كانت : $س \in ح^{-}$ ، ن عدد صحيح فردى فأى مما يأتى صحيح ؟

(أ) $س^{ن} > ٠$　　(ب) $س^{ن} < ٠$　　(ج) $س^{ن} \geq ٠$　　(د) $س^{ن} = ٠$

(٣٤) 📖 أى مما يأتى لا يساوى $\left(\sqrt[٥]{س^{٤}}\right)$ ؟

(أ) $\left(\sqrt[٥]{س}\right)^{٤}$　　(ب) $\sqrt[٤]{س^{٥}}$　　(ج) $س^{\frac{٤}{٥}}$　　(د) $\left(س^{\frac{١}{٥}}\right)^{٤}$

(٣٥) إذا كانت : $أ > ب > ٠ > ح$ فإن : $\frac{\sqrt[٤]{ب^{٤} ح^{٤}} + ب \sqrt{(أ - ح)^{٢}}}{\sqrt{أ^{٢} ب^{٢}}} = $ ....

(أ) ١　　(ب) -١　　(ج) $\frac{أ}{ب}$　　(د) $\frac{-ح}{٢}$

(٣٦) إذا كان : $أ < ٠ < ب < ح$ فأى من الأعداد الآتية لا ينتمى إلى ح ؟

(أ) $\sqrt[٤]{أ ب}$　　(ب) $\sqrt[٤]{ب ح}$　　(ج) $\sqrt[٥]{أ ب + ح}$　　(د) $\sqrt[٦]{أ ح}$

(٣٧) إذا كان : $\sqrt{٢} \times \sqrt[٣]{٣} = \sqrt[٦]{س}$ فإن : س = ...

(أ) ٢٧　　(ب) ٤٨　　(ج) ٧٢　　(د) ١٠٨

(٣٨) $\sqrt{٩^{١٦} س^{٢}} = $ ....

(أ) $٣^{٤} س$　　(ب) $٣^{٨} س^{٢}$　　(ج) $٩^{٤} س$　　(د) $٩^{٨} س^{٢}$

(٣٩) إذا كان : $٣^{س - ٢} = \sqrt[٤]{٢٧}$ فإن : س = ...

(أ) $\frac{١١}{٤}$　　(ب) $\frac{٤}{٣}$　　(ج) $\frac{٣}{٤}$　　(د) ٦

(٤٠) إذا كان : $٣^{س + ٢} = ٦^{س - ١}$ فإن : $٢^{س} = $ ....

(أ) ٥٤　　(ب) ٢٧　　(ج) $\frac{١}{٩}$　　(د) $\frac{١}{٣٦}$

(٤١) إذا كان : $٢^{س} = ٢٠$ ، $ن < س < ن + ١$ ، ن عدد صحيح فإن : ن = ...

(أ) ٤　　(ب) ٥　　(ج) ٦　　(د) ٧

(٤٢) إذا كان : $٢^{س} > ٠$ فإن : ....

(أ) $٠ < س < ١$　　(ب) $-١ < س < ٠$

(ج) $س < -١$　　(د) لا توجد قيمة لـ س تحقق ذلك.

(٤٣) العدد $(٢^{٢٤} + ٢^{٢٣} + ٢^{٢٢})$ يقبل القسمة على ....

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٩

(٤٤) إذا كان : $٢^{أ} = ٤^{ب}$ فإن : $٩^{\frac{أ}{ب}} + ١٦^{\frac{ب}{أ}} =$ ....

(أ) ٧ (ب) ١٢ (جـ) ٢٠ (د) ٢٥

(٤٥) إذا كان : $٢^{أ} = ٣$ ، $٣^{ب} = ٧$ ، $٧^{ح} = ١١$ فإن : $٢^{أبح} =$ ....

(أ) ١١ (ب) ٢٧ (جـ) ٢١ (د) ٢٣١

(٤٦) إذا كان : $٢^{س} = أ$ ، $٣^{س} = ب$ ، $٥^{س} = ح$ فإن : $(٩٠)^{س} =$ ....

(أ) أ ب ح (ب) $أ^{٢}$ ب ح (جـ) أ $ب^{٢}$ ح (د) أ + ٢ب + ح

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ اختصر لأبسط صورة :

(١) $\frac{(٢٧)^{-٣} \times (١٢)^{٢}}{١٦ \times (٨١)^{-٣}}$ «٣٠»

(٢) $\frac{٩^{٤ن+١} \times ٤^{٢-٢ن}}{٣^{٩ن+١} \times ٤٨^{١-ن}}$ «١٠»

(٣) $\frac{١٢٥ \times (١٥)^{ن-٣} \times (٢٥)^{ن+٢}}{(٧٥)^{ن} \times (٥)^{ن+٢}}$ « $\frac{١}{٢٧}$ »

(٤) $(١٨)^{\frac{١}{٢}} \times (١٢)^{\frac{٣}{٢}} \times \frac{١}{(٢٤)^{\frac{١}{٢}}}$ «٣٦»

٢ أثبت أن :

(١) $\frac{(٢٧)^{ص-\frac{١}{٢}} \times \sqrt[ص]{٧^{ص^{٢}+٢ص}}}{(٨١)^{ص-١} \times (٢١)^{٥-ص} \times (٤٩)^{ص-١}} = \frac{١}{٩}$

(٢) $\frac{(٣٤٣)^{٢س-\frac{١}{٣}} \times (٤)^{٣س+١}}{(١٩٦)^{٣س} \times ٤} = \frac{١}{٧}$

(٣) $\frac{١٢٥ \times \sqrt[٨]{٤^{٣}} \times ١٠^{-\frac{١}{٤}}}{٤^{\frac{٥}{٨}} \times \sqrt[٤]{٦^{-٣}} \times ١٥^{\frac{٣}{٤}}} = ٢٥$

(٤) $\frac{٣ \times ٢^{س+٢} + \sqrt{٤^{س+٢}}}{٢^{س+٢} - ٦ \times ٢^{س}} = ٨$

٣ أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

(١) $س^{\frac{٧}{٢}} = ١٢٨$

(٢) $س^{-\frac{٤}{٣}} = \sqrt[٣]{٣٢}$

(٣) $\sqrt[٣]{(س-١)^{٥}} = ٣٢$

(٤) $(٢س + ٣)^{\frac{٤}{٣}} = ٨١$

(٥) $(س + ١)^{-\frac{٥}{٢}} = (٣٢)^{-\frac{١}{٢}}$

(٦) $(س^{٢} - ٥س + ٩)^{\frac{٥}{٢}} = ٢٤٣$

(٧) $(\sqrt[٣]{س} + ٢)^{\frac{١}{٢}} = ٣$

(٨) $س^{\frac{٤}{٥}} - ٥س^{\frac{٢}{٥}} + ٤ = ٠$

(٩) $س^{\frac{٤}{٣}} - ١٠س^{\frac{٢}{٣}} + ٩ = ٠$

(١٠) $س - ٣س^{\frac{١}{٢}} + ٢ = ٠$

(١١) $س + ١٥ = ٨\sqrt{س}$

(١٢) $\sqrt[٣]{س^{٥}} - \sqrt[٣]{س^{٥}} = ٦$

(١٣) $\sqrt[٥]{س^{٤}} - ٣\sqrt[٥]{س^{٢}} = ٤$

(١٤) $\sqrt[٥]{س} - ٣ = -\frac{٢}{\sqrt[٥]{س}}$

٤ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

① $٥^{٢س - ١} = \frac{١}{١٢٥}$ «$\{-١\}$»

② $٥^{س + ٢} = س^{س + ٢}$ «$\{٥ ، -٢\}$»

③ $٢^{س^٢ - ٩} = ١$ «$\{٣ ، -٣\}$»

④ $(٣\sqrt{٣})^{|س|} = ٢٧$ «$\{٢ ، -٢\}$»

⑤ $٣^{|٢س - ٤|} = ٩^{٢س - ٢}$ «$\{\frac{٨}{٧}\}$»

⑥ $(\frac{٣}{٥})^{٢س - ١} = \frac{٢٧}{١٢٥}$ «$\{٢\}$»

⑦ $٥^{س - ١} \times ٧^{١ - س} = \frac{٢٥}{٤٩}$ «$\{٣\}$»

⑧ $\frac{٩^{س + ١} \times ٤^{س - ١}}{٣٦^{س}} = (\frac{٣}{٢})^{س}$ «$\{٢\}$»

⑨ $\frac{١٢^{٢س - ٢} \times ٩^{س + ١}}{١٨^{٢س} \times ٤^{٢س - ٢}} = ٩$ «$\{٢\}$»

⑩ $\frac{١}{٢٧}(\sqrt{٣})^{س + ٢} = ١$ «$\{٤\}$»

⑪ $(\sqrt{٣})^{س^٢ - ٥س} = ١$ «$\{٠ ، ٥\}$»

⑫ $٥^{س^٢ - ٥س} = ٠٫٠٠١٦$ «$\{١ ، ٤\}$»

⑬ $٥^{س^٢} = ٢٥^{س + ٤}$ «$\{-٢ ، ٤\}$»

⑭ $٢^{س^٢ - ٤٢} = (\frac{١}{٢})^{س}$ «$\{٦ ، -٧\}$»

⑮ $(\sqrt{٧})^{|س + ٢|} = ٤٩$ «$\{٢ ، -٦\}$»

⑯ $٣^{٢س - ٣} \times ٧^{٦ - ٤س} = ١$ «$\{\frac{٣}{٢}\}$»

⑰ $\sqrt{٩^{س} - ٢ \times ٣^{س + ١} + ٩} = ٢٤$ «$\{٣\}$»

⑱ $\sqrt{٢٥^{س - ٢} - \frac{٢}{٥} \times ٥^{س} + ١} = ١٢٤$ «$\{٤\}$»

٥ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

① $٥^{س + ١} + ٥^{س - ١} = ٢٦$ «$\{١\}$»

② $٣^{س + ٢} - ٣^{س + ٢} = ١٦٢$ «$\{٢\}$»

③ $٧^{٢ - س} + ٧^{-س} = ٥٠$ «$\{٠\}$»

④ $٥^{٢س} + ٢٥ = ٢٦ \times ٥^{س}$ «$\{٠ ، ٢\}$»

⑤ $٢^{س} + ٢^{٥ - س} = ١٢$ «$\{٢ ، ٣\}$»

⑥ $(\frac{١}{٢})^{س + ١} + (\frac{١}{٢})^{س + ٣} + (\frac{١}{٢})^{س + ٥} = ٨٤$ «$\{-٧\}$»

⑦ $٢^{٢س + ١} - ٣٣ \times ٢^{س} + ١٦ = ٠$ «$\{-١ ، ٤\}$»

⑧ $٥^{٢س - ٢} - ٦ \times ٥^{س - ١} + ٥ = ٠$ «$\{١ ، ٢\}$»

⑨ $٩^{س^٢ - ١} - ٣٦ \times ٣^{س^٢ - ٣} + ٣ = ٠$ «$\{١ ، -١ ، \sqrt{٢} ، -\sqrt{٢}\}$»

⑩ $١٠^{س} - ٥^{س - ١} \times ٢^{س - ٢} = ٩٥٠$ «$\{٣\}$»

٦

① إذا كان : $ص^{\frac{٢}{٣}} = ٢ س^{\frac{٥}{٢}} = ٦٤$ فأوجد قيمة : ٥ س + ٢ ص «٥٥٢»

② إذا كان : $س^{\frac{٢}{٣}} = ٣ ص^{\frac{٢}{٣}} = ٢٧$ فأوجد قيمة : س + ص «٢٦٠ أ، -١٨»

③ إذا كان : $س^{\frac{٤}{٣}} = ٩ ص^{-\frac{٢}{٣}} = ٨١$ فأوجد قيمة : | ٢ س ص | «٢»

7 اكتشف الخطأ :

(١) $-٩ = (-٩)^{\frac{٢}{٢}} = \sqrt{(-٩)^٢} = \sqrt{٨١} = ٩$

(٢) إذا كان : $س^٤ = ٨١$ فإن : $س = \sqrt[٤]{٨١}$ ∴ $س = ٣$

---

8 أوجد فى ح × ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

(١) $٤^{س+ص} = ١٢٨$ ، $٥^{س-٢ص-٢} = ١$ «$\{(\frac{١}{٢}، \frac{١}{٦})\}$»

(٢) $٣^س × ٥^ص = ٧٥$ ، $٣^ص × ٥^س = ٤٥$ «$\{(١، ٢)\}$»

(٣) $٣^س × ٣^ص = ٢٧$ ، $٣^س + ٣^ص = ١٢$ «$\{(١، ٢)، (٢، ١)\}$»

---

9 تفكير إبداعى : أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة :

$٩^{س+١} - ٣^{س+٢} - ٣^س + ٣ = ٠$ «$\{-٢، ١\}$»

---

10 تفكير إبداعى : إذا كان : $س^٣ = ص^٢$ وكان : $س^{ن+١} = ص^{ن-١}$

فما قيمة ن ؟ «٥»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : س < صفر فإن : $\sqrt{س^٢} - \sqrt[٣]{س^٣} - \sqrt{س^٢ - ٢س + ١} + ١ =$ ....

(أ) س (ب) − س (جـ) صفر (د) −١

(٢) إذا كان : $أ = \sqrt[٤]{\frac{\sqrt[٣]{٢}}{\sqrt{٧}}}$ فأى الأعداد الآتية عدد نسبى ؟

(أ) $أ^{١٢}$ (ب) $أ^{١٦}$ (جـ) $أ^{١٨}$ (د) $أ^{٢٤}$

(٣) أى مما يأتى لا يكون دائمًا صحيحًا ؟

(أ) $\left(\sqrt[٢٠]{\sqrt{٢}}\right)^{٢٠} = ٢$ (ب) $\sqrt[٥]{١٢٨} = ٢\sqrt[٥]{٤}$

(جـ) $\sqrt{س^٢ ص^٦} = س ص^٣$ (د) $\sqrt[٣]{س^٤}\sqrt[٣]{س^٤} = س^{\frac{٨}{٣}}$

(٤) مجموعة حل المعادلة : $س^{\frac{٢}{٣}} = س^{\frac{٣}{٢}}$ فى ح هى ....

(أ) $\{١\}$ (ب) $\{-١، ١\}$

(جـ) $\{٠، ١\}$ (د) $\{٠، ١، -١\}$

(٥) $\sqrt[٥]{\frac{٢}{٢٧}} = \frac{..............}{٣}$

(أ) $\sqrt[٥]{٢}$ (ب) $\sqrt[٥]{٤}$ (جـ) $\sqrt[٥]{١٨}$ (د) $٣\sqrt{٥}$

⑥ العلاقة : $\sqrt[ن]{أ^{ن}} = \left(\sqrt[ن]{أ}\right)^{ن}$ صحيحة لجميع قيم ....

(أ) $أ \in ح$ (ب) ن حيث ن عدد زوجي موجب.

(جـ) $\sqrt[ن]{أ} \in ح$ ، $ن \in ص^{+} - \{1\}$ (د) لا شيء مما سبق.

⑦ المعادلة : $س^{\frac{2}{3}} = أ$ يكون لها حل فى ح إذا كان ....

(أ) $أ \in ح$ (ب) $أ \in ح^{+}$ (جـ) $أ \in ح^{-}$ (د) $أ \in ح^{+} \cup \{0\}$

⑧ إذا كان : $\sqrt[3]{2\sqrt{3\sqrt{2}}} = \sqrt[6]{م\sqrt{2}}$ فإن : م = ...

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ١٢

⑨ $\sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[م]{أ} =$ ....

(أ) $\sqrt[نم]{أ}$ (ب) $\sqrt[ن+م]{أ}$ (جـ) $\sqrt[\frac{1}{ن}+\frac{1}{م}]{أ}$ (د) $\sqrt[نم]{أ^{م+ن}}$

---

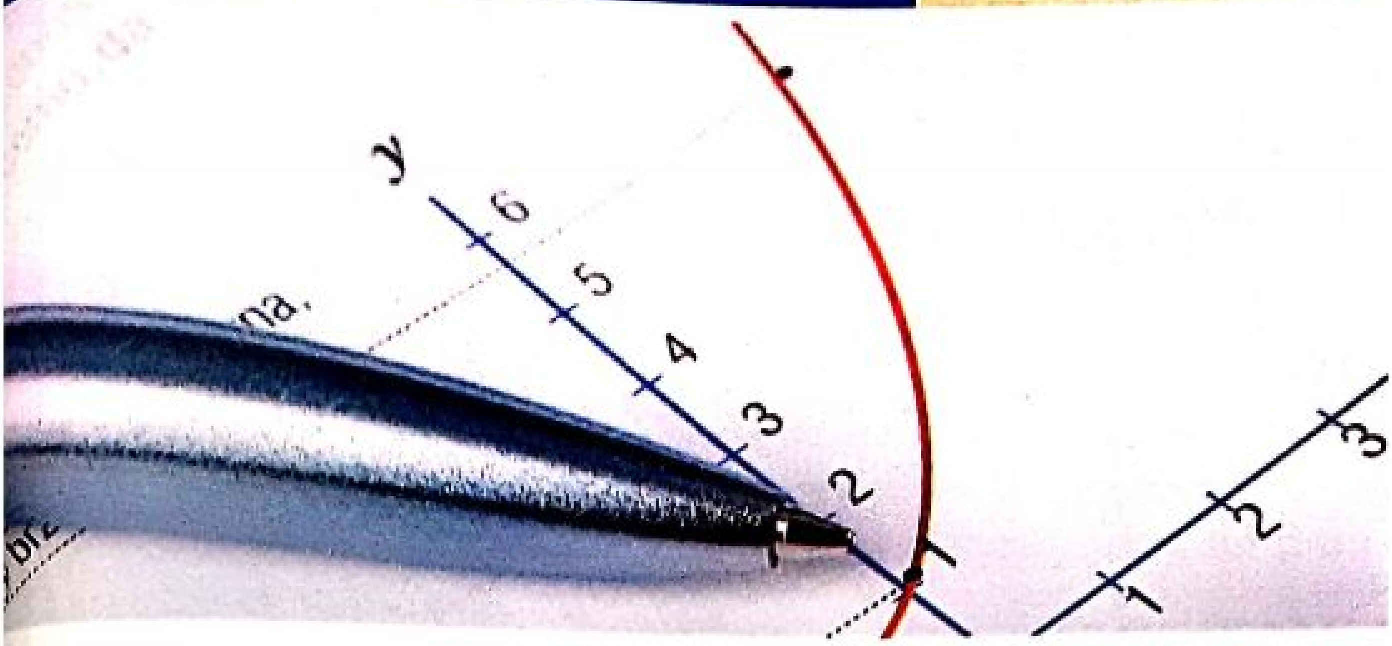
٢ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

① $5^{س-1} \times س^{2-س} = 5$ «{٥ ، ٢}» | ② $(س-3)^{(س-5)} = 1$ «{٥ ، ٤}»

③ $(س-3)^{(س-6)} = 1$ «{٦ ، ٤ ، ٢}»

الدرس **2**

الدالة الأسية وتطبيقاتها



تعريف

إذا كان : أ ∈ $ح^{+}$ − {١}

فإن الدالة د : ح ⟵ $ح^{+}$ حيث د (س) = $أ^{س}$ تسمى دالة أسية أساسها أ

فمثلًا :

- د : د (س) = $٣^{س}$ دالة أسية أساسها ٣ وأسها س
- د : د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س + ١}$ دالة أسية أساسها $\frac{١}{٢}$ وأسها (س + ١)

ملاحظـــة

لاحظ الفرق بين الدالة الجبرية والدالة الأسية :

- فى الدالة الجبرية يكون المتغير المستقل س موجود كأساس فى قاعدة الدالة أما الأس فهو عدد حقيقى.

  مثل : د : د (س) = $س^{٢}$ − ٢ س + ١ أو د : د (س) = $(س - ٣)^{٢}$ أو ...

- فى الدالة الأسية يكون المتغير المستقل س موجود كأس فى قاعدة الدالة أما الأساس فهو عدد حقيقى موجب لا يساوى الواحد.

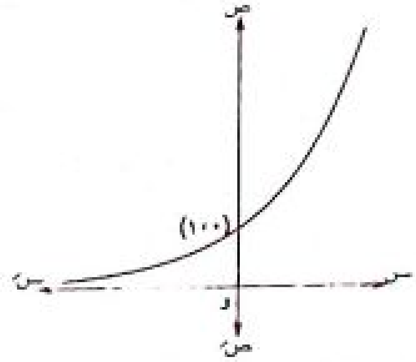
فمثلًا : د : د (س) = $٣^{س}$ أو د : د (س) = $٣^{س - ١}$ + ٢ دوال أسية

أما د : د (س) = $(-٣)^{س}$ أو د : د (س) = $(١)^{س}$ ليست دوال أسية

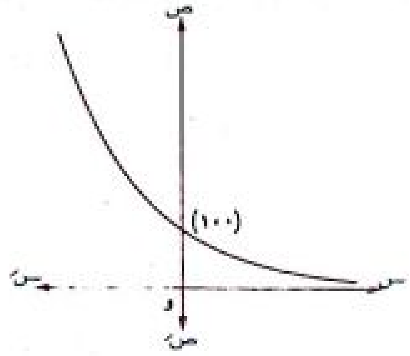
التمثيل البيانى للدالة الأسية

الشكل العام لمنحنى الدالة د : د (س) = أ^س كما هو موضح بالشكلين التاليين :

أ > ١



٠ < أ < ١

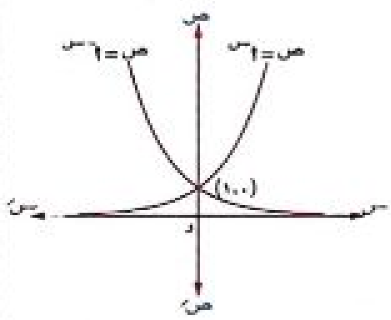


بعض خواص الدالة الأسية د : د (س) = أ^س

- مجالها ح
- مداها ح⁺ ويقع منحناها بأكمله فوق محور السينات.
- الدالة تزايدية على مجالها ح إذا كان أ > ١ وتسمى دالة نمو أسى معامله أ ومنحنى الدالة يقترب من محور السينات كلما قلت قيمة س
- الدالة تناقصية على مجالها ح إذا كان ٠ < أ < ١ وتسمى دالة تضاؤل أسى معامله أ ومنحنى الدالة يقترب من محور السينات كلما زادت قيمة س
- منحنى الدالة الأسية يمر بالنقطة (٠ ، ١)
- د : د (س) = أ^س هى دالة أحادية
- إذا كانت : د (س) = أ^س فإن : د (-س) = أ^-س = $\left(\frac{1}{أ}\right)^{س}$

  ويكون المنحنى ص = $\left(\frac{1}{أ}\right)^{س}$ صورة المنحنى ص = أ^س

  بالانعكاس فى محور الصادات



- أ^س ⟵ ∞ عندما س ⟵ ∞ حيث أ > ١ ، أ^س ⟵ ٠ عندما س ⟵ ∞ حيث ٠ < أ < ١

مثال ١

ارسم منحنى الدالة د : ح ⟵ ح⁺ ، د (س) = ٢^س متخذًا س ∈ [-٣ ، ٤]

ومن الرسم أوجد قيمة تقريبية لكل من :

١ د (١,٥) ، د $\left(-\frac{1}{2}\right)$ ٢ قيمة س عندما د (س) = ١٠

الحـــل

نكون الجدول الآتى :

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤
ص = ٢^س	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	١	٢	٤	٨	١٦

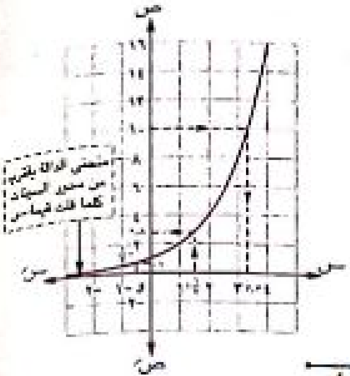
◀ الحـــل

١ **إيجاد قيمة د (١,٥) :**

عند س = ١,٥ نرسم مستقيمًا يوازى محور الصادات ليقابل المنحنى فى نقطة ثم نقرأ قيمة ص المناظرة على محور الصادات فنجدها ٢,٨ تقريبًا.

∴ د (١,٥) ≃ ٢,٨

وبالمثل د $\left(-\frac{١}{٢}\right)$ = ٠,٧



لاحظ أن

د (س) = ٢^س دالة نمو أسى حيث أ > ١

٢ **إيجاد قيمة س عندما د (س) = ١٠ أى عندما ٢^س = ١٠**

∴ عند ص = ١٠ نرسم مستقيمًا يوازى محور السينات يقابل المنحنى فى نقطة ثم نقرأ قيمة س المناظرة على محور السينات فنجدها ٣,٢ تقريبًا.

∴ عندما ٢^س = ١٠ تكون س ≃ ٣,٢

مثال ٢

ارسم منحنى الدالة د : ح ⟵ ح⁺ ، د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ متخذًا س ∈ [-٤ ، ٣]

ومن الرسم أوجد قيمة تقريبية لكل مما يأتى :

١ د (- ٢,٥)   **٢** $\sqrt[٤]{٢}$ **٣** س عندما $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ = ٧

◀ الحـــل

نكون الجدول الآتى :

س	-٤	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
ص = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$	١٦	٨	٤	٢	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٨}$

• **ومن الرسم نجد أن :**

١ د (- ٢,٥) ≃ ٥,٧

٢ ∵ $\sqrt[٤]{٢}$ = ٢^{$\frac{١}{٤}$} = (٢^{-١})^{$-\frac{١}{٤}$}

= $\left(\frac{١}{٢}\right)^{-\frac{١}{٤}}$ = د $\left(-\frac{١}{٤}\right)$

∴ د $\left(-\frac{١}{٤}\right)$ ≃ ١,٢

٣ عندما $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ = ٧

∴ س ≃ - ٢,٨



لاحظ أن

د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ دالة تضاؤل أسى حيث ٠ < أ < ١

لاحظ أنه : فى مثال ١ ، مثال ٢ :

منحنى د : د (س) = ٢^س هو صورة منحنى الدالة د : د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ بالانعكاس فى محور الصادات.

بعض التحويلات الهندسية للدالة د : د (س) = أ^س

١ الإزاحة الرأسية لمنحنى الدالة الأسية :

إذا كانت : د (س) = أ^س فإن المنحنى : ص = د (س) + جـ أى : ص = أ^س + جـ

يمثله بيانيًا المنحنى : ص = أ^س بإزاحة رأسية مقدارها | جـ |

- فى اتجاه و ص← إذا كان جـ > ٠ (إزاحة لأعلى)
- فى اتجاه و ص′← إذا كان جـ < ٠ (إزاحة لأسفل)

٢ الإزاحة الأفقية لمنحنى الدالة الأسية :

إذا كانت : د (س) = أ^س فإن المنحنى : ص = د (س + ب)

أى : ص = أ^(س + ب) يمثله بيانيًا المنحنى : ص = أ^س بإزاحة أفقية مقدارها | ب |

- فى اتجاه و س← إذا كان ب < ٠
- فى اتجاه و س′← إذا كان ب > ٠

٣ انعكاس منحنى الدالة الأسية فى محور السينات :

إذا كانت : د (س) = أ^س فإن : منحنى الدالة ص = − د (س)

أى : ص = − أ^س هو صورة المنحنى : ص = أ^س بالانعكاس فى محور السينات.

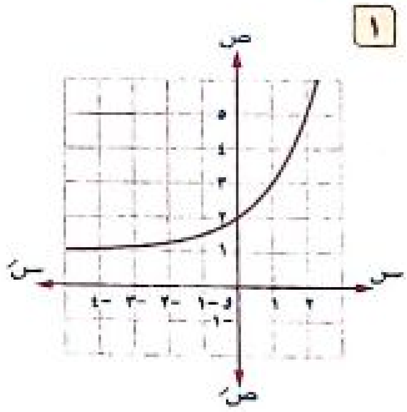
مثال ٣

مثل الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ثم أوجد المجال والمدى لكل منهم وبين أيًا منهم تزايدية وأيًا منهم تناقصية :

١ ص = ٢^س + ١ ٢ ص = ٢^(س − ١) ٣ ص = − $\left(\frac{١}{٢}\right)$^س

الحــل

١

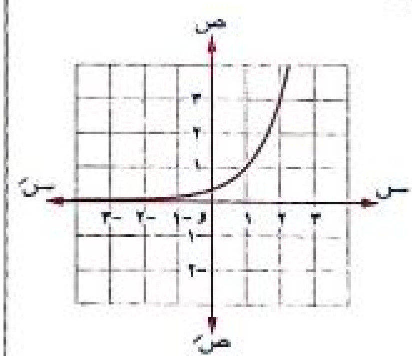


مجال الدالة = ح

، مدى الدالة =]١ ، ∞[

، الدالة تزايدية على مجالها

٢

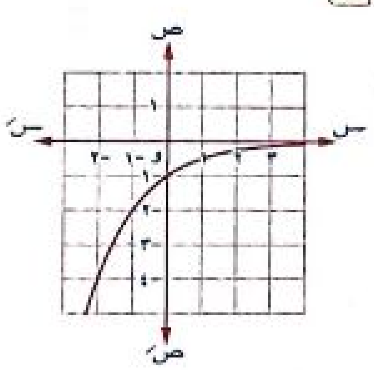


مجال الدالة = ح

، مدى الدالة =]٠ ، ∞[

، الدالة تزايدية على مجالها

٣



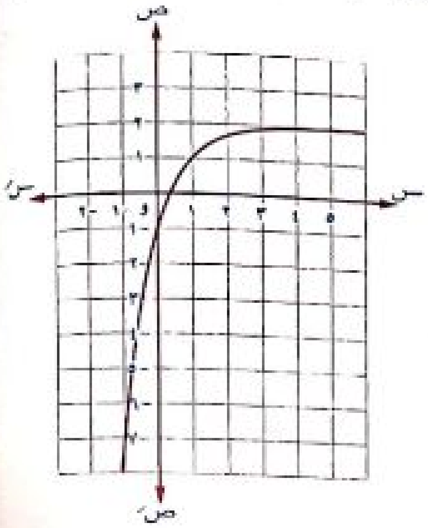
مجال الدالة = ح

، مدى الدالة =]− ∞ ، ٠[

، الدالة تزايدية على مجالها.

مثال ٤

مثل الدالة المعرفة بالقاعدة الآتية ثم أوجد المجال والمدى وبين هل الدالة تزايدية أم تناقصية : ص = −٣^(١ − س) + ٢



الحـــل

∵ ص = −٣^(١ − س) + ٢ = −٣^(−(س − ١)) + ٢

$= -\left(\frac{1}{3}\right)^{س - 1} + 2$

• المنحنى ص = $-\left(\frac{1}{3}\right)^{س - 1} + 2$

هو نفس المنحنى ص = $\left(\frac{1}{3}\right)^{س}$

بانعكاس فى محور السينات ثم إزاحة أفقية

وحدة واحدة فى اتجاه و س←

ثم إزاحة رأسية وحدتين فى اتجاه و ص

المجال = ح

، المدى =]− ∞ ، ٢[

، الدالة تزايدية على مجالها.

لاحظ أنه

يجب ترتيب إجراء التحويلات على المنحنى ص = $\left(\frac{1}{3}\right)^{س}$

للحصول على المنحنى ص = $-\left(\frac{1}{3}\right)^{س - 1}$ + ٢ كما يلى :

انعكاس فى محور السينات − إزاحة أفقية − إزاحة رأسية.

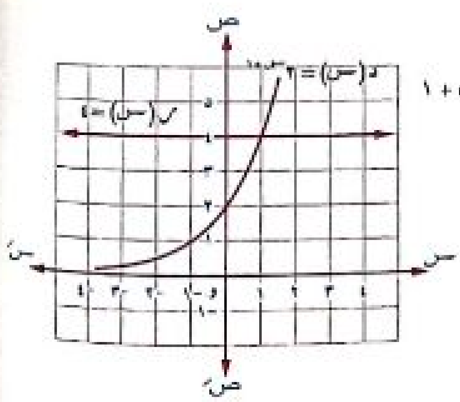
فإذا عكس الترتيب فإننا نحصل على منحنى آخر غير المنحنى المطلوب.

حل المعادلات الأسية بيانيًا

يعتمد الحل البيانى للمعادلات الأسية على فرض الطرف الأيمن للمعادلة على أنه دالة أسية د وفرض الطرف الأيسر للمعادلة على أنه أى دالة أخرى ر وبرسم الدالتين د ، ر فى شكل واحد وإيجاد الإحداثى السينى لنقطة (نقط) التقاطع نحصل على مجموعة الحل.

مثال ٥

أوجد بيانيًا فى ح مجموعة حل المعادلة : ٢^(س + ١) = ٤



الحـــل

نفرض أن الطرف الأيمن للمعادلة هو قاعدة الدالة د : د (س) = ٢^(س + ١)

والطرف الأيسر هو قاعدة الدالة ر : ر (س) = ٤

وبرسم الشكل البيانى للدالتين فى شكل واحد ومن الرسم :

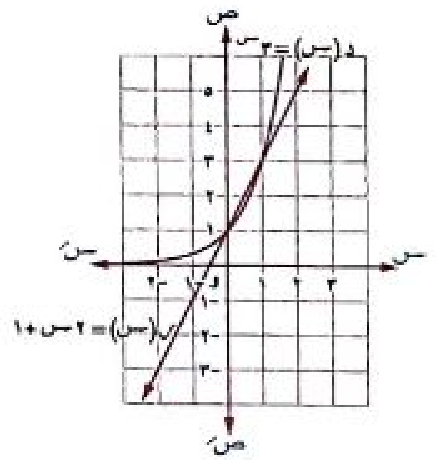
∴ نقطة التقاطع هى (١ ، ٤) ∴ س = ١

∴ مجموعة الحل = {١}

مثال ٦

أوجد بيانيًا فى ح مجموعة حل المعادلة : $٣^{س} = ٢ س + ١$

الحـــل



نفرض أن الطرف الأيمن للمعادلة هو قاعدة الدالة

د : د (س) = $٣^{س}$ والطرف الأيسر هو قاعدة الدالة

ر : ر (س) = ٢ س + ١

وبرسم الشكل البيانى للدالتين فى شكل واحد

ومن الرسم : الإحداثيان السينيان لنقطتى التقاطع هما ٠ ، ١

∴ مجموعة الحل = {٠ ، ١}

مثال ٧

إذا كانت د : ح ⟵ $ح^{+}$ ، د (س) = $٣^{س}$ فأثبت أن : $\frac{د(س + ٥) + د(س + ٣)}{د(س + ٣) + د(س + ١)} = د(٢)$

الحـــل

∵ الطرف الأيمن = $\frac{٣^{س + ٥} + ٣^{س + ٣}}{٣^{س + ٣} + ٣^{س + ١}} = \frac{٣^{س + ٣}(٣^{٢} + ١)}{٣^{س + ١}(٣^{٢} + ١)} = \frac{٣^{س + ٣}}{٣^{س + ١}} = ٣^{٢}$

، الطرف الأيسر = د (٢) = $٣^{٢}$ ∴ الطرفان متساويان.

حل آخر : الطرف الأيمن = $\frac{٣^{س + ٥} + ٣^{س + ٣}}{٣^{س + ٣} + ٣^{س + ١}} = \frac{٣^{س}(٣^{٥} + ٣^{٣})}{٣^{س}(٣^{٣} + ٣)} = ٩ = ٣^{٢} = د(٢)$

مثال ٨

إذا كانت د (س) = $٥^{س}$ أوجد قيمة س إذا كان : د (٢ س − ١) + د (٢ س + ١) = $\frac{٣٦}{٢٥}$

الحـــل

∵ د (٢ س − ١) + د (٢ س + ١) = $\frac{٣٦}{٢٥}$

∴ $٥^{٢س - ١} + ٥^{٢س + ١} = \frac{٣٦}{٢٥}$

∴ $٥^{٢س - ١}(١ + ٥^{٢}) = \frac{٣٦}{٢٥}$

∴ $٥^{٢س - ١} \times ٢٦ = \frac{٣٦}{٢٥}$

∴ $٥^{٢س - ١} = \frac{١}{٢٥}$

∴ $٥^{٢س - ١} = ٥^{-٢}$

∴ ٢ س − ١ = −٢

∴ س = $-\frac{١}{٢}$

حل آخر : ∵ د (٢ س − ١) + د (٢ س + ١) = $\frac{٣٦}{٢٥}$

∴ $٥^{٢س - ١} + ٥^{٢س + ١} = \frac{٣٦}{٢٥}$

∴ $٥^{٢س}(٥^{-١} + ٥) = \frac{٣٦}{٢٥}$

∴ $٥^{٢س} = ٥^{-١}$

∴ ٢ س = −١

∴ س = $-\frac{١}{٢}$

تطبيقات حياتية على النمو والتضاؤل الأسى

١ النمو الأسى

* الدالة د : د (ن) = أ (١ + ر)^ن تستخدم لتمثيل النمو الأسى بنسبة مئوية ثابتة فى فترات زمنية متساوية حيث أ القيمة الابتدائية ، ر النسبة المئوية للنمو فى الفترة الزمنية الواحدة ، ن الفترة الزمنية.

* ويمكن استنتاج هذه الدالة عند دراسة ظاهرة تزايد السكان على سبيل المثال : فإذا كان عدد سكان إحدى المدن فى أحد الأعوام أ وكان هذا العدد يتزايد سنويًا بنسبة مئوية ثابتة ر.

فإن عدد السكان بعد عام = أ + ر أ = أ (١ + ر)

، وبعد عامين = أ (١ + ر) + ر أ (١ + ر) = أ (١ + ر)^٢ وهكذا

فيكون عدد السكان بعد ن عام = أ (١ + ر)^ن

مثال ٩

اشترى وائل منزلًا بمبلغ ١٣٥٠٠٠٠ جنيه فإذا كان سعر المنزل يزداد بمعدل ٢,٥ ٪ كل سنة :

١ اكتب دالة أسية تمثل سعر المنزل بعد ن سنة من شرائه.

٢ قدِّر لأقرب جنيه سعر المنزل بعد مرور ٦ سنوات من شرائه.

الحل

أ = ١٣٥٠٠٠٠ ، ر = $\frac{٢,٥}{١٠٠}$ = ٠,٠٢٥ ، ن = ٦

١ دالة النمو الأسى د : د (ن) = أ (١ + ر)^ن ∴ د (ن) = ١٣٥٠٠٠٠ (١ + ٠,٠٢٥)^ن

∴ د (ن) = ١٣٥٠٠٠٠ (١,٠٢٥)^ن

٢ بالتعويض عن ن = ٦ ∴ د (٦) = ١٣٥٠٠٠٠ (١,٠٢٥)^٦ ≈ ١٥٦٥٥٨٦ جنيهًا

الربح المركب

* عند حساب الجملة (جـ) لمبلغ (أ) مستثمر فى أحد البنوك التى تعطى ربحًا سنويًا مركبًا (ر) كنسبة مئوية لعدد من السنوات (ن) بفترات تقسيم العائد السنوى إلى (س) فترة فإن جملة المبلغ تعطى بالعلاقة :

$$\text{جـ} = \text{أ}\left(1 + \frac{\text{ر}}{\text{س}}\right)^{\text{ن س}}$$

مثال ١٠

أودع رجل مبلغ ١٥٠٠٠ جنيه فى أحد البنوك التى تعطى فائدة سنوية مركبة قدرها ٧٪ أوجد جملة هذا المبلغ بعد مرور ١٠ سنوات فى كل من الحالات الآتية :

[١] العائد سنوى. [٢] العائد ربع سنوى. [٣] العائد شهرى.

الحل

∵ $ح = أ \left(1 + \frac{ر}{س}\right)^{ن س}$

[١] ∵ العائد سنوى أى أن عدد فترات التقسيم = ١ ∴ س = ١

∴ ح = ١٥٠٠٠ $(1 + 0{,}07)^{10} \approx$ ٢٩٥٠٧,٢٧ جنيه

[٢] ∵ العائد ربع سنوى أى أن عدد فترات التقسيم = ٤ ∴ س = ٤

∴ ح = ١٥٠٠٠ $\left(1 + \frac{0{,}07}{4}\right)^{10 \times 4} \approx$ ٣٠٠٢٣,٩٦ جنيه

[٣] ∵ العائد شهرى أى أن عدد فترات التقسيم = ١٢ ∴ س = ١٢

∴ ح = ١٥٠٠٠ $\left(1 + \frac{0{,}07}{12}\right)^{10 \times 12} \approx$ ٣٠١٤٤,٩٢ جنيه

٢ التضاؤل الأسى

الدالة د : د (ن) = أ $(1 - ر)^{ن}$ تستخدم لتمثيل التضاؤل الأسى حيث أ القيمة الابتدائية ، ر النسبة المئوية للتضاؤل فى الفترة الزمنية الواحدة ، ن الفترة الزمنية.

مثال ١١

يتناقص عدد المرضى بفيروس الالتهاب الكبدى الوبائى حـ بمعدل ١٥٪ سنويًا نتيجة اكتشاف علاج له فإذا كان عدد المرضى فى إحدى الدول ٨٠٠٠٠٠٠ مريض فاكتب دالة أسية تمثل عدد المرضى بعد ن سنة من اكتشاف العلاج ثم قدر عدد المرضى بعد ٨ سنوات.

الحل

أ = ٨٠٠٠٠٠٠ ، ر = ٠,١٥ ، ن = ٨

الدالة الأسية د : د (ن) = ٨٠٠٠٠٠٠ $(1 - 0{,}15)^{ن}$ = ٨٠٠٠٠٠٠ $(0{,}85)^{ن}$

وعند ن = ٨ فإن عدد المرضى = ٨٠٠٠٠٠٠ $(0{,}85)^{8} \approx$ ٢١٧٩٩٢٤ مريضًا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت د : د (س) = أ^س دالة أسية فإن : أ ∈ ....

(أ) ح (ب) ح⁺ (جـ) ح⁻ (د) ح⁺ − {١}

(٢) إذا كان : د (س) = $٣^{س+٢}$ فإن : د (−٢) = ...

(أ) ٣ (ب) صفر (جـ) −١ (د) ١

(٣) إذا كان : د (س) = $٤^{س-١}$ فإن : د (س + ١) = ...

(أ) $٤^{س}$ (ب) $٤^{س+١}$ (جـ) $٤^{س+٢}$ (د) $٢^{س}$

(٤) إذا كانت : د (س) = $٢^{س}$ فإن : د (− س) = ...

(أ) $-٢^{س}$ (ب) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ (جـ) $٢^{س+١}$ (د) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{-س}$

(٥) إذا كانت : د (س) = $(٥)^{-س}$ فإن : $\frac{د (س - ١)}{د (س + ١)}$ = ...

(أ) ٥ (ب) $\frac{١}{٥}$ (جـ) ٢٥ (د) $\frac{١}{٢٥}$

(٦) إذا كانت : د (س − ١) = $٢^{س+١}$ فإن : د (س) = ...

(أ) $٢^{س}$ (ب) $٢^{س-١}$ (جـ) $٢^{س+٢}$ (د) $٢^{س-٢}$

(٧) إذا كانت : د (س) = $أ^{س}$ فإن : د (س + ١) × د (س − ١) = د (..............)

(أ) ٢ س + ١ (ب) $أ^{٢س}$ (جـ) ٢ س (د) ٢

(٨) إذا كان : د (س + ١) = $٢^{س}$ وكان : د (أ) = ٨ فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٥

(٩) إذا كانت : د (س) = $٣^{س-٢}$ فإن مجموعة حل المعادلة : د (س − ١) = ٨١ هي ....

(أ) {٧} (ب) {٥} (جـ) {٤} (د) {٣}

(١٠) إذا كان د (س) = $٢^{س}$ فإن مجموعة حل المعادلة : د (٢ س) − د (س + ١) = صفر هي ....

(أ) {٠} (ب) {٠ ، ١} (جـ) {١} (د) {−١}

(١١) إذا كانت : د (س) = $٣^{س}$ فإن قيمة س التى تحقق المعادلة : د (س + ١) – د (س – ١) = ٢٤ هى ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٨ (د) صفر

(١٢) إذا كانت : د (س) = $٣^{س}$ فإن قيمة س التى تحقق العلاقة :

د (٢ س) – ٢٤ د (س – ١) – د (٢) = ٠ هى ....

(أ) ٢ ، $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢ ، صفر (جـ) ٢ (د) ٢ ، –١

(١٣) تكون الدالة الأسية التى أساسها أ تزايدية إذا كانت ....

(أ) أ > ٠ (ب) أ > ١ (جـ) ٠ < أ < ١ (د) أ = ١

(١٤) تكون الدالة الأسية التى أساسها أ تناقصية إذا كانت ....

(أ) أ > ٠ (ب) أ < ٠ (جـ) ٠ < أ < ١ (د) –١ < أ < ٠

(١٥) مدى الدالة د : د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ هو ....

(أ)]–∞ ، ∞[(ب)]–∞ ، ٠] (جـ)]٠ ، ∞[(د)]١ ، ∞[

(١٦) إذا كانت د (س) = $٢^{-س}$ فإن : د (س) تكون تناقصية عند س ∈ ....

(أ) ح (ب) $ح^{+}$ (جـ) $ح^{-}$ (د) ∅

(١٧) أى من الدوال الآتية تكون متزايدة على مجالها ؟

(أ) د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ (ب) د (س) = $٣^{-س}$

(جـ) د (س) = $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س}$ (د) د (س) = $٥^{س}$

(١٨) إذا كان : ر(س) = $\left(\frac{-١}{٢}\right)^{س+١}$ فإنها تعبر عن ....

(أ) دالة أسية أساسها $\left(\frac{-١}{٢}\right)$ (ب) دالة أسية أسها (س + ١)

(جـ) ليست دالة أسية لأن الأساس < ٠ (د) (أ) ، (ب) معًا.

(١٩) إذا كانت د (س) = $٢^{س+١}$ وكانت النقطة (أ ، $\frac{١}{٢}$) ∈ بيان د فإن : أ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) –١ (جـ) ٢ (د) –٢

(٢٠) إذا كانت : $ص_١ = ٢^{س}$ ، $ص_٢ = ٣^{س}$ ، $ص_٣ = ٤^{س}$ حيث س < ٠

فإن : ....

(أ) $ص_١ > ص_٢ > ص_٣$ (ب) $ص_١ > ص_٣ > ص_٢$

(جـ) $ص_٣ > ص_٢ > ص_١$ (د) $ص_٣ > ص_١ > ص_٢$

(٢١) إذا كان : د (س) = أ^س فإن : ....

(أ) د (س + ص) = د (س) + د (ص) (ب) د (س − ص) = د (س) − د (ص)

(جـ) د (س + ص) = د (س) . د (ص) (د) د (س ص) = د (س) . د (ص)

(٢٢) إذا تحرك منحنى الدالة د : د (س) = ٢^س وحدة واحدة لليسار

فإن الدالة الجديدة هى ر : ر (س) = ...

(أ) ٢^(س + ١) (ب) ٢^(س − ١) (جـ) −٢^س (د) −٢^(١ − س)

(٢٣) منحنى الدالة د : د (س) = ٣^س هو صورة منحنى الدالة ر : ر (س) = −٣^س بالانعكاس فى ....

(أ) ص = ٠ (ب) س = ٠ (جـ) ص = س (د) ص = − س

(٢٤) معادلة محور التماثل لمنحنى الدالتين د ، ر حيث د (س) = ٣^س ، ر (س) = $(\frac{1}{3})^{س}$ هى ....

(أ) ص = ٠ (ب) س = ٠ (جـ) ص = س (د) ص = − س

(٢٥) منحنى الدالة د : د (س) = ٥^س يقطع محور الصادات فى النقطة ....

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٠ ، ١) (جـ) (٥ ، ١) (د) (١ ، ٥)

(٢٦) منحنى الدالة د : د (س) = ٢^(س + ٢) يقطع محور الصادات فى النقطة ....

(أ) (٠ ، ١) (ب) (٠ ، ٢) (جـ) (٠ ، ٤) (د) (٠ ، ٨)

(٢٧) المستقيم ص = ٩ يقطع منحنى الدالة د : د (س) = ٣^س فى النقطة ....

(أ) (٠ ، ١) (ب) (٢ ، ٠) (جـ) (٢ ، ٩) (د) (١ ، ٩)

(٢٨) إذا كانت النقطة (أ ، ب) حيث أ ≠ ٠ تقع على منحنى الدالة ص = ٢^س فأى من النقط الآتية تقع على منحنى الدالة ص = $(\frac{1}{2})^{س}$ ؟

(أ) (أ ، ب) (ب) (−أ ، ب) (جـ) (أ ، −ب) (د) (أ ، $\frac{1}{2}$ ب)

(٢٩) إذا كانت النقطة (أ ، ب) تقع على منحنى الدالة : ص = ٢^س فأى النقط الآتية تقع على منحنى الدالة ص = ٢^(س + ٣) ؟

(أ) (أ ، ب) (ب) (أ + ٣ ، ب) (جـ) (أ ، ب + ٣) (د) (أ ، ٨ ب)

(٣٠) الدالة الأسية د حيث د (س) = أ^س ، أ > ١ يقترب خطها البيانى من ....

(أ) محور السينات (الاتجاه الموجب) (ب) محور السينات (الاتجاه السالب)

(جـ) محور الصادات (الاتجاه الموجب) (د) محور الصادات (الاتجاه السالب)

(٣١) في الدالة الأسية د : د (س) = $أ^{س}$ ، أ > ١ تكون د (س) > ١ عندما س ∈ ....

(أ) ح (ب) $ح^{+}$ (ج) $ح^{-}$ (د) ص

(٣٢) أى من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية تمثل دالة نماء أسى ؟

(أ) د (س) = $٢^{-س}$ (ب) د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$

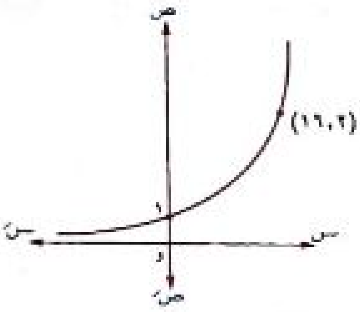
(ج) د (س) = $٣^{س}$ (د) د (س) = $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س}$

(٣٣) أى من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية تمثل دالة تضاؤل أسى ؟

(أ) د (س) = $٢^{س}$ (ب) د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{-س}$

(ج) د (س) = $٣^{س}$ (د) د (س) = $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س}$

(٣٤) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة ص = $أ^{س}$



فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣

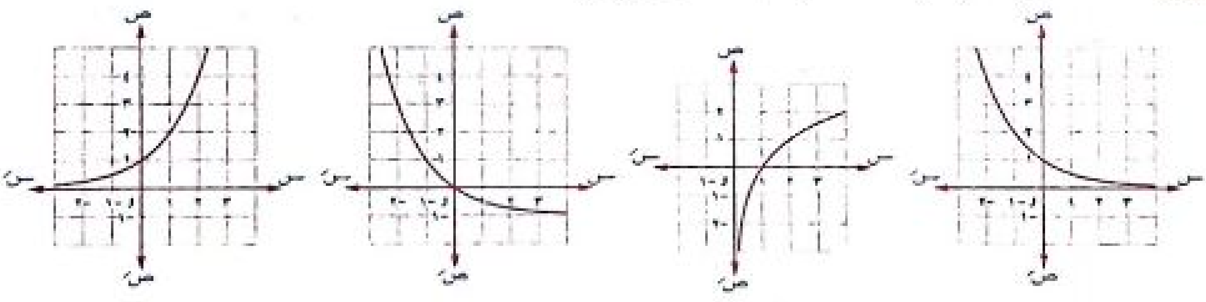
(ج) ٤ (د) ٩

(٣٥) في الدالة الأسية ر حيث ر (س) = $أ^{س}$ ، ٠ < أ < ١ تكون ٠ < $أ^{س}$ < ١

عندما س ∈ ....

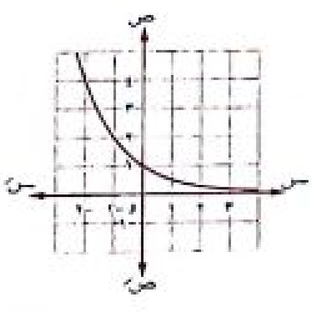
(أ)]٠ ، ∞[(ب)]-∞ ، ٠[(ج)]١ ، ∞[(د)]-∞ ، ١[

(٣٦) الدالة د حيث د (س) = $٢^{س}$ يمثلها الشكل البيانى ....



(أ) (ب) (ج) (د)

(٣٧) الشكل المقابل يمثل الدالة د حيث ....



(أ) د (س) = $٢^{س+١}$ (ب) د (س) = $٢^{-س}$

(ج) د (س) = $٢^{-س}$ (د) د (س) = $٢^{س}$

♣ (٣٨) جملة مبلغ ٥٠٠٠ جنيه موضوع فى بنك يعطى فائدة مركبة سنوية قدرها ٥٪ لمدة ٧ سنوات ≃ .... جنيه.

(أ) ٦٧٥٠ (ب) ٧٠٣٥,٥ (جـ) ٥٣٥٠ (د) ٨٥٠٠

♣ (٣٩) اشترى جلال سيارة بمبلغ ٢٠٠٠٠٠ جنيه فإذا كان سعر السيارة يتناقص بمعدل ٠,٤ ٪ كل سنة ، أى الدوال الآتية يعبر عن سعر السيارة بعد ن سنة ؟

(أ) ص = ٢٠٠٠٠٠ × $(٠,٤)^{ن}$ (ب) ص = ٢٠٠٠٠٠ $(٠,٩٩٦)^{ن}$

(جـ) ص = ٢٠٠٠٠٠ × $(١,٤)^{ن}$ (د) ص = ٢٠٠٠٠٠ $(٠,٢)^{ن}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ بين أيًا من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية دالة أسية ، ثم اكتب أسها وأساسها :

(١) د (س) = ٢ $س^{٢}$ | (٢) د (س) = $\frac{٢}{٣}$ $(٥)^{س}$ | (٣) د (س) = $\frac{١}{س - ١}$

(٤) د (س) = ٣ $س^{٢}$ − ١ | (٥) د (س) = $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س - ١}$ | (٦) د (س) = $(-٧)^{س}$

٢ إذا كانت : د (س) = $٥^{س}$ فأوجد قيمة : $\frac{د (س + ٤) - د (س + ٣)}{د (س + ٥) - د (س + ٤)}$ ‏ $\frac{١}{٥}$

٣ إذا كانت : د (س) = $٧^{س + ١}$

فأوجد قيمة س التى تحقق : د (٢ س − ١) + د (س − ٢) = ٥٠ ‏ ١

٤ إذا كانت : $د_{١}$ (س) = $٣^{س}$ ، $د_{٢}$ (س) = $٩^{س}$

فأوجد قيمة س التى تحقق : $د_{١}$ (٢ س − ١) + $د_{٢}$ (س + ١) = ٧٥٦ ‏ ٢

٥ إذا كانت د : ح ← $ح^{+}$ حيث د (س) = $ص^{س}$ فأثبت أن : $\frac{د (س + ١) + د (س + ٢)}{د (س + ١) + د (س)}$ = ص

٦ إذا كانت : د (س) = $٣^{س}$ فأثبت أن : $\frac{د (٢ س + ٢) + د (٢ س − ١)}{٥ د (٢ س) − ٧ د (٢ س − ١)} = \frac{٧}{٢}$

٧ إذا كانت : د (س) = $٣^{٢ س - ١}$ فأثبت أن : $\frac{د (س + ١) × د (س + ٢)}{د (س + ٣)}$ = د (س)

٨ إذا كانت : د (س) = $٢^{س}$ فأثبت أن : $\frac{د (س + ١)}{د (س − ١)} + \frac{د (س − ١)}{د (س + ١)} = \frac{١٧}{٤}$

٩ إذا كانت : د (س) = $٧^{س}$

أوجد قيمة س إذا كان : د (٢ س − ١) + د (٢ س + ١) = $\frac{٥٠}{٤٩}$ ‏ ٠ ، $-\frac{١}{٢}$

١٠ إذا كانت : د (س) = $٢^{س}$ ، $\dfrac{\text{د}(\text{س}+١)-\text{د}(\text{س})}{\text{د}(\text{س})-\text{د}(\text{س}-١)}$ = د (س − ٢) **فأوجد قيمة : س** «٣»

---

١١ إذا كانت : د (س) = $٣^{-س}$ **فأوجد مجموعة حل المعادلة :** $\dfrac{\text{د}(٢\text{س}+١)}{\text{د}(\text{س}-١)}$ = ٧٢٩ «{−٨}»

---

١٢ إذا كانت : د (س) = $٢^{س-١}$

فأوجد قيمة س التى تحقق : د (س + ٢) + د (٤ − س) = ٣٠ «٢ ، أ ٠»

---

١٣ إذا كانت : د (س) = $٢^{س}$

فأوجد مجموعة حل المعادلة : د (٢ س) − ٦ د (س) + د (٣) = ٠ «{٢ ، ١}»

---

١٤ إذا كانت : د (س) = $٣^{س}$

أوجد مجموعة حل المعادلة : د (س) + د $\left(\dfrac{\text{س}}{٢}\right)$ = ١٢ «{٢}»

---

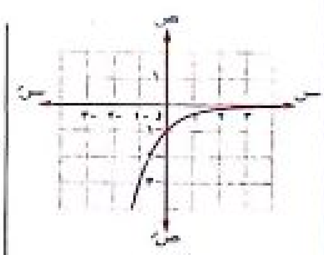
١٥ إذا كانت : د (س − ٢) = $٣^{س}$

أوجد قيمة س التى تحقق أن : د (٣ س + ١) − د (٣ س − ١) = ٢٤ «صفر»

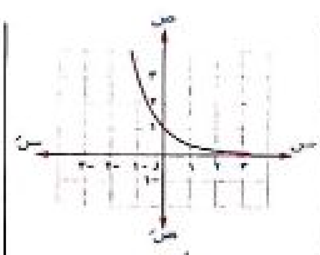
---

١٦ **اختر الشكل البيانى المناسب لكل من قواعد الدوال الآتية :**

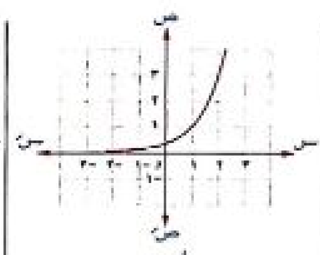
(١) ص = $٣^{س}$	(٢) ص = $٣^{-س}$	(٣) ص = $-٣^{س}$	(٤) ص = $-٣^{-س}$
(٥) ص = $٣^{س}$ − ١	(٦) ص = $٣^{س-١}$	(٧) ص = $٣^{١-س}$	(٨) ص = ١ − $٣^{س}$



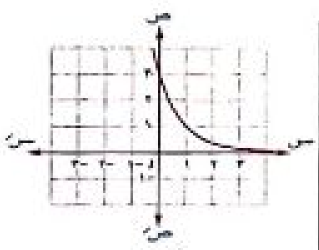
شكل (١)



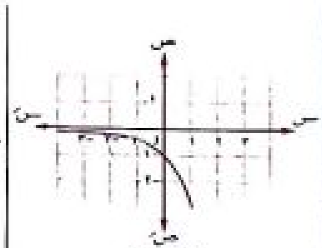
شكل (٢)



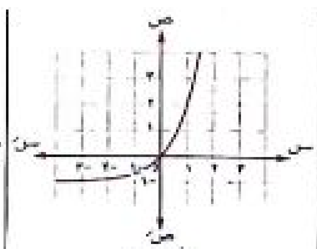
شكل (٣)



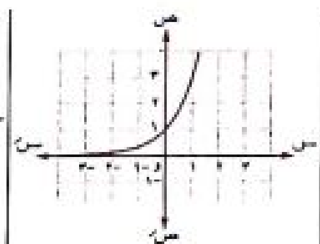
شكل (٤)



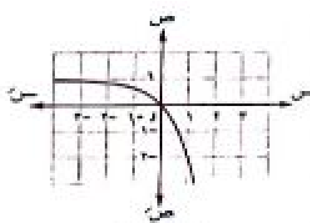
شكل (٥)



شكل (٦)



شكل (٧)



شكل (٨)

١٧ مثل الدالة د فى كل مما يأتى بيانيًا ، ثم أوجد المجال والمدى لكل منها ، وبين أيًا منها تزايدية وأيًا منها تناقصية :

① $د(س) = ٢^{س}$ ② $د(س) = \left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ ③ $د(س) = -٣ (٢)^{س}$

④ $د(س) = ٢^{س+١} + ١$ ⑤ $د(س) = \left(\frac{١}{٢}\right)^{س+٢} - ٢$ ⑥ $د(س) = ٢\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س-١} + ١$

⑦ $د(س) = -\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢س} + \frac{٣}{٤}$

---

١٨ أوجد بيانيًا فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

① $٢^{س+٣} = ٤$ ② $٢^{س} = ٨$ ③ $٣^{س} = ٤ - س$

④ $٣^{س-٢} = ٣ - س$ ⑤ $٢^{١-س} = س + ٥$ ⑥ $٤^{س+١} = ٤ - س$

⑦ $٢^{س} = ٢س$ ⑧ $٢^{س} = ٣^{س+١}$ ⑨ $٢^{س+١} = ٣^{١-س}$

---

١٩ إذا كانت د : ح ← ح$^{+}$ حيث $د(س) = ٣^{س-١}$ ، فارسم منحنى الدالة لكل س ∈ [-٢ ، ٣]

ومن الرسم أوجد :

① $د\left(\frac{٣}{٢}\right)$ ② قيمة س عندما $٣^{س-١} = ٧\frac{١}{٢}$ ٢,٨ ، ١,٧٥

---

٢٠ مثل بيانيًا الدالة د : $د(س) = \begin{cases} ١ - س^{٢} & \text{، عندما } س \leq ٠ \\ \left(\frac{١}{٢}\right)^{س} & \text{، عندما } س > ٠ \end{cases}$

ومن الرسم استنتج مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها.

---

٢١ ارسم منحنى الدالة د : $د(س) = ٢^{|س|}$ ومن الرسم استنتج مدى الدالة واطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

---

٢٢ ارسم منحنى الدالة د : $د(س) = \left(\frac{١}{٢}\right)^{|س|}$ ومن الرسم استنتج مدى الدالة واطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

---

٢٣ إذا كانت : $د(س) = ٥^{س}$ وكان $د(١ + جاس) + د(-١ + جاس) = ٢٦$

أوجد قيم س الحقيقية. $س = \frac{\pi}{٢} + ٢ ن \pi$ حيث ن ∈ ص

---

٢٤ تفكير إبداعى : إذا كانت $د(س) = ٢^{س}$

فأثبت أن : المقدار $\frac{١}{د(س) + ١} + \frac{١}{د(-س) + ١}$ له قيمة ثابتة مهما كانت قيمة س

تطبيقات على النمو والتضاؤل الأسى

٢٥ **الربط بالادخار :** أودع زياد مبلغ ٨٠٠٠٠ جنيه فى أحد البنوك بفائدة سنوية ١٠,٥٪ ، كم يصبح جملة رصيده بالجنيه بعد ١٠ سنوات ؟ «٢١٧١٢٦ جنيه»

٢٦ **الربط بالسكان :** إذا كان عدد سكان إحدى الدول فى نهاية عام ٢٠٠٠ هو ٤٣,٣ مليون نسمة وكان معدل الزيادة السكانية فى السنة يساوى ١,٥ ٪

(١) أوجد صيغة تمثل عدد سكان هذه الدولة بعد مرور ن سنة من عام ٢٠٠٠

(٢) استخدم هذه الصيغة لإيجاد عدد السكان المتوقع لهذه الدولة عام ٢٠٢٠ «٥٨,٣ مليون نسمة»

٢٧ **الربط بالرياضة :** يتناقص عدد المشجعين لإحدى فرق كرة القدم بمعدل ٤٪ نتيجة خسارتها فى إحدى الدورات الرياضية، فإذا كان عدد المشجعين فى أول مباراة ٣٦٤٠٠ فاكتب دالة أسية تمثل عدد الحضور (ص) فى المباراة (ن) ، ثم قدر عدد المشجعين فى المباراة العاشرة. «٢٤٢٠٠ مشجع»

٢٨ **الربط بالاستثمار :** بلغ عدد الأبقار فى إحدى مزارع الماشية ٨٠ بقرة ، فإذا كان معدل التكاثر لهذه الأبقار يبلغ ١٨٪ سنويًا تقريبًا ، فأوجد عدد الأبقار فى المزرعة بعد ٤ سنوات. «١٥٥ بقرة»

٢٩ **الربط بالسكان :** بلغ تعداد سكان إحدى المحافظات فى جمهورية مصر العربية ٤,٦ مليون نسمة بمتوسط زيادة ٤٪ سنويًا.

(١) اكتب دالة أسية تمثل النمو المستقبلى بعد ن سنة.

(٢) قدر عدد سكان هذه المحافظة بعد مرور ٥ سنوات من وقت التعداد. «٥,٦ مليون نسمة»

٣٠ **الربط بالصناعة :** يتناقص إنتاج منجم ذهب سنويًا بمقدار ٥٪ فإذا كان إنتاج المنجم فى السنة الأولى حوالى ٢٥٤ كجم قدر إنتاج المنجم فى السنة التاسعة. «١٦٠ كجم»

٣١ **الربط بالأحياء :** إذا كانت كمية البكتيريا الموجودة فى وقت ما ٢٠٠٠ بكتيريا وكانت البكتيريا تتزايد بمعدل ٧٪ فى الساعة. أوجد كمية البكتيريا الموجودة بعد مرور ١١ ساعة. «٤٢١٠ بكتيريا»

٣٢ أودع رجل مبلغ ٥٠٠٠ جنيه فى أحد البنوك التى تعطى فائدة سنوية مركبة قدرها ٨٪

أوجد جملة المبلغ بعد مرور عشرة أعوام فى كل من الحالات الآتية :

(١) العائد سنوى. (٢) العائد ربع سنوى. (٣) العائد شهرى.

«١٠٧٩٤,٦٢ ، ١١٠٤٠,٢ ، ١١٠٩٨,٢ جنيه»

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① الدالة د : د (س) = (٢ أ)^س تكون متناقصة عندما أ ∈ ....

(أ)]٠ ، ١[(ب)]١ ، ∞[(جـ)]٠ ، ٢[(د)]٠ ، $\frac{١}{٢}$[

② إذا كانت الدالة د : د (س) = $\left(\frac{أ}{٣}\right)^{س}$ دالة أسية تزايدية فإن ....

(أ) أ > ٠ (ب) أ > ١ (جـ) أ > ٣ (د) أ < ٣

③ إذا كانت د : د (س) = (أ − ٢)^س دالة أسية فإن ....

(أ) أ ∈ ح⁺ − {٢} (ب) أ > ٢

(جـ) أ < ٢ (د) أ ∈]٢ ، ∞[− {٣}

④ أى المنحنيات الآتية يقطع محور السينات ؟

(أ) د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ (ب) د (س) = ٢^س + ٣

(جـ) د (س) = ٣^س − ١ (د) د (س) = ٣^(س−١)

⑤ إذا قطع المستقيم ص = ٨ المنحنيين : ص = ٢^س ، ص = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ فى النقطتين أ ، ب على الترتيب

فإن : طول $\overline{أب}$ = ... وحدات طول.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٦

⑥ إذا انعكس منحنى الدالة د : د (س) = ٣^س حول محور الصادات ثم أُزيح ٥ وحدات لأعلى

فإن الدالة الجديدة هى ر : ر (س) = ...

(أ) ٥ + ٣^(−س) (ب) −٣^س + ٥ (جـ) ٣^س − ٥ (د) ٣^(−س) − ٥

⑦ إذا كانت : د (س) = $\frac{٩^{س}}{٩^{س} + ٣}$ فإن : د (س) + د (١ − س) = ...

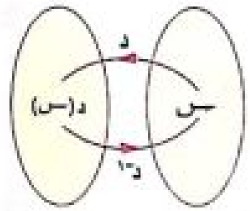
(أ) $\frac{٣}{٩^{س} + ٣}$ (ب) $\frac{٩^{س} + ٣}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) ١

⑧ إذا كانت : د (س) = $\frac{٤^{س}}{٤^{س} + ٢}$ فإن : د $\left(\frac{١}{١١}\right)$ + د $\left(\frac{٢}{١١}\right)$ + د $\left(\frac{٣}{١١}\right)$ + ... + د $\left(\frac{١٠}{١١}\right)$ = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) $\frac{٦}{١١}$ (د) ١٠

* إذا كانت د دالة أحادية مجالها س ومداها ص (bijective function) فإن كل عنصر ص فى المدى يناظره عنصر وحيد س فى المجال ولذلك يمكن تعيين دالة عكسية من ص إلى س ويرمز لها بالرمز $د^{-١}$

بحيث : $د^{-١}$ (ص) = س



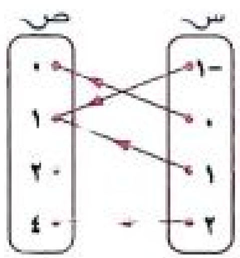
أى أنه إذا كان لكل (س ، ص) ∈ بيان د فإن : (ص ، س) ∈ بيان $د^{-١}$

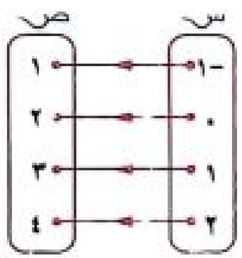
، ص هى مدى د ومجال $د^{-١}$ ، س هى مجال د ومدى $د^{-١}$

مثال ①

بين أيًا من الدالتين الممثلتين بالمخططين السهميين المقابلين لها دالة عكسية

واكتب بيان د ، $د^{-١}$ إن وجدت :





الحل

① لا يمكن إيجاد الدالة العكسية $د^{-١}$ للدالة د لأن الدالة د ليست أحادية

بيان د = {(-١ ، ١) ، (٠ ، ٠) ، (١ ، ١) ، (٢ ، ٤)}

لاحظ : ارتباط العنصرين -١ ، ١ فى س بنفس العنصر ١ فى ص فإذا عكسنا الدالة فإنها تصبح علاقة بيانها = {(١ ، -١) ، (٠ ، ٠) ، (١ ، ١) ، (٤ ، ٢)} وهى ليست دالة لأن العنصر ١ أصبح له صورتان هما -١ ، ١ ولذلك يجب أن تكون الدالة أحادية لكى نتمكن من إيجاد دالتها العكسية.

٢ يمكن إيجاد الدالة العكسية $د^{-١}$ للدالة د لأن الدالة د أحادية ولكل (س ، ص) ∈ بيان د يوجد (ص ، س) ∈ بيان $د^{-١}$

بيان د = {(-١ ، ١) ، (٠ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ٤)}

بيان $د^{-١}$ = {(١ ، -١) ، (٢ ، ٠) ، (٣ ، ١) ، (٤ ، ٢)}

مثال ٢

إذا كانت الدالة د معرفة من المجموعة س = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} إلى المجموعة ص = {٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧}

وكانت : د (س) = س + ٢

١ أوجد بيان $د^{-١}$ ٢ استنتج قاعدة الدالة $د^{-١}$

الحل

١ ∵ د (٢) = ٢ + ٢ = ٤ ، د (٣) = ٣ + ٢ = ٥ ، د (٤) = ٤ + ٢ = ٦ ، د (٥) = ٥ + ٢ = ٧

∴ بيان د = {(٢ ، ٤) ، (٣ ، ٥) ، (٤ ، ٦) ، (٥ ، ٧)}

∴ د دالة أحادية ، مدى د = ص

∴ بيان $د^{-١}$ = {(٤ ، ٢) ، (٥ ، ٣) ، (٦ ، ٤) ، (٧ ، ٥)}

٢ بملاحظة الأزواج المرتبة فى بيان $د^{-١}$

نجد أن الإحداثى الصادى يقل عن الإحداثى السينى بمقدار ٢

أى أن : ص = س − ٢ ∴ $د^{-١}$ (س) = س − ٢

ملاحظة هامة

يمكن إيجاد قاعدة $د^{-١}$ مباشرةً بتبديل المتغيرين س ، ص ثم إيجاد ص بدلالة س

فى المثال السابق :

∵ د (س) = س + ٢ أى أن : ص = س + ٢ وبتبديل المتغيرين س ، ص

∴ س = ص + ٢ ومنها ص = س − ٢ ∴ $د^{-١}$ (س) = س − ٢

مثال ٣

أوجد الدالة العكسية للدالة د : د (س) = ٣ س − ٢ ومثل الدالة ومعكوسها بيانيًا فى شكل واحد.

الحل

- لإيجاد الدالة العكسية نقوم بتبديل المتغيرين ثم نوجد ص بدلالة س

∵ ص = ٣ س − ٢

وبتبديل المتغيرين $\therefore$ س = ٢ ص − ٢

نوجد ص بدلالة س $\therefore$ ٢ ص = س + ٢

$\therefore$ ص = $\frac{١}{٢}$ (س + ٢) $\therefore$ د$^{-١}$ (س) = $\frac{١}{٢}$ (س + ٢)

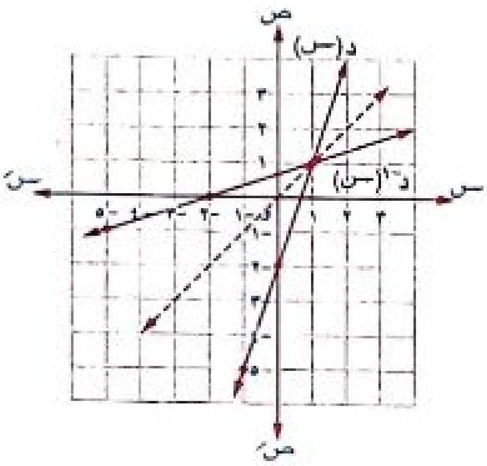
التمثيل البيانى :

• د (س) = ٢ س − ٢

س	١	٠	−١
د (س)	١	−٢	−٥

• د$^{-١}$ (س) = $\frac{١}{٢}$ (س + ٢)

س	١	−٢	−٥
د$^{-١}$ (س)	١	٠	−١



ملاحظتان

١ لاحظ أن : د$^{-١}$ (س) $\neq$ $\frac{١}{د (س)}$ ففى المثال السابق

د$^{-١}$ (س) = $\frac{١}{٢}$ (س + ٢) بينما $\frac{١}{د (س)}$ = $\frac{١}{٢ س − ٢}$

٢ فى المثال السابق نلاحظ أن الدالة د والدالة العكسية لها د$^{-١}$ متماثلتان بالنسبة للمستقيم ص = س وبصفة عامة لأى دالة د إذا أمكن إيجاد دالتها العكسية د$^{-١}$

فإن الدالتين د ، د$^{-١}$ تكونان متماثلتين بالنسبة للمستقيم ص = س

أى أن : د ، د$^{-١}$ كل منهما صورة للأخرى بالانعكاس فى المستقيم ص = س

خواص الدالة العكسية

من خواص الدالة العكسية :

١ يقال إن د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى إذا كان (د ∘ ر) (س) = س ، (ر ∘ د) (س) = س

٢ مجال الدالة د = مدى الدالة العكسية د$^{-١}$ ، مدى الدالة د = مجال الدالة العكسية د$^{-١}$

مثال ٤

حقق أن كلًا من : د ، ر حيث د (س) = ٤ س + ٩ ، ر (س) = $\frac{\text{س} - ٩}{٤}$ دالة عكسية للأخرى.

الحل

∵ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) = د $\left(\frac{\text{س} - ٩}{٤}\right)$ = ٤ $\left(\frac{\text{س} - ٩}{٤}\right)$ + ٩ = (س − ٩) + ٩ = س

، (ر ∘ د) (س) = ر (د (س)) = ر (٤ س + ٩) = $\frac{٤\text{س} + ٩ - ٩}{٤}$ = $\frac{٤\text{س}}{٤}$ = س

∴ د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى.

مثال ٥

أوجد المجال الذى يكون فيه للدالة د : د (س) = س^2 دالة عكسية ، وأوجد هذه الدالة العكسية.

الحل

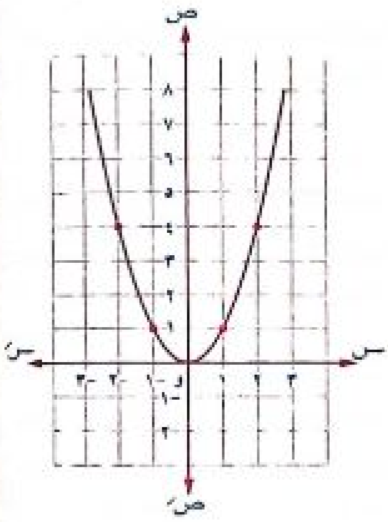
- إذا كانت س ∈ ح

فإن الدالة د : د (س) = س^2 ليست أحادية

(لا تحقق شرط الخط الأفقى)

لذلك ليس لها دالة عكسية

فى المجال ح



- إذا كانت س ∈ [٠ ، ∞[فإن الدالة د : د (س) = س^2

تكون أحادية ويكون لها فى هذه الحالة دالة عكسية.

∵ ص = س^2 حيث س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

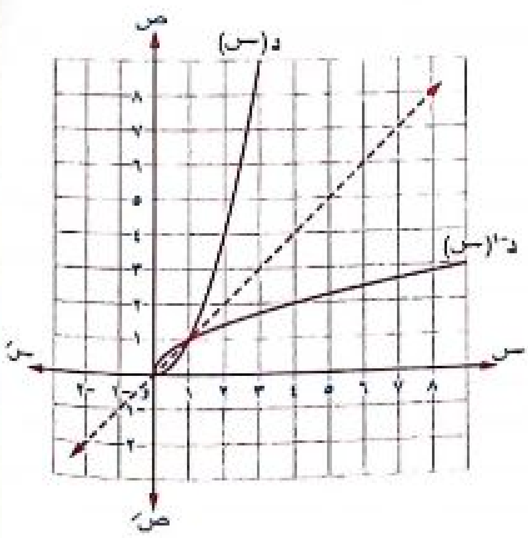
وبتبديل المتغيرين

∴ س = ص^2

∴ ص = $\sqrt{\text{س}}$

حيث : ص ≥ ٠ ، س ≥ ٠

∴ د^{-1} (س) = $\sqrt{\text{س}}$



• إذا كانت : س ∈]- ∞ ، ٠] فإن الدالة د : د (س) = $\text{س}^{٢}$

تكون أحادية ويكون لها فى هذه الحالة دالة عكسية.

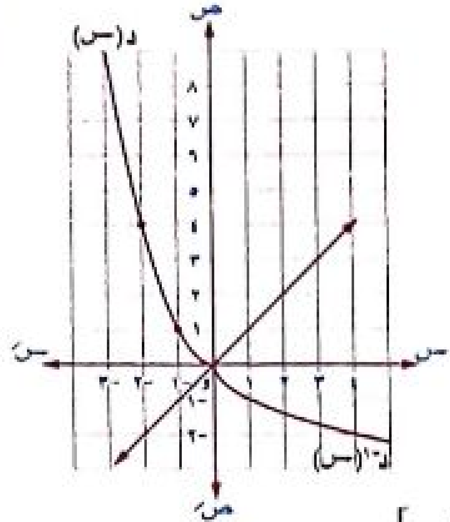
∵ ص = $\text{س}^{٢}$ حيث س ≥ ٠ ، ص ≤ ٠ .

وبتبديل المتغيرين

∴ س = $\text{ص}^{٢}$ حيث س ≤ ٠ ، ص ≥ ٠ .

∴ ص = $-\sqrt{\text{س}}$ حيث س ≤ ٠ ، ص ≥ ٠ .

∴ $\text{د}^{-١}$ (س) = $-\sqrt{\text{س}}$



∴ المجال الذى يكون فيه للدالة د دالة عكسية = [٠ ، ∞[أو]- ∞ ، ٠]

مثال ٦

إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{\text{س} - ٢}$ + ٣ **فأوجد :**

١ مجال ومدى الدالة د

٢ $\text{د}^{-١}$ (س) وعين مجال ومدى الدالة $\text{د}^{-١}$

الحل

١ مجال د = ح - {٢} ومدى د = ح - {٣}

٢ ∵ ص = $\frac{١}{\text{س} - ٢}$ + ٣ بتبديل المتغيرين ∴ س = $\frac{١}{\text{ص} - ٢}$ + ٣

∴ $\frac{١}{\text{ص} - ٢}$ = س - ٣ ∴ ص - ٢ = $\frac{١}{\text{س} - ٣}$

∴ ص = $\frac{١}{\text{س} - ٣}$ + ٢ ∴ $\text{د}^{-١}$ (س) = $\frac{١}{\text{س} - ٣}$ + ٢

∴ مجال $\text{د}^{-١}$ = ح - {٣} ومدى $\text{د}^{-١}$ = ح - {٢}

لاحظ أن : مجال الدالة $\text{د}^{-١}$ = مدى الدالة د

مثال ٧

إذا كانت د دالة حيث د (س) = ٢ + $\sqrt{\text{س} - ٣}$ **فأوجد :**

١ مجال ومدى الدالة د

٢ $\text{د}^{-١}$ (س) وعين مجال ومدى الدالة $\text{د}^{-١}$

الحل

١ ∵ د (س) معرفة لجميع قيم س - ٣ ≥ ٠ ∴ س ≥ ٣

∴ مجال د = [٣ ، ∞[

، ∵ لكل س ≥ ٣ يكون ٢ + $\sqrt{\text{س} - ٣}$ ≥ ٢ ∴ ص ≥ ٢

∴ مدى الدالة د = [٢ ، ∞[

٢ ∵ ص = ٢ + $\sqrt{س - ٣}$ حيث س ≥ ٣ ، ص ≥ ٢ وبتبديل المتغيرين

∴ س = ٢ + $\sqrt{ص - ٣}$ حيث ص ≥ ٣ ، س ≥ ٢

∴ س − ٢ = $\sqrt{ص - ٣}$ ∴ (س − ٢)^٢ = ص − ٣

∴ ص = (س − ٢)^٢ + ٣

∴ د$^{-١}$ (س) = (س − ٢)^٢ + ٣ حيث س ≥ ٢ ، ص ≥ ٣

، مجال د$^{-١}$ = مدى د = [٢ ، ∞[، مدى د$^{-١}$ = مجال د = [٣ ، ∞[

مثال ٨

أوجد الدالة العكسية للدالة د حيث د (س) = (س − ٢)^٢ + ٣ ، س ≤ ٢ موضحًا مجال د$^{-١}$

الحل

∵ ص = (س − ٢)^٢ + ٣ ، س ≤ ٢

، ∵ لكل س ≤ ٢ يكون (س − ٢)^٢ + ٣ ≥ ٣ ∴ ص ≥ ٣

بتبديل المتغيرين

∴ س = (ص − ٢)^٢ + ٣ ، ص ≤ ٢ ، س ≥ ٣ ∴ (ص − ٢)^٢ = س − ٣

، وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين ∴ ص − ٢ = ± $\sqrt{س - ٣}$

، ∵ ص ≤ ٢

∴ ص − ٢ = − $\sqrt{س - ٣}$ ∴ ص = − $\sqrt{س - ٣}$ + ٢

∴ د$^{-١}$ (س) = − $\sqrt{س - ٣}$ + ٢ حيث س ≥ ٣ ، ص ≤ ٢ ∴ مجال د$^{-١}$ = [٣ ، ∞[

مثال ٩

إذا كانت د : ح$^+$ ⟵ ح حيث د (س) = $\frac{١}{س^٢ + ١}$ أوجد د$^{-١}$ (س) وعين مجال ومدى د$^{-١}$

الحل

∵ ص = $\frac{١}{س^٢ + ١}$ ، س ∈ ح$^+$ ولكل س > ٠ يكون ٠ < ص < ١

وبتبديل المتغيرين

∴ س = $\frac{١}{ص^٢ + ١}$ ، ص > ٠ ، ٠ < س < ١

∴ ص^٢ + ١ = $\frac{١}{س}$ ∴ ص^٢ = $\frac{١}{س}$ − ١

، ∵ ص > ٠ ∴ ص = $\sqrt{\frac{١}{س} - ١}$

∴ $د^{-١}$ (س) = $\sqrt{\frac{١}{س} - ١}$ حيث ص > ٠ ، ٠ < س < ١

∴ مجال $د^{-١}$ =]٠ ، ١[ومدى $د^{-١}$ = $ح^+$

ملاحظــة

الدوال المتماثلة حول المستقيم ص = س دالتها العكسية هي نفسها ومنها :

١ الدوال الخطية على الصورة د : د (س) = − س + ب

مثل د : د (س) = − س + ١ ، د : د (س) = $\frac{١}{٢}$ − س ، ...

٢ الدوال الكسرية على الصورة د : د (س) = $\frac{أ}{س - ك}$ + ك حيث ك ∈ ح

مثل د : د (س) = $\frac{١}{س - ٥}$ + ٥ ، د : د (س) = $\frac{-٢}{س}$ ، ...

مثال ١٠

أثبت أن الدالة د في كل مما يأتي دالتها العكسية هي نفسها :

١ د (س) = ٢ − س   ٢ د (س) = $\frac{١}{س - ٢}$ + ٢

الحــل

١ ص = ٢ − س بتبديل المتغيرين

∴ س = ٢ − ص   ∴ ص = ٢ − س

∴ $د^{-١}$ (س) = ٢ − س = د (س)

∴ د دالتها العكسية هي نفسها.

٢ ص = $\frac{١}{س - ٢}$ + ٢ بتبديل المتغيرين

∴ س = $\frac{١}{ص - ٢}$ + ٢   ∴ س − ٢ = $\frac{١}{ص - ٢}$

∴ ص − ٢ = $\frac{١}{س - ٢}$ ∴ ص = $\frac{١}{س - ٢}$ + ٢

∴ $د^{-١}$ (س) = $\frac{١}{س - ٢}$ + ٢ = د (س)

∴ د دالتها العكسية هي نفسها.

من أسئلة الكتاب المدرسي • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت د دالة أحادية وكانت ر دالة حيث منحنى ر هو صورة منحنى د بالانعكاس فى المستقيم ص = س فإن : ....

(أ) ر (س) = د (س) (ب) ر (س) = $\frac{١}{د (س)}$

(جـ) ر (س) = $د^{-١}$ (س) (د) ر (س) = (د ० د) (س)

(٢) أى مما يأتى ليس له دالة عكسية ؟

(أ) ص = $\sqrt[٣]{س}$ (ب) ص = ٣ س (جـ) ص = $س^{٣}$ (د) ص = $س^{٢}$

(٣) الدوال د ، $د^{-١}$ كل منهما صورة الأخرى بالانعكاس فى المستقيم ....

(أ) ص = ٠ (ب) س = ٠ (جـ) ص = − س (د) ص = س

(٤) إذا كانت : (أ ، ب) ∈ منحنى الدالة د فإن : .... ∈ منحنى الدالة $د^{-١}$

(أ) (أ ، ب) (ب) (أ ، − ب) (جـ) (ب ، أ) (د) (ب ، − أ)

(٥) إذا كانت د : دالة حيث د (٧) = ٣ فإن : $د^{-١}$ (٣) = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٧ (د) ١٠

(٦) إذا كانت د = {(١ ، ٤) ، (٢ ، −٣) ، (٣ ، ١) ، (٤ ، ٠)} فإن : $د^{-١}$ (١) + د (٢) = ...

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٣

(٧) إذا كانت الدالة $د^{-١}$ حيث $د^{-١}$ = {(٢ ، ٣) ، (٥ ، ب)} هى الدالة العكسية للدالة د حيث د = {(٤ ، ٥) ، (أ ، ٢)} فإن : أ − ب = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) ٢

(٨) إذا قطع المستقيم ص = س الدالة الأحادية د فى النقطة (٢ ، ٢) فإنه يقطع الدالة $د^{-١}$ فى النقطة ....

(أ) (−٢ ، ٢) (ب) (٢ ، ٢) (جـ) (−٢ ، −٢) (د) (٢ ، −٢)

(٩) إذا كانت د دالة حيث د (س) = ٧ س فإن : $د^{-١}$ (س) = ...

(أ) ٧ س (ب) $\frac{س}{٧}$ (جـ) $\frac{٧}{س}$ (د) ٧ − س

(١٠) صورة النقطة (٣ ، −١) بالانعكاس فى المستقيم ص = س هى ....

(أ) (٣ ، −١) (ب) (−١ ، −٣) (جـ) (−١ ، ٣) (د) (٣ ، ١)

(١١) إذا تقاطع منحنى الدالة د مع منحنى الدالة د$^{-1}$ فى نقطة (ك ، ٢ ك − ٣) فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(١٢) إذا تقاطع منحنى الدالة د مع منحنى الدالة د$^{-1}$ فى نقطة (أ ، $\frac{٤}{أ}$) فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ± ٢ (جـ) ٤ (د) ± ٤

(١٣) إذا كانت د$^{-1}$ هى الدالة العكسية للدالة د فإن : ....

(أ) مجال د$^{-1}$ = مجال د (ب) مجال د$^{-1}$ = مدى د

(جـ) مدى د$^{-1}$ = مدى د (د) مدى د$^{-1}$ = مجال د$^{-1}$

(١٤) إذا كانت : ص = $\sqrt[٣]{س}$ فإن الدالة العكسية لها ص = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ س^{٣} (ب) س^{٣} (جـ) س^{٣} − ١ (د) ٣ س^{٣}

(١٥) إذا كان : د (س) = س^{٣} + ٧ فإن : د$^{-1}$ (−١) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) −٢ (د) ٨

(١٦) إذا كانت الدالة د : د (س) = $\frac{١}{س - ٢}$ + ٢ فإن : د$^{-1}$ (س) = ...

(أ) $\frac{١}{٢ + س}$ − ٢ (ب) $\frac{١}{٢ - س}$ − ٢ (جـ) د (س) (د) د (−س)

(١٧) إذا كانت د دالة حيث د (س) = ٣ + $\sqrt{س - ١}$ فإن مدى د$^{-1}$ هو ....

(أ) [٣ ، ∞[(ب)]٣ ، ∞[(جـ) [١ ، ∞[(د)]١ ، ∞[

(١٨) إذا كانت الدالتين د ، ر حيث : د (س) = ٤ س − ١٢ ، ر (س) = أ س + ٣ كل منها عكسية للأخرى فإن : قيمة أ = ...

(أ) −٤ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) ٤ (د) ٣

(١٩) إذا كانت الدالة د : د (س) = ٥ س + ب هى دالة عكسية للدالة ر : ر (س) = حـ س + ٤ فإن : ب × حـ = ...

(أ) ٤ (ب) −٤ (جـ) ٢٠ (د) −٢٠

(٢٠) إذا كانت : د$^{-1}$ (س) = ٢ س + ١ فإن : د (س) = ...

(أ) −٢ س − ١ (ب) $\frac{١}{٢}$ س + ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ س − $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٢ س}$ + ١

(٢١) إذا كانت د (س) = $\frac{س + ك}{س - ١}$ وكان (٥ ، ٢) ∈ د$^{-1}$ فإن : ك = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٢٢) إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{س - أ}$ + ب فإن : د$^{-1}$ (أ) + د (ب) = ...

(أ) غير معرفة. (ب) أ − ب (جـ) أ + ب (د) صفر

(٢٣) إذا كانت : $٢^{د(س)}$ = ٢ س − ١ فإن : $د^{-1}$ (٠) = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ٢ (د) ٥

(٢٤) ($د^{-1}$ ∘ د) (س) = ...

(أ) س (ب) $\frac{١}{د(س)}$ (جـ) د (س) (د) $د^{-1}$ (س)

(٢٥) إذا كانت د : ح − {٢} ⟵ ح − {١} حيث د (س) = $\frac{س + ١}{س - ٢}$ فإن : $د^{-1}$ (٤) = ...

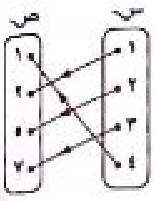
(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٢٦) إذا كانت : د (س) = $\frac{٢ س + ٣}{٢ س + ٥}$ فإن مجال الدالة العكسية $د^{-1}$ (س) هو ....

(أ) ح (ب) ح − $\{\frac{-٥}{٢}\}$ (جـ) ح − $\{\frac{٢}{٣}\}$ (د) ح − $\{\frac{-٥}{٢}، \frac{٢}{٣}\}$

(٢٧) الشكل المقابل يمثل دالة د : س ⟵ ص

فإن : $د^{-1}$ (٢) = ...

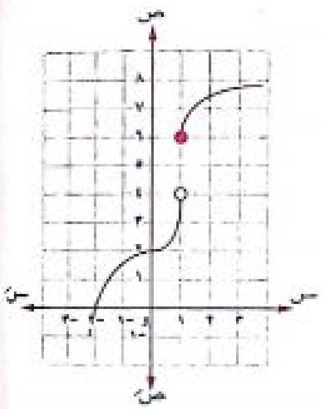


(أ) ١ (ب) ٥

(جـ) ٤ (د) ٧

(٢٨) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن : $د^{-1}$ (صفر) + $د^{-1}$ (٦) = ...



(أ) −١ (ب) ٣

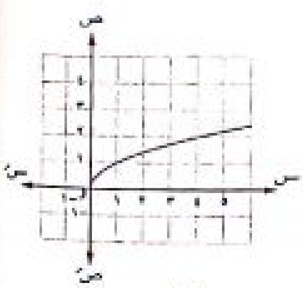
(جـ) ٥ (د) ٨

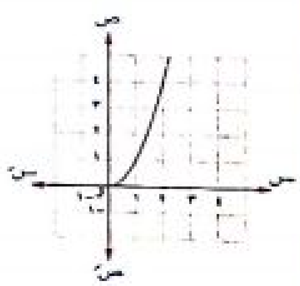
(٢٩) إذا كان الشكل المقابل يمثل

الدالة د : د (س) = $\sqrt{س}$ ، س ≥ ٠

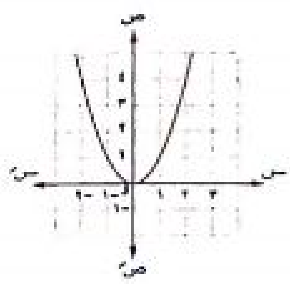
فإن أى من الأشكال التالية يمثل

منحنى الدالة $د^{-1}$ ؟

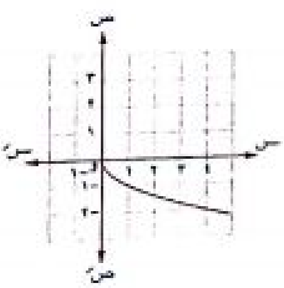




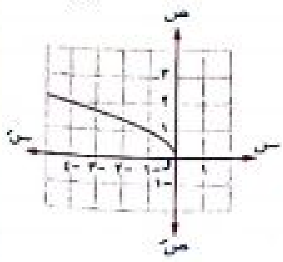
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد الدالة العكسية لكل من الدوال الآتية :

①

س	−٢	١	٢	٥
د (س)	٧	٤	١	−١

② د = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٤)}

③ د (س) = ٢ س + ٥

④ د (س) = $\frac{١}{٢}$ س + ٤

⑤ د (س) = ٥ + $\frac{٤}{س}$

⑥ د (س) = ٨ س^{٣} − ١

⑦ د (س) = $\sqrt[٣]{س + ١}$

⑧ د (س) = $\sqrt[٣]{٤ - س}$

⑨ د (س) = ٢ + $\sqrt[٣]{٣ - س}$

⑩ د (س) = س^{٢} حيث س ≤ صفر

⑪ د (س) = (س + ٢)^{٢} حيث س ≥ −٢

⑫ د (س) = (س − ١)^{٢} + ٢ حيث س ≤ ١

⑬ د (س) = س^{٢} + ٨ س + ٧ حيث س ≤ −٤

⑭ د (س) = $\sqrt{٩ - س^{٢}}$ حيث −٣ ≥ س ≥ ٠

⑮ د (س) = $\sqrt{٩ - س^{٢}}$ حيث ٠ ≥ س ≥ ٣

⑯ د : ح$^{+}$ ⟵ ح بحيث د (س) = $\frac{١}{س^{٢} + ٢}$

٢ أى من الدوال الآتية لها دالة عكسية :

① د$_{١}$ = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٥)}

② د$_{٢}$ = {(−١ ، ٣) ، (٠ ، ٢) ، (١ ، ٣)}

③ د$_{٣}$ (س) = س^{٢} − ١ حيث س ∈ ح

④ د$_{٤}$ (س) = |س| حيث س ∈ ح

٣ حدد إذا كان كل من الدالتين د ، ر دالة عكسية للأخرى أم لا فى كل مما يأتى :

① د (س) = ٢ س − ٣ ، ر (س) = $\frac{س + ٣}{٢}$

② د (س) = س^{٢} + ٤ حيث س ≤ ٠ ، ر (س) = $\sqrt{س - ٤}$

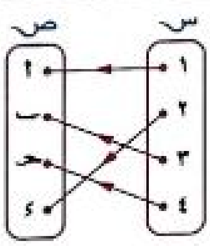
③ د (س) = $\frac{-٢}{س - ٥}$ ، ر (س) = $\frac{٥ س - ٢}{س}$

④ د (س) = $\sqrt[٣]{٤ س}$ ، ر (س) = $\frac{س^{٣}}{٤}$

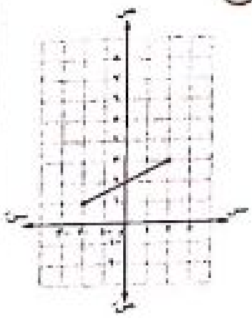
٤ ① إذا كانت : د (س) = ٥ س أوجد : د$^{-١}$ (س) ومثلهما بيانيًا.

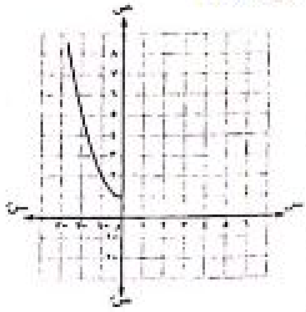
② الشكل المقابل يمثل دالة د من س إلى ص

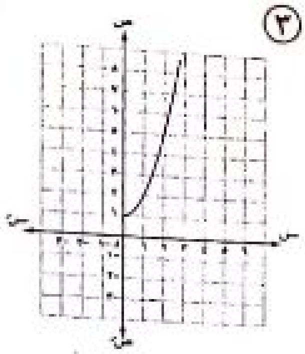
فأوجد قيمة : د$^{-١}$ (ب) + ٢ د$^{-١}$ (حـ)

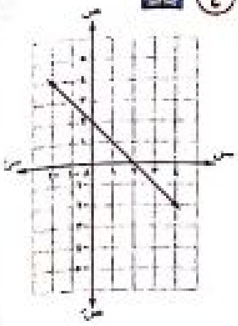


٥ في كل من الأشكال الآتية ارسم منحنى الدالة العكسية $د^{-1}$:

① 

② 📖 

③ 

④ 📖 

---

٦ أي من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية معكوسها هو نفس الدالة :

① د (س) = ٢ س ② د (س) = − س ③ د (س) = $\frac{٢}{س}$

④ د (س) = ٧ − س ⑤ د (س) = $\frac{١}{س - ٢}$ + ٥ ⑥ د (س) = $\frac{١}{س - ك}$ + ك حيث ك ∈ ح

---

٧ 📖 **اكتشف الخطأ :** حاول كل من وائل ورنا إيجاد الدالة العكسية للدالة د (س) = $\frac{س - ٥}{س}$

إجابة وائل

∵ د (س) = $\frac{س - ٥}{س}$

، ∵ $د^{-1}$ (س) = $\frac{١}{د (س)}$

∴ $د^{-1}$ (س) = ١ ÷ $\frac{س - ٥}{س}$ = ١ × $\frac{س}{س - ٥}$

$د^{-1}$ (س) = $\frac{س}{س - ٥}$

إجابة رنا

∵ ص = $\frac{س - ٥}{س}$

∴ س = $\frac{ص - ٥}{ص}$ بتبديل المتغيرين

∴ ص س = ص − ٥ بالضرب التبادلي

∴ ص س − ص = −٥ ∴ ص (س − ١) = −٥

∴ $د^{-1}$ (س) = $\frac{-٥}{س - ١}$

أي من الإجابتين هي الصواب ؟ ولماذا ؟

---

٨ 📖 في كل مما يأتي عين المجال الذي يكون فيه للدالة د دالة عكسية :

① د (س) = $س^{٢}$ ② د (س) = $س^{٣}$ ③ د (س) = $\frac{١}{٢}$ س

---

٩ أوجد الدالة العكسية للدالة د حيث : د (س) = $\frac{س - ١}{س + ٥}$

---

١٠ إذا كانت كل من الدالتين د ، ر حيث : د (س) = ٢ س + أ

، ر (س) = ب س + ٣ دالة عكسية للأخرى. فما قيمة كل من أ ، ب ؟

−٦ ، $\frac{١}{٢}$

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : د (س) = أ س + ب ، د$^{-1}$ (٩) = ٣ ، د$^{-1}$ (٥) = ٢ فإن : أ × ب = ...

(أ) −١٢ (ب) −١٠ (جـ) −٨ (د) −٧

② إذا كانت : د (س) = س^{٢} ، ر (س) = س − ٣ فإن مجموعة حل المعادلة :

ر (د (س)) = ر$^{-1}$ (س) هي ....

(أ) {٢ ، −٣} (ب) {٣} (جـ) {٣ ، −٢} (د) {٢ ، ٣}

③ إذا كانت د : ح − {−١} ⟵ ح − {٢} حيث س = $\frac{د (س) + ١}{٢ − د (س)}$ فإن : د$^{-1}$ (٣) = ...

(أ) −٤ (ب) −٣ (جـ) −٢ (د) −١

④ إذا كانت د : ح − {١} ⟵ ح − {٢} حيث د (س) = $\frac{أ س + ٣}{س − ب}$ فإن : د$^{-1}$ (١) = ...

(أ) −٢ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) غير معرفة.

⑤ إذا كانت د : ح ⟵ ح حيث د (س) = $\sqrt[٣]{س − ٥}$ ، ر : ح ⟵ ح حيث ر (س) = ٢ س − ٧

فإن : (ر ∘ د$^{-1}$) (س) = ...

(أ) ٢ س^{٣} − ٣ (ب) ٢ س^{٣} − ٥ (جـ) ٢ س^{٣} + ٣ (د) ٢ س^{٣} + ٥

⑥ إذا كانت د : ح ⟵ ح حيث د (س) = ٣ س − ٤ فإن : د$^{-1}$ (س + ٢) = ...

(أ) $\frac{س − ٢}{٣}$ (ب) $\frac{س + ٢}{٣}$ (جـ) $\frac{س + ٤}{٣}$ (د) $\frac{س + ٦}{٣}$

⑦ إذا كانت : د (س) = س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٣ س + ١ فإن : د$^{-1}$ (س) = ...

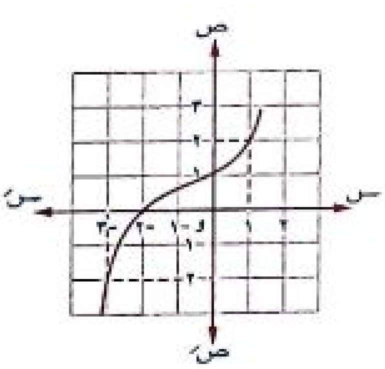
(أ) (س + ١)^{٣} (ب) $\sqrt[٣]{س}$ − ١ (جـ) $\sqrt[٣]{س}$ + ١ (د) س^{٣} − ١

⑧ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د$^{-1}$ (س)

فإن : (د ∘ د) (صفر) = ...

(أ) −٣ (ب) −٢

(جـ) صفر (د) ١



الدرس **4**

الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البيانى



نعلم أنه يمكن كتابة العدد ٨ على الصورة : $٨ = ٢^{٣}$ ، والعدد (٣) الذى يجب وضعه كأس للعدد (٢) ليعطى (٨) يسمى لوغاريتم العدد (٨) للأساس (٢) ويرمز له بالرمز $\text{لو}_{٢}\ ٨$

وهكذا نجد أن كل صورة أسية أساسها عدد حقيقي موجب $\neq ١$ يوجد لها صورة أخرى تكافئها تسمى بالصورة اللوغاريتمية وعمومًا فإن :

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{أ}}\ \text{س} \Leftrightarrow \text{س} = \text{أ}^{\text{ص}}$ حيث $\text{أ} \in \text{ح}^{+} - \{١\}$ ، $\text{س} \in \text{ح}^{+}$ ، $\text{ص} \in \text{ح}$

فمثلًا : $\text{لو}_{٣}\ ٨١ = ٤ \Leftrightarrow ٣^{٤} = ٨١$ ، $\text{لو}_{٣}\ \frac{١}{٩} = -٢ \Leftrightarrow ٣^{-٢} = \frac{١}{٩}$

، $٤^{٢} = ١٦ \Leftrightarrow \text{لو}_{٤}\ ١٦ = ٢$ ، $٢^{-٣} = \frac{١}{٨} \Leftrightarrow \text{لو}_{٢}\ \frac{١}{٨} = -٣$ وهكذا

ملاحظـــات

1. لا معنى للحديث عن لوغاريتم عدد غير موجب ، فكل من $\text{لو}_{٢}\ -٣$ ، $\text{لو}_{٥}\ -٨$ ، $\text{لو}_{٢}$ صفر لا معنى له.
2. الأساس أ يجب أن يكون عددًا موجبًا يختلف عن الواحد الصحيح ويترتب على ذلك أن كلًا من : $\text{لو}_{-٢}\ ٨$ ، $\text{لو}_{\text{صفر}}\ ٥$ ، $\text{لو}_{١}\ ٤$ لا معنى له.
3. اللوغاريتم المعتاد هو اللوغاريتم الذى أساسه ١٠ وقد اتفق على حذف هذا الأساس عند كتابة اللوغاريتم

   فمثلًا : $\text{لو}_{١٠}\ ٣$ تكتب لو ٣

الدالة اللوغاريتمية

إذا كان $\text{أ} \in \text{ح}^{+} - \{١\}$ فإن الدالة د : $\text{ح}^{+} \longrightarrow \text{ح}$ حيث $\text{د}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{أ}}\ \text{س}$ تسمى بالدالة اللوغاريتمية.

العلاقة بين الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية

درسنا فيما سبق لرسم الدالة الأسية د : د (س) = $٢^{س}$ أى ص = $٢^{س}$ نكون الجدول التالى :

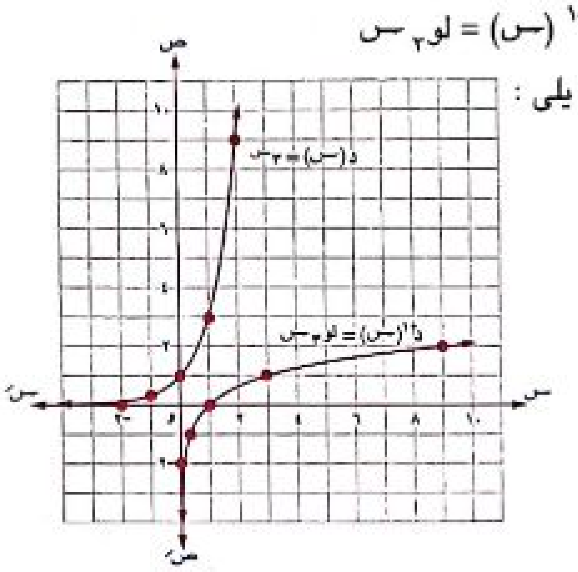
س	-٢	-١	٠	١	٢
د (س) = $٢^{س}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩

وبتبديل المتغيرين نحصل على الدالة العكسية س = $٢^{ص}$

وهى الصورة المكافئة للدالة اللوغاريتمية ص = $لو_{٢}$ س أى $د^{-١}$ (س) = $لو_{٢}$ س

ولرسم هذه الدالة نبدل قيم س ، ص فى الجدول السابق كما يلى :

س	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩
$د^{-١}$ (س) = $لو_{٣}$س	-٢	-١	٠	١	٢



* من خواص الدالة العكسية والشكل المقابل نلاحظ أن :

منحنيى الدالتين متماثلان حول المستقيم ص = س

، مجال الدالة الأسية هو ح

والمدى =]٠ ، ∞[

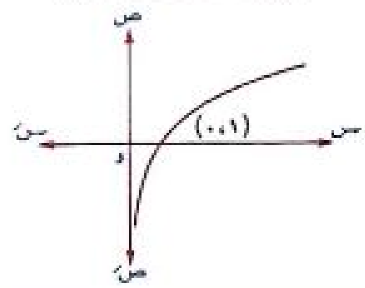
، مجال الدالة اللوغاريتمية هو]٠ ، ∞[والمدى = ح

أى أن الدالة اللوغاريتمية هى الدالة العكسية للدالة الأسية.

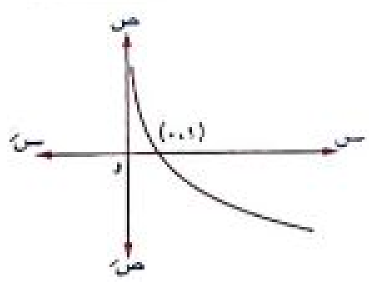
التمثيل البيانى للدالة اللوغاريتمية د : د(س) = $لو_{أ}$ س

- الشكل البيانى للدالة اللوغاريتمية يأخذ أحد الشكلين الآتيين حسب قيمة الأساس أ :

إذا كانت : أ > ١



إذا كانت : ٠ < أ < ١



بعض خواص الدالة اللوغاريتمية د : د (س) = $لو_{أ}$ س

١ مجال الدالة اللوغاريتمية = $ح^{+}$

٢ مدى الدالة اللوغاريتمية = ح

٣ الدالة اللوغاريتمية تزايدية عندما أ > ١ وتناقصية عندما ٠ < أ < ١

٤ جميع منحنيات الدوال اللوغاريتمية لأى أساس موجب ≠ ١ تمر بالنقطة (١ ، ٠)

٥ الدالة اللوغاريتمية هى دالة أحادية أى أنه إذا كان $لو_{أ}$ س = $لو_{أ}$ ص فإن س = ص

مثال ١

عبر عن كل مما يأتي بالصورة الأسية المكافئة :

[١] $\text{لو}_{٢}\ ٦٤ = ٦$ [٢] $\text{لو}_{٢}\ ٨\sqrt{٢} = \frac{٧}{٢}$ [٣] $\text{لو}_{٣}\ \frac{١}{٢٧} = -٣$ [٤] $\text{لو}\ ٠{,}٠١ = -٢$

الحل

[١] $\text{لو}_{٢}\ ٦٤ = ٦ \Leftrightarrow ٦٤ = ٢^{٦}$

[٢] $\text{لو}_{٢}\ ٨\sqrt{٢} = \frac{٧}{٢} \Leftrightarrow ٨\sqrt{٢} = ٢^{\frac{٧}{٢}}$

[٣] $\text{لو}_{٣}\ \frac{١}{٢٧} = -٣ \Leftrightarrow \frac{١}{٢٧} = ٣^{-٣}$

[٤] $\text{لو}\ ٠{,}٠١ = -٢ \Leftrightarrow ٠{,}٠١ = ١٠^{-٢}$

مثال ٢

اكتب الصورة اللوغاريتمية المكافئة لكل من الصور الأسية الآتية :

[١] $٢٤٣ = (\sqrt{٣})^{١٠}$ [٢] $١٠^{-٢} = ٠{,}٠١$ [٣] $٣^{\frac{٥}{٢}} = ٩\sqrt{٣}$ [٤] $\text{حـ} = \text{أ}^{\text{س}}$

الحل

[١] $٢٤٣ = (\sqrt{٣})^{١٠} \Leftrightarrow \text{لو}_{\sqrt{٣}}\ ٢٤٣ = ١٠$

[٢] $١٠^{-٢} = ٠{,}٠١ \Leftrightarrow \text{لو}_{١٠}\ ٠{,}٠١ = -٢$

[٣] $٣^{\frac{٥}{٢}} = ٩\sqrt{٣} \Leftrightarrow \text{لو}_{٣}\ ٩\sqrt{٣} = \frac{٥}{٢}$

[٤] $\text{حـ} = \text{أ}^{\text{س}} \Leftrightarrow \text{لو}_{\text{أ}}\ \text{حـ} = \text{س}$

مثال ٣

أوجد قيمة كل من :

[١] $\text{لو}_{٢}\ ٦٤$ [٢] $\text{لو}_{٦}\ ١$ [٣] $\text{لو}_{٤}\ ٤\sqrt{٢}$

[٤] $\text{لو}_{\sqrt{٣}}\ \frac{١}{٢٧}$ [٥] $\text{لو}\ ٠{,}٠٠٠١$

الحل

[١] بفرض أن : $\text{لو}_{٢}\ ٦٤ = \text{س}$ $\therefore ٢^{\text{س}} = ٦٤$ $\therefore ٢^{\text{س}} = ٢^{٦}$

$\therefore \text{س} = ٦$ $\therefore \text{لو}_{٢}\ ٦٤ = ٦$

[٢] بفرض أن : $\text{لو}_{٦}\ ١ = \text{س}$ $\therefore ٦^{\text{س}} = ١$

$\therefore \text{س} = \text{صفر}$ $\therefore \text{لو}_{٦}\ ١ = \text{صفر}$

[٣] بفرض أن : $\text{لو}_{٤}\ ٤\sqrt{٢} = \text{س}$ $\therefore ٤^{\text{س}} = ٤\sqrt{٢}$ $\therefore ٢^{٢\text{س}} = ٢^{٢} \times ٢^{\frac{١}{٢}}$

$\therefore ٢^{٢\text{س}} = ٢^{\frac{٥}{٢}}$ $\therefore ٢\text{س} = \frac{٥}{٢}$ $\therefore \text{س} = \frac{٥}{٤}$

$\therefore \text{لو}_{٤}\ ٤\sqrt{٢} = \frac{٥}{٤}$

[٤] بفرض أن : $\text{لو}_{\sqrt{٣}}\ \frac{١}{٢٧} = \text{س}$ $\therefore (\sqrt{٣})^{\text{س}} = \frac{١}{٢٧}$ $\therefore ٣^{\frac{١}{٢}\text{س}} = ٣^{-٣}$

$\therefore \frac{١}{٢}\text{س} = -٣$ $\therefore \text{س} = -٦$ $\therefore \text{لو}_{\sqrt{٣}}\ \frac{١}{٢٧} = -٦$

[٥] بفرض أن : $\text{لو}\ ٠{,}٠٠٠١ = \text{س}$ $\therefore ١٠^{\text{س}} = ٠{,}٠٠٠١ = ١٠^{-٤}$

$\therefore \text{س} = -٤$ $\therefore \text{لو}\ ٠{,}٠٠٠١ = -٤$

مثال ٤

أوجد قيمة س إذا كان :

١ لو$_{٢}$ س = −٤   ٢ لو$_{٩}$ ٨١ $\sqrt{٣}$ = س   ٣ لو$_{\frac{١}{٢}}$ س = −٣   ٤ لو$_{س}$ ٨ = ٦

الحل

١ ∵ لو$_{٢}$ س = −٤   ∴ س = ٢$^{-٤}$ ∴ س = $\frac{١}{٢^{٤}}$ = $\frac{١}{١٦}$

٢ ∵ لو$_{٩}$ ٨١ $\sqrt{٣}$ = س   ∴ ٩^{س} = ٨١ $\sqrt{٣}$ ∴ ٣^{٢س} = ٣^{٤} × ٣$^{\frac{١}{٢}}$

∴ ٣^{٢س} = ٣$^{\frac{٩}{٢}}$ ∴ ٢ س = $\frac{٩}{٢}$ ∴ س = $\frac{٩}{٤}$

٣ ∵ لو$_{\frac{١}{٢}}$ س = −٣   ∴ س = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{-٣}$ = ٢^{٣} ∴ س = ٨

٤ ∵ لو$_{س}$ ٨ = ٦   ∴ س^{٦} = ٨   ∴ س^{٦} = ٢^{٣}

∴ س = (٢^{٣})$^{\frac{١}{٦}}$ ∴ س = ٢$^{\frac{١}{٢}}$ ∴ س = $\sqrt{٢}$

مثال ٥

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

١ لو$_{س}$ ٧ س = ٢   ٢ لو$_{٢}$ (س^{٢} + $\frac{٣}{٤}$ س) = −٢

٣ لو$_{٢}$ لو$_{٣}$ (س^{٢} − ٧ س + ٢١) = ١   ٤ (لو$_{٢}$ س)^{٢} − ٣ لو$_{٢}$ س = ٤

الحل

١ ∵ لو$_{س}$ ٧ س = ٢   ∴ س^{٢} = ٧ س

∴ س^{٢} − ٧ س = ٠   ∴ س (س − ٧) = ٠

∴ إما س = ٠ (مرفوض) أ، س = ٧ (يحقق)

∴ مجموعة الحل = {٧}

> **لاحظ أنـه**
>
> عند حل المعادلات نعوض بالقيم التى تحصل عليها فى المعادلة الأصلية ويكون الحل هو القيمة التى تحقق هذه المعادلة حيث إنه لا معنى للحديث عن لوغاريتم عدد غير موجب.
>
> أو إيجاد مجموعة قيم المتغير س المسموح التعويض بها قبل البدء فى حل المعادلات وذلك لتجنب عملية التعويض بقيم س التى تم الحصول عليها.

٢ ∵ لو$_{٢}$ (س^{٢} + $\frac{٣}{٤}$ س) = −٢

∴ س^{٢} + $\frac{٣}{٤}$ س = ٢$^{-٢}$

∴ س^{٢} + $\frac{٣}{٤}$ س = $\frac{١}{٤}$

∴ ٤ س^{٢} + ٣ س − ١ = ٠

∴ (س + ١) (٤ س − ١) = ٠   ∴ س = −١ (يحقق) أ، س = $\frac{١}{٤}$ (يحقق)

∴ مجموعة الحل = {−١ ، $\frac{١}{٤}$}

[٣] ∵ لو$_٢$ لو$_٣$ (س^٢ − ٧ س + ٢١) = ١

∴ لو$_٣$ (س^٢ − ٧ س + ٢١) = ٢^١ = ٢

∴ س^٢ − ٧ س + ٢١ = ٣^٢ = ٩

∴ س^٢ − ٧ س + ١٢ = ٠

∴ (س − ٣) (س − ٤) = ٠

∴ إما س = ٣ (يحقق) أ، س = ٤ (يحقق)

∴ مجموعة الحل = {٣ ، ٤}

[٤] ∵ (لو$_٢$ س)^٢ − ٣ لو$_٢$ س − ٤ = ٠

∴ (لو$_٢$ س − ٤) (لو$_٢$ س + ١) = ٠

∴ إما لو$_٢$ س = ٤

∴ س = ٢^٤ = ١٦ (يحقق)

أ، لو$_٢$ س = −١

∴ س = ٢$^{-١}$ = $\frac{١}{٢}$ (يحقق)

∴ مجموعة الحل = {١٦ ، $\frac{١}{٢}$}

مثال ٦

إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = لو$_أ$ س يمر بالنقطة (٢٧ ، ٣)

أوجد قيمة أ ثم ارسم منحنى الدالة د متخذًا س ∈ [$\frac{١}{٩}$ ، ٩] ومن الرسم :

[١] استنتج المجال والمدى والاطراد ونقطة تقاطع المنحنى مع محور السينات.

[٢] أوجد قيمة تقريبية للعدد لو$_٣$ ٦

الحـــل

∵ د (س) = لو$_أ$ س لكل س > ٠ ، أ ∈ ح$^+$ − {١}

، ∵ النقطة (٢٧ ، ٣) ∈ منحنى الدالة ∴ ٣ = لو$_أ$ ٢٧ ∴ أ^٣ = ٢٧ = ٣^٣

∴ أ = ٣ ∴ د (س) = لو$_٣$ س

نكون الجدول الآتى : [مع ملاحظة أن الأساس = ٣ > ١]

س	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩
ص = لو$_٣$ س	−٢	−١	صفر	١	٢

* لاحظ اختيار قيم س قوى العدد ٣ (الأساس) {٣$^{-٢}$ ، ٣$^{-١}$ ، ٣^٠ ، ٣^١ ، ٣^٢}

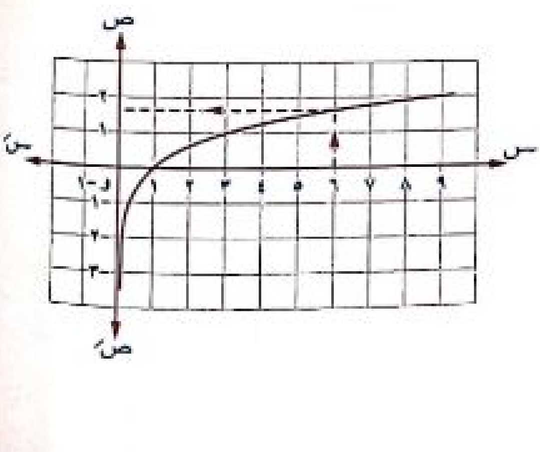
• ومن الرسم نجد أن :

* المجال = ح$^+$ ، المدى = ح

* الدالة تزايدية على مجالها.

* المنحنى يقطع محور السينات فى النقطة (١ ، ٠)

* لو$_٣$ ٦ ≃ ١٫٦



مثال ٧

إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = لو$_{أ}$ س يمر بالنقطة $(\frac{١}{١٦}$ ، ٤$)$ أوجد قيمة أ ثم ارسم منحنى الدالة د متخذاً س ∈ $[\frac{١}{٤}$ ، ٤$]$ ومن الرسم استنتج المدى والاطراد ثم أوجد قيمة تقريبية للعدد لو$_{\frac{١}{٢}}$ ٣,٥

الحل

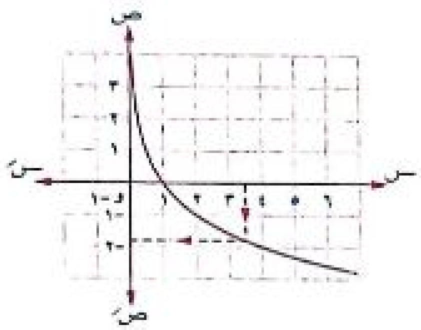
∵ د (س) = لو$_{أ}$ س لكل س > ٠ ، أ ∈ ح$^{+}$ − {١} ، ∵ النقطة $(\frac{١}{١٦}$ ، ٤$)$ ∈ منحنى الدالة

∴ ٤ = لو$_{أ}$ $\frac{١}{١٦}$ ∴ أ^{٤} = $\frac{١}{١٦}$ = $(\frac{١}{٢})^{٤}$

∴ أ = $\frac{١}{٢}$ (ويرفض الحل السالب)   ∴ د (س) = لو$_{\frac{١}{٢}}$ س

نكون الجدول الآتى : (مع ملاحظة أن الأساس = $\frac{١}{٢}$ < ١)

س	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤
ص = لو$_{\frac{١}{٢}}$ س	٢	١	صفر	−١	−٢



* لاحظ اختيار قيم س قوى العدد $\frac{١}{٢}$ (الأساس)

$\{(\frac{١}{٢})^{-٢} ، (\frac{١}{٢})^{-١} ، (\frac{١}{٢})^{٠} ، (\frac{١}{٢})^{١} ، (\frac{١}{٢})^{٢}\}$

• **ومن الرسم نجد أن :**

* المدى = ح
* الدالة تناقصية على مجالها.
* لو$_{\frac{١}{٢}}$ ٣,٥ = −١,٨

مثال ٨

أوجد مجال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية :

[١] د (س) = لو$_{٤}$ (٤ − س)

[٢] د (س) = لو$_{١ - س}$ ٥

[٣] د (س) = لو$_{س - ٢}$ س

[٤] د (س) = لو$_{٢ - س}$ س

الحل

[١] الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق أن : ٤ − س > ٠ أى س < ٤

∴ مجال د =]−∞ ، ٤[

[٢] الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق أن

{١ − س > ٠ ، ١ − س ≠ ١} أى تحقق أن {س < ١ ، س ≠ ٠}

∴ مجال د =]−∞ ، ١[− {٠}

تذكر أن

الدالة د : د (س) = لو$_{أ}$ س معرفة لجميع قيم س ، أ التى تحقق أن : {س > ٠ ، أ > ٠ ، أ ≠ ١}

٣ الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق أن

{ س > ٠ ، س − ٣ > ٠ ، س − ٣ ≠ ١ } أى تحقق أن { س > ٠ ، س > ٣ ، س ≠ ٤ } ∴ مجال د =]٣ ، ∞[− {٤}

٤ الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق أن { س > ٠ ، ٣ − س > ٠ ، ٣ − س ≠ ١ } أى تحقق أن { س > ٠ ، س < ٣ ، س ≠ ٢ }

∴ مجال د =]٠ ، ٣[− {٢}

مثال ٩

استخدم منحنى الدالة د : د (س) = لو ٢ س لتمثيل كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم حدد مجال ومدى واطراد كل دالة :

١ ر (س) = لو ٢ س + ٢ ٢ ق (س) = لو ٢ (س − ١)

٣ ك (س) = − لو ٢ س ٤ ت (س) = لو ٢ (−س)

الحل

١ منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د

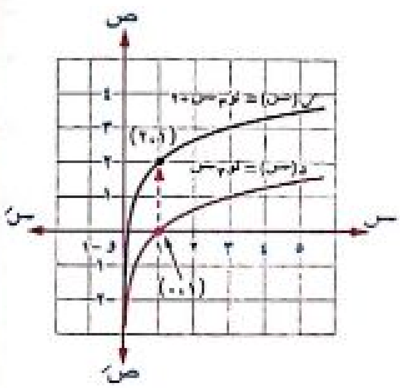
بإزاحة رأسية قدرها ٢ وحدة

فى اتجاه و ص

، المجال =]٠ ، ∞[

، المدى = ح

، الدالة تزايدية على مجالها.



٢ منحنى الدالة ق هو نفس منحنى الدالة د

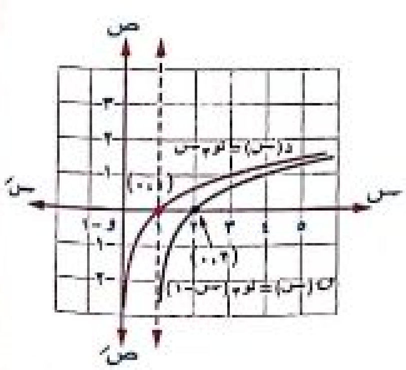
بإزاحة أفقية قدرها وحدة واحدة

فى اتجاه و س

، المجال =]١ ، ∞[

، المدى = ح

، الدالة تزايدية على مجالها.

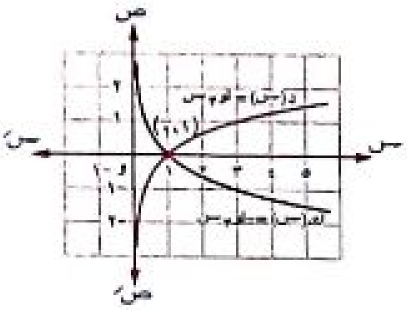


[٣] منحنى الدالة ك هو نفس منحنى الدالة د بالانعكاس فى محور السينات

، المجال =]٠ ، ∞[

، المدى = ح

، الدالة تناقصية على مجالها.

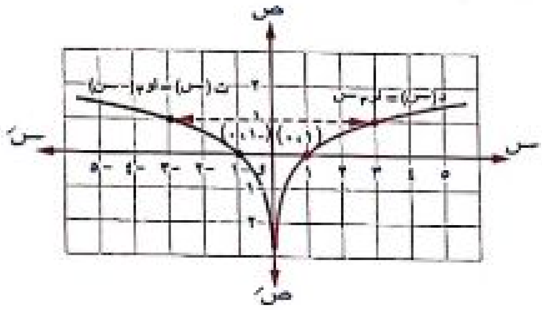


[٤] منحنى الدالة ت هو نفس منحنى الدالة د بالانعكاس فى محور الصادات

، المجال =]- ∞ ، ٠[

، المدى = ح

، الدالة تناقصية على مجالها.



استخدام الآلة الحاسبة

* مفتاح اللوغاريتم لأى أساس هو (log□) ، مفتاح اللوغاريتم المعتاد هو (log)

فمثلًا :

[١] لإيجاد لو$_{٣}$ ٢٤ نستخدم مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتى

Start → (log□) (3) (REPLAY) (2) (4) (=) 2.892789261

فيكون لو$_{٣}$ ٢٤ ≃ ٢,٨٩٢٨ مقربًا لأربعة أرقام عشرية.

[٢] لإيجاد لو ٨,٤ نستخدم مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتى

Start → (log) (8) (.) (4) (=) 0.9242792861

فيكون لو ٨,٤ ≃ ٠,٩٢٤٣ مقربًا لأربعة أرقام عشرية.

[٣] لإيجاد العدد س الذى يحقق لو س = ٠,٤٥٧٢ نستخدم مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتى

Start → (shift) (log) (0) (.) (4) (5) (7) (2) (=) 2.865497276

∴ س ≃ ٢,٨٦٥٥ مقربًا لأربعة أرقام عشرية.

(٢٤) إذا كانت : د (س) = $٣^{س}$ فإن : $د^{-١}$ (س) = ...

(أ) لو$_{س}$ ٣ (ب) لو$_{٣}$ س (جـ) $س^{-٣}$ (د) $٣^{س}$

(٢٥) د (س) = لو$_{٢}$ (س + ٤) فإن : $د^{-١}$ (٢) = ...

(أ) ٦ (ب) ٥ (جـ) لو$_{٢}$ ٦ (د) لو$_{٦}$ ٢

(٢٦) إذا كانت : د (س) = لو$_{٢}$ (س + ك) وكان $د^{-١}$ (٣) = ١ فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

(٢٧) قيمة لو$_{٦}$ ٣٣ باستخدام الحاسبة هي .... تقريبًا.

(أ) ١,٩٥ (ب) ٠,٥١٢ (جـ) ٢,٢٩٧ (د) ٠,٧٤

(٢٨) قيمة س حيث لو س = ٠,٣٥ هي .... مقربة لأقرب جزء من ألف

(أ) ٣,٥٣٤ (ب) ٢,٨٣٩ (جـ) ٢,٢٣٩ (د) ± ٢,٢٣٩

(٢٩) منحنى الدالة د : د (س) = لو$_{٢}$ (س + ١) يقطع محور السينات فى النقطة ....

(أ) (٠ ، ٠) (ب) (١ ، ٠) (جـ) (٢ ، ٠) (د) (١ ، ١)

(٣٠) منحنى الدالة د : د (س) = لو$_{٢}$ (٣ − س) يقطع محور السينات فى النقطة ....

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٢ ، ٠) (جـ) (٠ ، ١) (د) (٣ ، ٠)

(٣١) مدى الدالة د : د (س) = لو$_{٢}$ س هو ....

(أ) $ح^{+}$ (ب) $ح^{-}$ (جـ) ح (د) $ح^{*}$

(٣٢) الدالة د : د (س) = لو$_{أ}$ س متناقصة لكل أ ∋ ....

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]−∞ ، ٠[(جـ)]٠ ، ١[(د)]١ ، ∞[

(٣٣) إذا كانت الدالة د : د (س) = لو$_{\frac{١}{٢}}$ س فإن : د $\left(\frac{١}{٤}\right)$ + د (٨) = ...

(أ) −٣ (ب) −١ (جـ) ٢ (د) ٥

(٣٤) إذا كان : لو$_{\frac{١}{٢}}$ د (س) = س فإن : ٨ د (٢) + د (−٣) + د (٠) = ...

(أ) $\frac{١}{١٦}$ (ب) $\frac{١}{٨}$ (جـ) ١١ (د) ٢٢

(٣٥) 📖 إذا كان المنحنى ص = لو$_{٤}$ (١ − أ س) يمر بالنقطة $\left(\frac{١}{٤} ، -\frac{١}{٢}\right)$ فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٨

(٣٦) إذا كان منحنى الدالة د حيث د (س) = لو$_{أ}$ س يمر بالنقطة (٨ ، ٣) فإن : د (٤) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) $\frac{١}{٤}$ (د) -٢

(٣٧) مجال الدالة د حيث د (س) = لو$_{(١ - س)}$ ٣ هو ....

(أ)]-∞ ، ٠[∪]٠ ، ١[(ب)]-∞ ، ١[

(ج)]١ ، ∞[(د)]-١ ، ١[

(٣٨) مجال الدالة د : د (س) = لو$_{١ - س}$ س هو ....

(أ) س > ٠ (ب) س < ١

(ج) ٠ < س < ١ (د) ٠ ≤ س ≤ ١

(٣٩) مجال الدالة د حيث د (س) = لو$_{س}$ (٥ - س) هو ....

(أ)]٠ ، ٥[- {١} (ب) [٠ ، ٥] (ج)]٠ ، ٥[(د)]-∞ ، ٥[

(٤٠) إذا كان أ ، س ، ص ∈ ح$^{+}$ ، أ ≠ ١ وكان : لو$_{أ}$ س = لو$_{أ}$ ص فإن : ....

(أ) ص = س (ب) ص = - س (ج) ص = أ^{س} (د) س = أ^{ص}

(٤١) إذا كان أ ، س ، ص ∈ ح$^{+}$ ، أ ≠ ١ وكان لو$_{أ}$ س = لو$_{أ}$ ص

فإن : س = ص لأن د (س) = لو$_{أ}$ س هي دالة ....

(أ) فردية. (ب) زوجية. (ج) تزايدية. (د) أحادية.

(٤٢) إذا كان : د (س) = لو$_{أ}$ س ، أ ∈]٠ ، ١[فإن العبارات الآتية صحيحة ما عدا ....

(أ) إذا كان : لو$_{أ}$ س = لو$_{أ}$ ص فإن : س = ص

(ب) الدالة د تزايدية على مجالها.

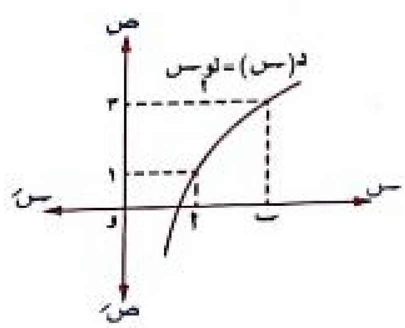
(ج) إذا كان : لو$_{أ}$ س > لو$_{أ}$ ص فإن : س < ص

(د) الدالة د ليست فردية ولا زوجية.

(٤٣) إذا كان : لو$_{أ}$ س < ٠ حيث أ > ١ فإن : س ∈ ....

(أ)]٠ ، ١[(ب)]١ ، ∞[(ج)]-∞ ، ٠[(د)]٠ ، ∞[

(٤٤) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د : د (س) = لو$_{أ}$ س



فإن : ب = ...

(أ) أ^{٢} (ب) أ + ٣

(ج) أ^{٣} (د) ٣ أ

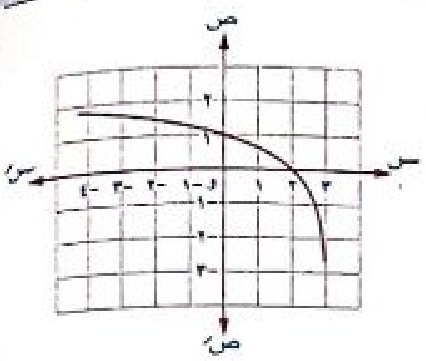
(٤٥) الشكل المقابل يمثل الدالة ....

(أ) ص = ٣$^{-س}$ - ١

(ب) ص = ٣$^{-س}$ + ١

(جـ) ص = لو$_{٢}$ (٢ - س)

(د) ص = لو$_{٢}$ (٣ - س)



ثانيًا الأسئلة المقالية

١ عبر عن كل من الصور اللوغاريتمية الآتية بالصورة الأسية المكافئة لها :

(١) لو$_{٢}$ ١٢٨ = ٧ (٢) لو$_{\frac{٢}{٥}}$ $\frac{٤}{٢٥}$ = ٢ (٣) لو$_{٢}$ ٤ $\sqrt{٢}$ = $\frac{٥}{٢}$

٢ عبر عن كل من الصور الأسية الآتية بالصورة اللوغاريتمية المكافئة لها :

(١) ٥^{صفر} = ١ (٢) ١٠$^{-٤}$ = ٠,٠٠٠١ (٣) ٥$^{-٣}$ = $\frac{١}{١٢٥}$

٣ أوجد قيمة كل مما يأتى :

(١) لو$_{٢}$ ١٦ «٤» (٢) لو$_{٨}$ ١ «صفر»

(٣) لو ٠,٠٠٠٠١ «-٥» (٤) لو$_{\frac{١}{٢}}$ ١٢٨ «-٧»

(٥) لو$_{٢}$ $\frac{١}{٨}$ «-٣» (٦) لو$_{٢\sqrt{٢}}$ ٨ $\sqrt{٢}$ «٧»

(٧) لو$_{٣}$ $\sqrt[٤]{٢٧}$ «$\frac{٣}{٤}$» (٨) لو$_{٢}$ جا ٤٥° «-$\frac{١}{٢}$»

٤ حل فى ح كلاً من المعادلات الآتية :

(١) لو$_{٢}$ س = ٧ «١٢٨» (٢) لو$_{٥}$ س = -٢ «$\frac{١}{٢٥}$»

(٣) لو$_{٣}$ س^{٢} = ٤ «± ٩» (٤) لو$_{٨١}$ س = $\frac{٣}{٤}$ «٢٧»

(٥) لو$_{٢}$ س$^{-١}$ = -٥ «٣٢» (٦) لو$_{٢}$ (لو$_{٣}$ س) = ١ «٩»

(٧) لو$_{٣}$ (٢س - ٥) = ٠ «٣» (٨) لو$_{٨}$ $\sqrt[٣]{س^{٢} + ٤٨}$ = $\frac{٢}{٣}$ «± ٤»

(٩) لو$_{٢}$ لو$_{٣}$ (س^{٢} - ٢ س) = ١ «٤ ، -٢» (١٠) لو$_{٥}$ |٢س + ١| = ١ «٢ ، -٣»

(١١) لو$_{٢}$ س (س + ٦) = ٤ «٢ ، -٨» (١٢) لو$_{٣}$ (س^{٢} - ٢ س) = ١ «٣ ، -١»

(١٣) (لو$_{٣}$ س)^{٢} - ٩ لو$_{٣}$ س + ٢٠ = ٠ «٨١ ، ٢٤٣» (١٤) لو$_{٣}$ (٣^{س} - ٣$^{س-٢}$) = ٢ «٢»

(١٥) ٢$^{لو_{٤} (س + ١,٢٥)}$ = $\frac{١}{٢}$ «-١» (١٦) |لو$_{١٠}$ س - ٢| = ٢ «١٠^{٤} ، ١»

٥ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

① $لو_{س}$ ١٢٥ = ٣ «{٥}»

② 📖 $لو_{س}$ ٢ = ٥ «{$\sqrt[5]{2}$}»

③ 📖 $لو_{س}$ ٣ = −٢ «{$\frac{1}{\sqrt{3}}$}»

④ $لو_{س}$ ٠,٠٠١ = $\frac{-3}{4}$ «{١٠٠٠٠}»

⑤ $لو_{س}$ ٨١ = ٤ «{−٣}»

⑥ $لو_{س-1}$ ٢٧ = ٣ «{٤}»

⑦ $لو_{س-1}$ (٧ − س) = ٢ «{٣}»

⑧ $لو_{\frac{2}{س}}$ ٦٤ = −٣ «{٨}»

⑨ 📖 $لو_{س}$ ٥ س = ٢ «{٥}»

⑩ $لو_{س}$ $س^{6}$ = ٥ س «{$\frac{6}{5}$}»

⑪ $لو_{2}$ $لو_{3}$ $لو_{س}$ ٢٧ = ٠ «{٣}»

⑫ $لو_{س}$ ($س^{2}$ − ١٢) = ١ «{٤}»

⑬ $لو_{س}$ ($\sqrt{س - 2}$ + ٢) = ١ «{٣ ، ٢}»

⑭ ($لو_{3}$ س$)^{2}$ + ١٥ = ٨ $لو_{3}$ س «{٢٧ ، ٢٤٣}»

⑮ $لو_{27}$ (س − ٢) + $لو_{3}$ (س − ٢) = ٤ «{٢٩}»

٦ أوجد قيمة س فى كل مما يأتى :

① $لو_{4}$ ٨ $\sqrt{2}$ = س «$\frac{7}{4}$»

② $لو_{\sqrt[3]{5}}$ ٦٢٥ $\sqrt{5}$ = $س^{2}$ «± ٣»

③ $لو_{0,3}$ ٠,٠٩ = $س^{-2}$ «± $\frac{1}{\sqrt{2}}$»

④ 📖 $لو_{2}$ ($2^{س}$ − ٤) + س − ٥ = ٠ «٣»

⑤ 📖 $لو_{4}$ [١٢ + $لو_{2}$ (س − ١)] = ٢ «٩»

⑥ 📖 $لو_{2}$ $\left(\frac{س^{2}}{2س - 3}\right)$ = ١ «٣»

٧ باستخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتى مقربًا لأربعة أرقام عشرية :

① 📖 لو ٣,١٥ ② $لو_{3}$ ٢٧ ③ ٤ لو ٧ − ٥ لو ١٢

٨ باستخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة س فى كل مما يأتى مقربًا لأربعة أرقام عشرية :

① لو س = ٠,٢٣٤٥ ② لو س = ١,٤١٢ ③ لو س = −٣,٠

٩ أوجد مجموعة الحل لكل زوج من المعادلات الآتية فى ح × ح :

① $س^{ص}$ = ٥ س − ٤ ، $لو_{س}$ ١٦ = ص «{(٤ ، ٢)}»

② $لو_{س}$ $لو_{3}$ $لو_{س}$ ص = ٠ ، $لو_{ص}$ ٩ = ١ «{(٣ ، ٩)}»

١٠ إذا كان : $لو_{16}$ ٤٩ = أ ، $لو_{7}$ ٢,٥ = ب أثبت أن : $4^{أب+1}$ = ١٠

١١ عين مجال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية :

① د (س) = $لو_{٢}$ (٢ س + ١)
② د (س) = ٢ لو س
③ د (س) = $لو_{س}$ س
④ د (س) = $لو_{س - ٢}$ س
⑤ د (س) = $لو_{٢ - س}$ س
⑥ د (س) = $لو_{(٥ - س)}$ (س − ٣)
⑦ د (س) = $لو_{س - ٢}$ $س^{٢}$
⑧ د (س) = $لو_{س + ٢}$ (٣ س + ١)
⑨ د (س) = $لو_{٤}$ (٢ − س) (س + ١)
⑩ د (س) = $لو_{س}$ (٣ − س) (س + ١)

---

١٢ إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = $لو_{أ}$ س يمر بالنقطة (٨١ ، ٤)

أوجد قيمة أ ثم ارسم منحنى الدالة د متخذًا س ∋ [$\frac{١}{٩}$ ، ٩] ومن الرسم :

① استنتج المجال والمدى والاطراد ونقطة تقاطع المنحنى مع محور السينات.

② أوجد قيمة تقريبية للعدد $لو_{٣}$ ٥

---

١٣ إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = $لو_{أ}$ س يمر بالنقطة ($\frac{١}{٨}$ ، ٣) أوجد قيمة أ

ثم ارسم منحنى الدالة د متخذًا س ∋ [$\frac{١}{٤}$ ، ٤] ومن الرسم استنتج المدى والاطراد ونقطة تقاطع المنحنى مع محور السينات ثم أوجد قيمة تقريبية للعدد $لو_{\frac{١}{٢}}$ ٣,٥

---

١٤ استخدم منحنى الدالة د : د (س) = $لو_{\frac{١}{٢}}$ س لتمثيل كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية

، ومن الرسم حدد مجال ومدى واطراد كل دالة :

① ر (س) = $لو_{\frac{١}{٢}}$ س + ٢
② ن (س) = $لو_{\frac{١}{٢}}$ (س + ١)
③ هـ (س) = − $لو_{\frac{١}{٢}}$ س

---

١٥ استخدم منحنى الدالة د : د (س) = $لو_{٢}$ س لتمثيل كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ، ومن الرسم

حدد مجال ومدى واطراد كل دالة :

① ن (س) = $لو_{٢}$ (س − ٢)
② ت (س) = $لو_{٢}$ س + ١
③ هـ (س) = − $لو_{٢}$ س
④ ر (س) = $لو_{٢}$ (− س)

---

١٦ ارسم فى شكل واحد منحنى كل من الدالتين ر ، د حيث ر (س) = $لو_{٢}$ س

، د (س) = ٦ − س ثم استخدم ذلك فى إيجاد مجموعة حل المعادلة : $لو_{٢}$ س = ٦ − س   {٤}

١٧ ارسم فى شكل واحد منحنى كل من الدالتين ر ، د حيث ر (س) = لو ٢ س
، د (س) = ٤ − س ثم استخدم ذلك فى إيجاد مجموعة حل المعادلة : لو ٢ س = ٤ − س «{٣}»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : د (س) = لو أ (٢ س + ٤) وكانت : $د^{-1}$ (٥) = ١٤ فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢) إذا كانت د : $ح^+$ ⟵ ح وكان : د (س) = لو أ س وكان : $د^{-1}$ (أ + ٣) = ٣٢
فإن : أ = ...

(أ) −٤ (ب) −٢ (جـ) −١ (د) $-\frac{1}{2}$

(٣) إذا كان : د (س) = لو ٣ (س + ١) ، ر (س) = ٥ + لو ٣ (س − ١)
فإن : (د ∘ ر) (١٠) = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

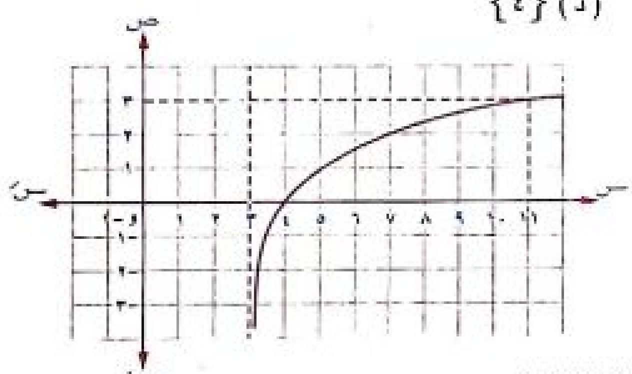
(٤) إذا كان : لو (س − ٥) > صفر فإن : ....

(أ) س > ٥ (ب) س > ٦ (جـ) س > ١ (د) س < ٥

(٥) مجموعة حل المعادلة : لو ٢ لو ٣ | | س − ١ | + ٥ | = ١ فى ح هى ....

(أ) {٢ ، ٤} (ب) {٢ ، −٢ ، ٤ ، −٤}
(جـ) {−٢ ، ٤} (د) {٤}

(٦) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة
د : د (س) = لو ٢ (س + ب)
فإن : د (٧) + $د^{-1}$ (٢) = ...



(أ) ٩ (ب) ٨
(جـ) ٧ (د) ٦

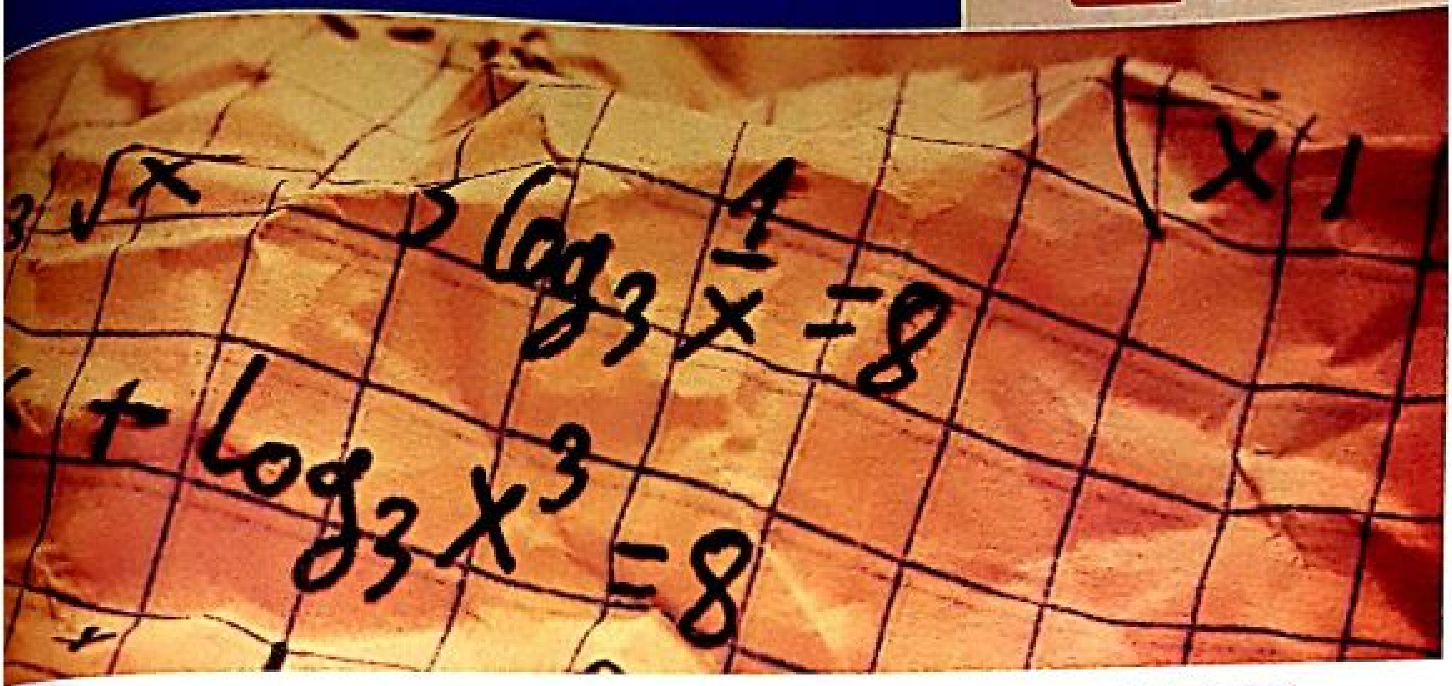
(٧) مجال الدالة د : د (س) = لو | $س^2$ − ٩ | هو ....

(أ) $ح^*$ (ب) ح − {٣ ، −٣}
(جـ) ح − [−٣ ، ٣] (د)]−٣ ، ٣[

(٨) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{\text{لو}_٣ (س + ٣)}{س^2 + ٣ س + ٢}$ هو ....

(أ) ح − {−٢ ، −١} (ب)]−٢ ، ∞[
(جـ) ح − {−٢ ، −١ ، −٣} (د)]−٣ ، ∞[− {−١ ، −٢}

الدرس 5 بعض خواص اللوغاريتمات



الخاصية الأولى

* إذا كان : أ ∈ ح$^{+}$ − {١} فإن : **لو$_{أ}$ أ = ١**

فمثلاً : لو$_{٧}$ ٧ = ١ ، لو$_{٥}$ ٥ = ١ ، لو$_{\sqrt[٣]{٢}}$ $\sqrt[٣]{٢}$ = ١

الإثبات : ∵ أ^{١} = أ وبالتحويل إلى الصورة اللوغاريتمية ∴ لو$_{أ}$ أ = ١

الخاصية الثانية

* إذا كان : أ ∈ ح$^{+}$ − {١} فإن : **لو$_{أ}$ ١ = صفر**

فمثلاً : لو$_{٣}$ ١ = صفر ، لو$_{٥}$ ١ = صفر ، لو$_{\sqrt{٧}}$ ١ = صفر

الإثبات : ∵ أ^{صفر} = ١ وبالتحويل إلى الصورة اللوغاريتمية ∴ لو$_{أ}$ ١ = صفر

الخاصية الثالثة   خاصية الضرب

* إذا كان : س ، ص ∈ ح$^{+}$ ، أ ∈ ح$^{+}$ − {١} فإن : **لو$_{أ}$ س ص = لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص**

فمثلاً : لو$_{٣}$ (٢ × ٥) = لو$_{٣}$ ٢ + لو$_{٣}$ ٥

والعكس صحيح : لو$_{٥}$ ٢ + لو$_{٥}$ ١١ = لو$_{٥}$ (٢ × ١١) = لو$_{٥}$ ٢٢

الإثبات : بوضع لو$_{أ}$ س = ب ، لو$_{أ}$ ص = جـ

∴ س = أ^{ب} ، ص = أ^{جـ} ∴ س ص = أ^{ب} × أ^{جـ}

∴ س ص = أ$^{ب + جـ}$ وبالتحويل إلى الصورة اللوغاريتمية

∴ لو$_{أ}$ س ص = ب + جـ ∴ لو$_{أ}$ س ص = لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص

نتيجة : إذا كانت : س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، س$_{٣}$ ، ..... ، س$_{ن}$ ∈ ح$^{+}$ ، أ ∈ ح$^{+}$ − {١}

فإن : لو$_{أ}$ (س$_{١}$ × س$_{٢}$ × س$_{٣}$ × ..... × س$_{ن}$) = لو$_{أ}$ س$_{١}$ + لو$_{أ}$ س$_{٢}$ + ... + لو$_{أ}$ س$_{ن}$

فمثلاً : $لو_{٢} (٣ × ٥ × ٧) = لو_{٢} ٣ + لو_{٢} ٥ + لو_{٢} ٧$

والعكس صحيح : $لو_{م} ٧٥ + لو_{م} \frac{٤}{٩} + لو_{م} ٠,٠٦ = لو_{م} \left(٧٥ × \frac{٤}{٩} × \frac{٦}{١٠٠}\right) = لو_{م} ٢$

تنبيه هام

تذكر جيدًا أن : $لو_{م} (س + ص) \neq لو_{م} س + لو_{م} ص$

كما أن : $لو_{م} (س × ص) \neq لو_{م} س × لو_{م} ص$

الخاصية الرابعة — خاصية القسمة

* إذا كان : س ، ص ∈ $ح^{+}$ ، م ∈ $ح^{+}$ − {١} فإن : $لو_{م} \frac{س}{ص} = لو_{م} س - لو_{م} ص$

فمثلاً : $لو_{٥} \frac{٢}{٣} = لو_{٥} ٢ - لو_{٥} ٣$ والعكس صحيح : $لو_{٥} ١١ - لو_{٥} ٢ = لو_{٥} \frac{١١}{٢}$

الإثبات : بوضع $لو_{م} س = ب$ ، $لو_{م} ص = جـ$ ∴ $س = م^{ب}$ ، $ص = م^{جـ}$

∴ $\frac{س}{ص} = \frac{م^{ب}}{م^{جـ}} = م^{ب - جـ}$

وبالتحويل إلى الصورة اللوغاريتمية ∴ $لو_{م} \frac{س}{ص} = ب - جـ$

أى أن $لو_{م} \frac{س}{ص} = لو_{م} س - لو_{م} ص$

نتيجة : $لو_{م} \frac{س ص}{ع ل} = لو_{م} س + لو_{م} ص - لو_{م} ع - لو_{م} ل$

تنبيه هام

تذكر جيدًا أن : $لو_{م} (س - ص) \neq لو_{م} س - لو_{م} ص$

كما أن : $لو_{م} \left(\frac{س}{ص}\right) \neq لو_{م} س ÷ لو_{م} ص$

الخاصية الخامسة — خاصية لوغاريتم القوة

* إذا كان : س ∈ $ح^{+}$ ، م ∈ $ح^{+}$ − {١} ، ن ∈ ح فإن : $لو_{م} س^{ن} = ن لو_{م} س$

فمثلاً : $لو_{٢} ١٢٥ = لو_{٢} ٥^{٣} = ٣ لو_{٢} ٥$ والعكس صحيح : $٧ لو_{٥} ٢ = لو_{٥} ٢^{٧} = لو_{٥} ١٢٨$

الإثبات : $لو_{م} س^{ن} = لو_{م} (س × س × س × \cdots$ إلى ن حدًا$)$

$= لو_{م} س + لو_{م} س + \cdots$ إلى ن حدًا

$= ن لو_{م} س$

الخاصية السادسة — خاصية تغيير الأساس

* إذا كان : س ∈ $ح^{+}$ ، ص ∈ $ح^{+}$ − {١} ، م ∈ $ح^{+}$ − {١} فإن : $لو_{ص} س = \frac{لو_{م} س}{لو_{م} ص}$

فمثلاً : $لو_{٥} ٧ = \frac{لو ٧}{لو ٥}$ ، $لو_{٣} ٢ = \frac{لو_{١١} ٢}{لو_{١١} ٣}$

الإثبات : بوضع $\text{لو}_{ص}\, س = ع$ $\therefore$ $ص^{ع} = س$ بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس م

$\therefore$ $ع\ \text{لو}_{م}\, ص = \text{لو}_{م}\, س$ $\qquad \therefore$ $ع = \dfrac{\text{لو}_{م}\, س}{\text{لو}_{م}\, ص}$

أي أن $\text{لو}_{ص}\, س = \dfrac{\text{لو}_{م}\, س}{\text{لو}_{م}\, ص}$

الخاصية السابعة — خاصية المعكوس الضربي

* إذا كان : $س ، ص \in ح^{+} - \{١\}$ فإن : $\boxed{\text{لو}_{ص}\, س = \dfrac{١}{\text{لو}_{س}\, ص}}$

فمثلاً : $\text{لو}_{٧}\, ٥ = \dfrac{١}{\text{لو}_{٥}\, ٧}$ ومنها $\text{لو}_{٧}\, ٥ \times \text{لو}_{٥}\, ٧ = ١$

الإثبات : $\because$ $\text{لو}_{ص}\, س = \dfrac{\text{لو}\, س}{\text{لو}\, ص}$ ، $\text{لو}_{س}\, ص = \dfrac{\text{لو}\, ص}{\text{لو}\, س}$

$\therefore$ $\text{لو}_{ص}\, س \times \text{لو}_{س}\, ص = ١$ $\qquad \therefore$ $\text{لو}_{ص}\, س = \dfrac{١}{\text{لو}_{س}\, ص}$

مثال ١

بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة كل مما يأتي :

١ $\text{لو}_{٣}\, ١٥ + \text{لو}_{٣}\, ٦ - \text{لو}_{٣}\, ١٠$

٢ $\text{لو}_{٥}\, ١٠٠ - ٣\ \text{لو}_{٥}\, ٢ - \text{لو}_{٥}\, ١٨ + \text{لو}_{٥}\, ٣٦$

٣ $\text{لو}_{٥}\, \frac{٣}{٥} + ٢\ \text{لو}_{٥}\, \frac{١٥}{٢} - \text{لو}_{٥}\, \frac{٥}{٣٦} + \text{لو}_{٥}\, \frac{٥}{٢٤٣}$

٤ $\text{لو}_{٢}\, ٧ \times \text{لو}_{٧}\, ١١ \times \text{لو}_{١١}\, ٩ \times \text{لو}_{٣}\, ٢$

٥ $\dfrac{\text{لو}_{٢}\, ٢٤٣ - \text{لو}_{٢}\, ٣٢}{\text{لو}_{٢}\, ٢٧ - \text{لو}_{٢}\, ٨}$

الحل

١ المقدار $= \text{لو}_{٣}\, \dfrac{١٥ \times ٦}{١٠} = \text{لو}_{٣}\, ٩ = \text{لو}_{٣}\, ٣^{٢} = ٢\ \text{لو}_{٣}\, ٣ = ٢ \times ١ = ٢$

٢ المقدار $= \text{لو}_{٥}\, ١٠٠ - \text{لو}_{٥}\, ٢^{٣} - \text{لو}_{٥}\, ١٨ + \text{لو}_{٥}\, ٣٦$

$= \text{لو}_{٥}\, \dfrac{١٠٠ \times ٣٦}{٨ \times ١٨} = \text{لو}_{٥}\, ٢٥ = \text{لو}_{٥}\, ٥^{٢} = ٢\ \text{لو}_{٥}\, ٥ = ٢ \times ١ = ٢$

٣ المقدار $= \text{لو}_{٥}\, \frac{٣}{٥} + \text{لو}_{٥}\left(\frac{١٥}{٢}\right)^{٢} - \text{لو}_{٥}\, \frac{٥}{٣٦} + \text{لو}_{٥}\, \frac{٥}{٢٤٣}$

$= \text{لو}_{٥}\, \dfrac{\frac{٣}{٥} \times \frac{١٥}{٢} \times \frac{١٥}{٢} \times \frac{٥}{٢٤٣}}{\frac{٥}{٣٦}} = \text{لو}_{٥}\, \dfrac{٣ \times ١٥ \times ١٥ \times ٥ \times ٣٦}{٥ \times ٢ \times ٢ \times ٢٤٣ \times ٥} = \text{لو}_{٥}\, ٥ = ١$

٤ المقدار $= \dfrac{\text{لو}\, ٧}{\text{لو}\, ٢} \times \dfrac{\text{لو}\, ١١}{\text{لو}\, ٧} \times \dfrac{\text{لو}\, ٩}{\text{لو}\, ١١} \times \dfrac{\text{لو}\, ٢}{\text{لو}\, ٣} = \dfrac{\text{لو}\, ٩}{\text{لو}\, ٣} = \dfrac{\text{لو}\, ٣^{٢}}{\text{لو}\, ٣} = \dfrac{٢\ \text{لو}\, ٣}{\text{لو}\, ٣} = ٢$

٥ المقدار $= \dfrac{\text{لو}_{م}\, ٣^{٥} - \text{لو}_{م}\, ٢^{٥}}{\text{لو}_{م}\, ٣^{٣} - \text{لو}_{م}\, ٢^{٣}} = \dfrac{٥\ \text{لو}_{م}\, ٣ - ٥\ \text{لو}_{م}\, ٢}{٣\ \text{لو}_{م}\, ٣ - ٣\ \text{لو}_{م}\, ٢} = \dfrac{٥\,(\text{لو}_{م}\, ٣ - \text{لو}_{م}\, ٢)}{٣\,(\text{لو}_{م}\, ٣ - \text{لو}_{م}\, ٢)} = \dfrac{٥}{٣}$

مثال ٢

بدون استخدام حاسبة الجيب أثبت كلاً مما يأتى :

١) ٣ لو ٥ + ٢ لو ٦ − لو ٩ + لو ٠,٢ = لو$_{٥}$ ٢٥

٢) $\frac{\text{لو ٣٠ − لو ٦ + لو ٥}}{\text{لو ١٢ − لو ٣ + لو ٢٥}}$ = ١ − لو ٢

الحـــل

١) الطرف الأيمن = لو ٥^{٣} + لو ٦^{٢} − لو ٩ + لو $\frac{٢}{١٠}$

= لو $\frac{٥^{٣} \times ٦^{٢} \times \frac{٢}{١٠}}{٩}$ = لو $\frac{١٢٥ \times ٣٦ \times ٢}{٩ \times ١٠}$

= لو ١٠٠ = لو ١٠^{٢} = ٢ لو ١٠ = ٢

، الطرف الأيسر = لو$_{٥}$ ٥^{٢} = ٢ لو$_{٥}$ ٥ = ٢   ∴ الطرفان متساويان.

٢) الطرف الأيمن = $\frac{\text{لو } \frac{٣٠ \times ٥}{٦}}{\text{لو } \frac{١٢ \times ٢٥}{٣}}$ = $\frac{\text{لو ٢٥}}{\text{لو ١٠٠}}$ = $\frac{\text{لو ٥}^{٢}}{\text{لو ١٠}^{٢}}$ = $\frac{\text{٢ لو ٥}}{\text{٢ لو ١٠}}$ = لو ٥

، الطرف الأيسر = ١ − لو ٢ = لو ١٠ − لو ٢ = لو $\frac{١٠}{٢}$ = لو ٥   ∴ الطرفان متساويان.

مثال ٣

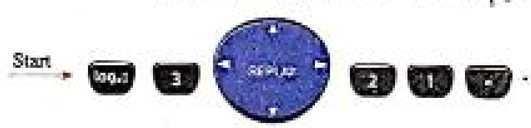
إذا كان : لو$_{٣}$ ٧ = ١,٧٧١

أوجد قيمة كل مما يأتى فى أبسط صورة ثم تحقق من الناتج باستخدام الآلة الحاسبة :

١) لو$_{٣}$ ٢١   ٢) لو$_{٣}$ ٦٣   ٣) لو$_{٣}$ $\frac{٧}{٩}$

الحـــل

١) لو$_{٣}$ ٢١ = لو$_{٣}$ (٣ × ٧) = لو$_{٣}$ ٣ + لو$_{٣}$ ٧ = ١ + ١,٧٧١ = ٢,٧٧١

(التحقق باستخدام الآلة الحاسبة ... )

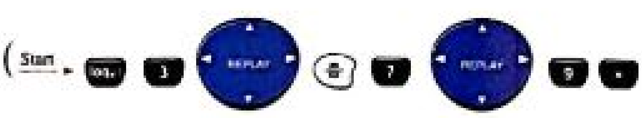
٢) لو$_{٣}$ ٦٣ = لو$_{٣}$ (٩ × ٧) = لو$_{٣}$ ٩ + لو$_{٣}$ ٧ = لو$_{٣}$ ٣^{٢} + لو$_{٣}$ ٧ = ٢ لو$_{٣}$ ٣ + لو$_{٣}$ ٧

= ٢ + ١,٧٧١ = ٣,٧٧١

(التحقق باستخدام الآلة الحاسبة ... )

٣) لو$_{٣}$ $\frac{٧}{٩}$ = لو$_{٣}$ ٧ − لو$_{٣}$ ٩ = لو$_{٣}$ ٧ − لو$_{٣}$ ٣^{٢} = لو$_{٣}$ ٧ − ٢ لو$_{٣}$ ٣ = (لو$_{٣}$ ٧) − ٢

= ١,٧٧١ − ٢ = −٠,٢٢٩

(التحقق باستخدام الآلة الحاسبة ... )

مثال ٤

أوجد فى أبسط صورة قيمة كل مما يأتى :

[١] $\text{لو}_{٢}\sqrt[٧]{٣٢}$

[٢] $\frac{١}{\text{لو}_{س}\text{ س ص ع}} + \frac{١}{\text{لو}_{ص}\text{ س ص ع}} + \frac{١}{\text{لو}_{ع}\text{ س ص ع}}$

الحل

[١] $\text{لو}_{٢}\sqrt[٧]{٣٢} = \text{لو}_{٢}(٢^{٥})^{\frac{١}{٧}} = \text{لو}_{٢}\, ٢^{\frac{٥}{٧}} = \frac{٥}{٧}\,\text{لو}_{٢}\, ٢ = \frac{٥}{٧}$

[٢] $\frac{١}{\text{لو}_{س}\text{ س ص ع}} + \frac{١}{\text{لو}_{ص}\text{ س ص ع}} + \frac{١}{\text{لو}_{ع}\text{ س ص ع}}$

$= \text{لو}_{\text{س ص ع}}\text{ س} + \text{لو}_{\text{س ص ع}}\text{ ص} + \text{لو}_{\text{س ص ع}}\text{ ع}$

$= \text{لو}_{\text{س ص ع}}\text{ س ص ع} = ١$

مثال ٥

باستخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة س لأقرب رقمين عشريين فى كل مما يأتى :

[١] $٥^{س} = ١٧$

[٢] $٢^{س - ١} = ٧$

[٣] $٥^{س + ١} = ٢^{٤س - ٣}$

[٤] $٥^{س - ٢} = ٣ \times ٤^{س + ١}$

[٥] $٣^{٢س} - ١٤ \times ٣^{س} + ٤٥ = ٠$

الحل

[١] $\because ٥^{س} = ١٧$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين

$\therefore$ لو $٥^{س}$ = لو ١٧

$\therefore$ س لو ٥ = لو ١٧

$\therefore$ س = $\frac{\text{لو } ١٧}{\text{لو } ٥}$ وباستخدام حاسبة الجيب

$\therefore$ س $\simeq ١٫٧٦$

[٢] $\because ٢^{س - ١} = ٧$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين

$\therefore$ لو $٢^{س - ١}$ = لو ٧

$\therefore$ (س − ١) لو ٢ = لو ٧

$\therefore$ س لو ٢ − لو ٢ = لو ٧

$\therefore$ س = $\frac{\text{لو } ٧ + \text{لو } ٢}{\text{لو } ٢} \simeq ٣٫٨١$

[٣] $\because ٥^{س + ١} = ٢^{٤س - ٣}$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين

$\therefore$ لو $٥^{س + ١}$ = لو $٢^{٤س - ٣}$

$\therefore$ (س + ١) لو ٥ = (٤ س − ٣) لو ٢

$\therefore$ س لو ٥ + لو ٥ = ٤ س لو ٢ − ٣ لو ٢

$\therefore$ ٤ س لو ٢ − س لو ٥ = ٣ لو ٢ + لو ٥

$\therefore$ س (٤ لو ٢ − لو ٥) = ٣ لو ٢ + لو ٥

$\therefore$ س = $\frac{٣ \text{ لو } ٢ + \text{لو } ٥}{٤ \text{ لو } ٢ - \text{لو } ٥} \simeq ٣٫١٧$

٤ ∵ $٥^{س-٢} = ٣ \times ٤^{س+١}$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ (س − ٢) لو ٥ = لو ٣ + (س + ١) لو ٤

∴ س لو ٥ − ٢ لو ٥ = لو ٣ + س لو ٤ + لو ٤

∴ س لو ٥ − س لو ٤ = لو ٣ + لو ٤ + ٢ لو ٥

∴ س (لو ٥ − لو ٤) = لو ٣ + لو ٤ + ٢ لو ٥

∴ $س = \frac{لو ٣ + لو ٤ + ٢ لو ٥}{لو ٥ - لو ٤} \simeq ٢٥,٥٦$

حل آخر

∵ $٥^{س-٢} = ٣ \times ٤^{س+١}$

∴ $\frac{٥^{س}}{٥^{٢}} = ٣ \times ٤^{س} \times ٤$

∴ $\frac{٥^{س}}{٤^{س}} = ٣ \times ٤ \times ٥^{٢}$

∴ $\left(\frac{٥}{٤}\right)^{س} = ٣٠٠$

∴ $س = \frac{لو ٣٠٠}{لو \frac{٥}{٤}} \simeq ٢٥,٥٦$

٥ ∵ $٣^{٢س} - ١٤ \times ٣^{س} + ٤٥ = ٠$ وبالتحليل ∴ $(٣^{س} - ٩)(٣^{س} - ٥) = ٠$

∴ إما $٣^{س} - ٩ = ٠$ أو $٣^{س} - ٥ = ٠$

∴ $٣^{س} = ٩$

∴ $٣^{س} = ٣^{٢}$

∴ س = ٢

∴ $٣^{س} = ٥$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ س لو ٣ = لو ٥

∴ $س = \frac{لو ٥}{لو ٣} \simeq ١,٤٦$

ملاحظة هامة عند حل المعادلة اللوغاريتمية

إذا كانت س ∈ ح* ، م عددًا زوجيًا لا يساوى الصفر ، ا ∈ ح$^{+}$ − {١}

فإن : $لو_{ا} س^{م} = م \, لو_{ا} |س|$ **فمثلًا** : $لو_{ا} س^{٤} = ٤ \, لو_{ا} |س|$

مثال ٦

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

١ ٢ لو س − لو (س + ٢) = ٠

٢ $لو س^{٢}$ = لو ٤ + لو ٩

٣ $لو_{٢} س + لو_{٢} (س - ٢) = ٣$

٤ لو س + لو (س + ٢) = لو (س + ٦)

٥ $لو \sqrt[٣]{٢س - ١} + لو \sqrt[٣]{س - ٢} = لو ٣٠ - ١$

٦ $\frac{لو ٤٩ - (لو ٧)^{٢}}{لو ٠,٠٠٧} = لو س$

الحل

١ ∵ ٢ لو س − لو (س + ٢) = ٠

∴ $لو س^{٢}$ = لو (س + ٢)

∴ $س^{٢} = س + ٢$ ∴ $س^{٢} - س - ٢ = ٠$

∴ (س − ٢) (س + ١) = ٠

∴ إما س = ٢ (تحقق) أو س = −١ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {٢}

تذكر أن

١ الدالة اللوغاريتمية أحادية أى أنه إذا كان $لو_{م} س = لو_{م} ص$ فإن س = ص

٢ نعوض بالقيم التى نحصل عليها فى المعادلة الأصلية ويكون الحل هو القيمة التى تحقق هذه المعادلة حيث إنه لا معنى للحديث عن لوغاريتم عدد غير موجب.

مثال ٤

أوجد فى أبسط صورة قيمة كل مما يأتى :

١ $لو_{٢} \sqrt[٧]{٣٢}$

٢ $\frac{١}{لو_{س} س ص ع} + \frac{١}{لو_{ص} س ص ع} + \frac{١}{لو_{ع} س ص ع}$

الحل

١ $لو_{٢} \sqrt[٧]{٣٢} = لو_{٢} (٢^{٥})^{\frac{١}{٧}} = لو_{٢} ٢^{\frac{٥}{٧}} = \frac{٥}{٧} لو_{٢} ٢ = \frac{٥}{٧}$

٢ $\frac{١}{لو_{س} س ص ع} + \frac{١}{لو_{ص} س ص ع} + \frac{١}{لو_{ع} س ص ع}$

$= لو_{س ص ع} س + لو_{س ص ع} ص + لو_{س ص ع} ع$

$= لو_{س ص ع} س ص ع = ١$

مثال ٥

باستخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة س لأقرب رقمين عشريين فى كل مما يأتى :

١ $٥^{س} = ١٧$

٢ $٢^{س - ١} = ٧$

٣ $٥^{س + ١} = ٢^{٤س - ٣}$

٤ $٥^{س - ٢} = ٣ \times ٤^{س + ١}$

٥ $٣^{٢س} - ١٤ \times ٣^{س} + ٤٥ = ٠$

الحل

١ ∵ $٥^{س} = ١٧$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ $لو ٥^{س} = لو ١٧$

∴ س لو ٥ = لو ١٧

∴ $س = \frac{لو ١٧}{لو ٥}$ وباستخدام حاسبة الجيب

∴ س ≃ ١,٧٦

٢ ∵ $٢^{س - ١} = ٧$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ $لو ٢^{س - ١} = لو ٧$

∴ (س - ١) لو ٢ = لو ٧

∴ س لو ٢ - لو ٢ = لو ٧

∴ $س = \frac{لو ٧ + لو ٢}{لو ٢} \simeq ٣,٨١$

٣ ∵ $٥^{س + ١} = ٢^{٤س - ٣}$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ $لو ٥^{س + ١} = لو ٢^{٤س - ٣}$

∴ (س + ١) لو ٥ = (٤ س - ٣) لو ٢

∴ س لو ٥ + لو ٥ = ٤ س لو ٢ - ٣ لو ٢

∴ ٤ س لو ٢ - س لو ٥ = ٣ لو ٢ + لو ٥

∴ س (٤ لو ٢ - لو ٥) = ٣ لو ٢ + لو ٥

∴ $س = \frac{٣ لو ٢ + لو ٥}{٤ لو ٢ - لو ٥} \simeq ٣,١٧$

٤ ∵ $٥^{س - ٢} = ٣ \times ٤^{س + ١}$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ (س − ٢) لو ٥ = لو ٣ + (س + ١) لو ٤

∴ س لو ٥ − ٢ لو ٥ = لو ٣ + س لو ٤ + لو ٤

∴ س لو ٥ − س لو ٤ = لو ٣ + لو ٤ + ٢ لو ٥

∴ س (لو ٥ − لو ٤) = لو ٣ + لو ٤ + ٢ لو ٥

∴ $س = \frac{لو ٣ + لو ٤ + ٢ لو ٥}{لو ٥ - لو ٤} \simeq ٢٥,٥٦$

حل آخر

∵ $٥^{س - ٢} = ٣ \times ٤^{س + ١}$

∴ $\frac{٥^{س}}{٥^{٢}} = ٣ \times ٤^{س} \times ٤$

∴ $\frac{٥^{س}}{٤^{س}} = ٣ \times ٤ \times ٥^{٢}$

∴ $\left(\frac{٥}{٤}\right)^{س} = ٣٠٠$

∴ $س = \frac{لو ٣٠٠}{لو \frac{٥}{٤}} \simeq ٢٥,٥٦$

٥ ∵ $٣^{٢س} - ١٤ \times ٣^{س} + ٤٥ = ٠$ وبالتحليل ∴ $(٣^{س} - ٩)(٣^{س} - ٥) = ٠$

∴ إما $٣^{س} - ٩ = ٠$ أ، $٣^{س} - ٥ = ٠$

∴ $٣^{س} = ٩$

∴ $٣^{س} = ٣^{٢}$

∴ س = ٢

∴ $٣^{س} = ٥$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ س لو ٣ = لو ٥

∴ $س = \frac{لو ٥}{لو ٣} \simeq ١,٤٦$

ملاحظة هامة عند حل المعادلة اللوغاريتمية

إذا كانت س ∈ ح*، م عددًا زوجيًا لا يساوي الصفر، أ ∈ ح⁺ − {١}

فإن : $لو_{أ} س^{م} = م لو_{أ} |س|$ **فمثلًا** : $لو_{٢} س^{٤} = ٤ لو_{٢} |س|$

مثال ٦

أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

١ ٢ لو س − لو (س + ٢) = ٠

٢ $لو س^{٢} = لو ٤ + لو ٩$

٣ $لو_{٢} س + لو_{٢} (س - ٢) = ٣$

٤ لو س + لو (س + ٢) = لو (س + ٦)

٥ $لو \sqrt[٣]{٢س - ١} + لو \sqrt[٣]{س - ٢} = لو ٣٠ - ١$

٦ $\frac{لو ٤٩ - (لو ٧)^{٢}}{لو ٧ - ٠,٠٧} = لو س$

الحل

١ ∵ ٢ لو س − لو (س + ٢) = ٠

∴ $لو س^{٢} = لو (س + ٢)$

∴ $س^{٢} = س + ٢$ ∴ $س^{٢} - س - ٢ = ٠$

∴ (س − ٢) (س + ١) = ٠

∴ إما س = ٢ (تحقق) أ، س = −١ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {٢}

تذكر أن

١ الدالة اللوغاريتمية أحادية أي أنه إذا كان $لو_{أ} س = لو_{أ} ص$ فإن س = ص

٢ نعوض بالقيم التي نحصل عليها في المعادلة الأصلية ويكون الحل هو القيمة التي تحقق هذه المعادلة حيث إنه لا معنى للحديث عن لوغاريتم عدد غير موجب.

٢ ∵ لو س^{٢} = لو ٤ + لو ٩

∴ لو س^{٢} = لو ٣٦

∴ س = ± ٦ (تحقق)

حل آخر : ∵ لو س^{٢} = لو ٤ + لو ٩

∴ لو س^{٢} = لو ٣٦ = لو ٦^{٢}

∴ |س| = ٦

∴ مجموعة الحل = {٦ ، −٦}

∴ لو س^{٢} = لو (٤ × ٩)

∴ س^{٢} = ٣٦

∴ مجموعة الحل = {٦ ، −٦}

∴ لو س^{٢} = لو (٤ × ٩)

∴ ٢ لو |س| = ٢ لو ٦

∴ س = ± ٦ (تحقق)

٣ ∵ لو$_{٢}$ س + لو$_{٢}$ (س − ٢) = ٣

∴ س^{٢} − ٢ س = ٢^{٣} = ٨

∴ (س − ٤) (س + ٢) = ٠

∴ إما س = ٤ (تحقق) أ، س = −٢ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {٤}

∴ لو$_{٢}$ س (س − ٢) = ٣

∴ س^{٢} − ٢ س − ٨ = ٠

٤ ∵ لو س + لو (س + ٢) = لو (س + ٦)

∴ س (س + ٢) = س + ٦

∴ س^{٢} + س − ٦ = ٠

∴ إما س = −٣ (مرفوض) أ، س = ٢ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {٢}

∴ لو س (س + ٢) = لو (س + ٦)

∴ س^{٢} + ٢ س − س − ٦ = ٠

∴ (س + ٣) (س − ٢) = ٠

٥ ∵ لو $\sqrt[٣]{٢ س − ١}$ + لو $\sqrt[٣]{س − ٢}$ = لو ٣٠ − ١

∴ لو $\sqrt[٣]{(٢ س − ١) (س − ٢)}$ = لو ٣٠ − لو ١٠

تذكر أن : لو ١٠ = ١

∴ لو $\sqrt[٣]{٢ س^{٢} − ٥ س + ٢}$ = لو ٣

∴ $\sqrt[٣]{٢ س^{٢} − ٥ س + ٢}$ = ٣ وبرفع الطرفين للقوة ٣

∴ ٢ س^{٢} − ٥ س + ٢ = ٢٧ ∴ ٢ س^{٢} − ٥ س − ٢٥ = ٠

∴ (٢ س + ٥) (س − ٥) = ٠

∴ إما س = $\frac{−٥}{٢}$ (مرفوض) أ، س = ٥ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {٥}

٦ ∵ $\frac{\text{لو } ٤٩ - (\text{لو } ٧)^{٢}}{\text{لو } ٠,٠٠٧}$ = لو س ∴ $\frac{\text{لو } ٧^{٢} - (\text{لو } ٧)^{٢}}{\text{لو } \frac{٧}{١٠٠}}$ = لو س

∴ $\frac{٢ \text{ لو } ٧ - (\text{لو } ٧)^{٢}}{\text{لو } ٧ - \text{لو } ١٠٠}$ = لو س ∴ $\frac{\text{لو } ٧ \, (٢ - \text{لو } ٧)}{\text{لو } ٧ - ٢}$ = لو س

تذكر أن لو ١٠٠ = لو $١٠^{٢}$ = ٢

∴ − لو ٧ = لو س ∴ لو $٧^{-١}$ = لو س

∴ س = $٧^{-١}$ = $\frac{١}{٧}$ (تحقق) ∴ مجموعة الحل = $\{\frac{١}{٧}\}$

مثال ٧

أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

١ لو$_{٣}$ (س^{٢} − ٣ س + ٢) − لو$_{٣}$ (س − ٢) = لو$_{٧}$ ٤٩

٢ س$^{\text{لو س}}$ = ١٠

٣ لو$_{٢}$ س = لو$_{٤}$ ٢٥

٤ لو$_{٣}$ س × لو$_{٩}$ س = ٢

٥ لو$_{٤}$ س + لو$_{\text{س}}$ ٤ = ٢

الحل

١ ∵ لو$_{٣}$ (س^{٢} − ٣ س + ٢) − لو$_{٣}$ (س − ٢) = لو$_{٧}$ ٤٩

∴ لو$_{٣}$ $\frac{\text{س}^{٢} - ٣ \text{ س} + ٢}{\text{س} - ٢}$ = لو$_{٧}$ ٧^{٢} ∴ لو$_{٣}$ $\frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ١)}{\text{س} - ٢}$ = ٢ لو$_{٧}$ ٧

∴ لو$_{٣}$ (س − ١) = ٢ ∴ س − ١ = ٣^{٢}

∴ س = ١ + ٩ = ١٠ ∴ مجموعة الحل = {١٠}

٢ ∵ س$^{\text{لو س}}$ = ١٠ وبأخذ لوغاريتم الطرفين ∴ لو س$^{\text{لو س}}$ = لو ١٠

∴ لو س × لو س = ١ ∴ (لو س)^{٢} = ١

∴ لو س = ± ١ وعندما لو س = ١ ∴ س = ١٠^{١} = ١٠

وعندما لو س = −١ ∴ س = ١٠$^{-١}$ = ٠,١

∴ مجموعة الحل = {١٠ ، ٠,١}

٣ ∵ لو$_{٢}$ س = لو$_{٤}$ ٢٥ ∴ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو } ٢} = \frac{\text{لو } ٢٥}{\text{لو } ٤}$

∴ لو س = $\frac{\text{لو } ٥^{٢} \times \text{لو } ٢}{\text{لو } ٢^{٢}} = \frac{٢ \text{ لو } ٥ \times \text{لو } ٢}{٢ \text{ لو } ٢}$ = لو ٥

∴ س = ٥ (تحقق) ∴ مجموعة الحل = {٥}

٤ ∵ لو$_{٣}$ س × لو$_{٩}$ س = ٢ ∴ لو$_{٣}$ س × $\frac{\text{لو}_{٣} \text{ س}}{\text{لو}_{٣} ٩}$ = ٢

∴ (لو$_{٣}$ س)^{٢} = ٢ لو$_{٣}$ ٩ = ٢ لو$_{٣}$ ٣^{٢} = ٤ لو$_{٣}$ ٣ = ٤ ∴ لو$_{٣}$ س = ± ٢

∴ س = ٣^{٢} = ٩ (تحقق) أ، س = ٣$^{-٢}$ = $\frac{١}{٩}$ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = $\{٩ ، \frac{١}{٩}\}$

٥ ∵ لو$_٤$ س + لو$_س$ ٤ = ٢ ∴ لو$_٤$ س + $\frac{١}{لو_٤ س}$ = ٢ (بالضرب × لو$_٤$ س)

∴ (لو$_٤$ س)^٢ + ١ = ٢ لو$_٤$ س ∴ (لو$_٤$ س)^٢ − ٢ لو$_٤$ س + ١ = ٠

∴ (لو$_٤$ س − ١)^٢ = ٠ ∴ لو$_٤$ س = ١

∴ س = ٤ (تحقق) ∴ مجموعة الحل = {٤}

مثال ٨

أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

١ لو ٤٩ × لو $\sqrt[٣]{٨}$ = لو ٣٤٣ × لو س^٢ | ٢ لو س^٢ = (لو س)^٢

٣ (لو س + ١) (لو $\frac{س}{١٠}$) = ٣ | ٤ لو س − لو$_س$ ١٠٠ = ١

الحل

١ ∵ لو ٤٩ × لو $\sqrt[٣]{٨}$ = لو ٣٤٣ × لو س^٢

∴ لو س^٢ = $\frac{لو ٤٩ \times لو \sqrt[٣]{٨}}{لو ٣٤٣}$ = $\frac{لو ٧^٢ \times لو \sqrt[٣]{٢^٣}}{لو ٧^٣}$ = $\frac{٢ لو ٧ \times لو ٢^{\frac{٣}{٣}}}{٣ لو ٧}$

∴ لو س^٢ = $\frac{٢}{٣}$ × $\frac{٣}{٢}$ لو ٢ ∴ لو س^٢ = لو ٢

∴ س^٢ = ٢ ∴ س = $\pm\sqrt{٢}$ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {$\pm\sqrt{٢}$}

٢ ∵ لو س^٢ = (لو س)^٢ ∴ ٢ لو س = (لو س)^٢ حيث س > ٠

∴ (لو س)^٢ − ٢ لو س = ٠ ∴ لو س (لو س − ٢) = ٠

∴ إما لو س = ٠ ومنها س = (١٠)^{صفر} = ١ (تحقق)

أ، لو س = ٢ ومنها س = ١٠^٢ = ١٠٠ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {١ ، ١٠٠}

٣ ∵ (لو س + ١) (لو $\frac{س}{١٠}$) = ٣ ∴ (لو س + ١) (لو س − لو ١٠) = ٣

∴ (لو س + ١) (لو س − ١) = ٣ ∴ (لو س)^٢ − ١ = ٣

∴ (لو س)^٢ = ٤ ∴ لو س = ± ٢

∴ إما لو س = ٢ ومنها س = ١٠^٢ = ١٠٠ (تحقق)

أ، لو س = −٢ ومنها س = ١٠$^{-٢}$ = ٠,٠١ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {١٠٠ ، ٠,٠١}

٤ ∵ لو س − لو$_{س}$ ١٠٠ = ١ ∴ لو س − لو$_{س}$ ١٠^{٢} = ١

∴ لو س − ٢ لو$_{س}$ ١٠ = ١ ∴ لو س − $\frac{٢}{\text{لو س}}$ = ١ (بالضرب × لو س)

∴ (لو س)^{٢} − ٢ = لو س ∴ (لو س)^{٢} − لو س − ٢ = ٠

∴ (لو س + ١) (لو س − ٢) = ٠

∴ إما لو س = −١ ومنها س = ١٠$^{-١}$ = ٠,١ (تحقق)

أ، لو س = ٢ ومنها س = ١٠^{٢} = ١٠٠ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {١٠٠ ، ٠,١}

مثال ٩

إذا كان :

١ س ص = ١٦ **فاثبت أن :** ٣ لو$_{٢}$ س + ٤ لو$_{٢}$ ص − لو$_{٢}$ س ص^{٢} = ٨

٢ س^{٢} + ص^{٢} = ٦ س ص **فاثبت أن :** ٢ لو (س + ص) = لو س + لو ص + ٣ لو ٢

الحل

١ الطرف الأيمن = لو$_{٢}$ س^{٣} + لو$_{٢}$ ص^{٤} − لو$_{٢}$ س ص^{٢}

= لو$_{٢}$ $\frac{\text{س}^{٣} \times \text{ص}^{٤}}{\text{س ص}^{٢}}$ = لو$_{٢}$ س^{٢} ص^{٢} = لو$_{٢}$ (س ص)^{٢}

= ٢ لو$_{٢}$ س ص = ٢ لو$_{٢}$ ١٦ = ٢ لو$_{٢}$ ٢^{٤} = ٢ × ٤ لو$_{٢}$ ٢

= ٨ = الطرف الأيسر.

٢ ∵ س^{٢} + ص^{٢} = ٦ س ص

∴ س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س ص = ٦ س ص + ٢ س ص

∴ س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢} = ٨ س ص

∴ (س + ص)^{٢} = ٨ س ص وبأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ لو (س + ص)^{٢} = لو ٨ س ص

∴ ٢ لو (س + ص) = لو ٨ + لو س + لو ص = لو ٢^{٣} + لو س + لو ص

= لو س + لو ص + ٣ لو ٢

مثال ١٠

إذا كانت درجة قوة الزلزال (د) على مقياس ريختر تحسب بالعلاقة د = لو $\frac{ش}{ش_.}$

حيث ش هى شدة الزلزال ، ش. هى الشدة الابتدائية وتعرف بالمقياس الصفرى لشدة الزلزال وهى أقل شدة لحركة الأرض بحيث لا يسجلها المقياس.

١ أوجد على مقياس ريختر درجة الزلزال الذى شدته تعادل ١,٦ × ١٠^٨ مرة قدر الشدة الابتدائية.

٢ إذا كانت درجة الزلزال = ٧ درجات بمقياس ريختر أوجد كم مرة تعادل شدة هذا الزلزال من الشدة الابتدائية.

الحل

١ ∵ د = لو $\frac{ش}{ش_.}$ ، ش = ١,٦ × ١٠^٨ ش.

∴ د = لو $\frac{١,٦ × ١٠^٨ ش_.}{ش_.}$ = لو (١,٦ × ١٠^٨) ≃ ٨,٢

أى أن : درجة الزلزال على مقياس ريختر = ٨,٢

٢ ∵ درجة الزلزال (د) = ٧ ∴ ٧ = لو $\frac{ش}{ش_.}$

∴ $\frac{ش}{ش_.}$ = ١٠^٧ ∴ ش = ١٠^٧ × ش.

أى أن : شدة الزلزال تعادل ١٠ ٠٠٠ ٠٠٠ مرة قدر الشدة الابتدائية.

معلومة إثرائية

لأى عدد س ∈ ص+ إذا كان : ن ≤ لو س < ن + ١

فإن عدد أرقام العدد س = ن + ١ حيث ن ∈ ط

فمثلاً : * لإيجاد عدد أرقام العدد ٥^٣

∵ لو ٥^٣ ≃ ٢,٠٩٧ أى أن : ٢ ≤ لو ٥^٣ < ٣

∴ عدد أرقام العدد ٥^٣ = ٣ أرقام

* لإيجاد عدد أرقام العدد ٣^١٧

∵ لو ٣^١٧ ≃ ٨,١١١ أى أن : ٨ ≤ لو ٣^١٧ < ٩

∴ عدد أرقام العدد ٣^١٧ = ٩ أرقام

اختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① لو$_{٢}$ ٥ × لو$_{٥}$ ٢ = ...

(أ) ١ (ب) ١٠ (جـ) لو$_{٢}$ ١٠ (د) لو$_{٥}$ ١٠

② ١ + لو ٢ = ...

(أ) لو ٥ (ب) لو ٢ (جـ) لو ٢٠ (د) − لو ٥

③ قيمة المقدار : ٢ لو ٢٥ + لو $\frac{٨}{١٥}$ + ٢ لو ٣ − لو ٣٠ = ...

(أ) ٦ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) −١

④ أى العبارات الآتية صحيحة ؟

(أ) لو ٢ − لو $\sqrt{٢}$ = لو $\sqrt{٢}$ (ب) لو$_{٢}$ ١ = صفر

(جـ) لو $\frac{٧}{٥}$ = $\frac{\text{لو ٧}}{\text{لو ٥}}$ (د) لو ٧ ÷ لو ٢ = لو ٥

⑤ إذا كان : لو س − لو ٢ = لو ٤ فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٦

⑥ إذا كان : لو س + لو ٥ = ٢ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٨ (جـ) ١٧ (د) ٢٠

⑦ ٢ لو$_{٥}$ ٣ + ٣ لو$_{٥}$ ٢ = ...

(أ) لو$_{٥}$ ٦ (ب) ٦ لو$_{٥}$ ٦ (جـ) لو$_{٥}$ ٧٢ (د) لو$_{٥}$ ٣٦

⑧ لو$_{ب}$ أ × لو$_{جـ}$ ب × لو$_{ء}$ جـ × لو$_{أ}$ ء = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) أ ب جـ ء (د) أ ء

⑨ $\sqrt{٣^{\text{لو}_{٣} ٤} \times ٣^{\text{لو}_{٣} ٢٥} + ٧^{\text{لو}_{٧} ١٦}}$ = ...

(أ) ٩ (ب) ٢٥ (جـ) ٥ (د) ١٦

⑩ $\frac{١}{\text{لو}_{٢} ٣٠} + \frac{١}{\text{لو}_{٣} ٣٠} + \frac{١}{\text{لو}_{٥} ٣٠}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) ٣٠

(١١) ٢ لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص − لو$_{أ}$ (س ص) = ...

(أ) لو س　　(ب) لو$_{أ}$ س　　(جـ) لو$_{أ}$ س ص　　(د) لو$_{أ}$ س^{٢}

(١٢) أبسط صورة للمقدار : لو$_{ب}$ أ^{٢} × لو$_{حـ}$ ب^{٢} × لو$_{أ}$ حـ = ...

(أ) ٢　　(ب) ٣　　(جـ) ٦　　(د) ١

(١٣) لو $\left(\frac{أ^{٢}}{ب\,حـ}\right)$ = ... حيث أ ، ب ، حـ ∈ ح$^{+}$

(أ) ٢ لو أ + لو ب + لو حـ　　(ب) ٢ لو أ − لو ب + لو حـ

(جـ) ٢ لو أ − لو ب − لو حـ　　(د) ٢ (لو أ − لو ب − لو حـ)

(١٤) إذا كان : س − ٢ = لو$_{٢}$ ٣　　فإن : س = ...

(أ) لو$_{٢}$ ٦　　(ب) لو$_{٢}$ ٩　　(جـ) لو$_{٢}$ ١٢　　(د) لو$_{٢}$ ١٨

(١٥) لو$_{أب}$ $\frac{١}{أ}$ + لو$_{أب}$ $\frac{١}{ب}$ = ...

(أ) $\frac{أ}{ب}$　　(ب) $\frac{ب}{أ}$　　(جـ) −١　　(د) ١

(١٦) المقدار $\frac{٣\ لو\ ٢}{لو\ ٤ + لو\ ٣}$ يكافئ المقدار ....

(أ) لو$_{٣}$ ٢　　(ب) لو$_{٦}$ ٢　　(جـ) لو$_{١٢}$ ٨　　(د) لو$_{٧}$ ٨

(١٧) إذا كان : ٣^{س} = ٥　　فإن : س = ...

(أ) ٣　　(ب) لو$_{٣}$ ٥　　(جـ) لو$_{٥}$ ٣　　(د) $\frac{٥}{٣}$

(١٨) مجموعة حل المعادلة : لو$_{٢}$ (٢$^{س - ٤}$) = ٥ − س هى ....

(أ) {٤}　　(ب) {٥ ، ٤}　　(جـ) {٥}　　(د) {٤ ، ٥}

(١٩) مجموعة حل المعادلة : لو$_{\sqrt{٢}}$ س + لو$_{\sqrt{٢}}$ (س + ١) = ٢ هى ....

(أ) {١ ، ٢}　　(ب) {−٢}　　(جـ) {١ ، −٢}　　(د) {١}

(٢٠) مجموعة حل المعادلة : ٢ لو ٢ − لو س = لو (س + ٣) − لو ٧ هى ....

(أ) {٧}　　(ب) {٤}　　(جـ) {٧ ، ٤}　　(د) ∅

(٢١) إذا كان : لو$_{ب}$ س + لو$_{ب}$ ٣ = لو$_{ب}$ ٢٧ − ١ فإن قيمة س = ... بدلالة ب

(أ) ٩ ب　　(ب) $\frac{١}{٩}$ ب　　(جـ) $\frac{٩}{ب}$　　(د) $\frac{١}{٩\,ب}$

(٢٢) إذا كان : لو$_{٢}$ س = لو$_{٤}$ ٩　　فإن : س = ...

(أ) ٣　　(ب) ٤　　(جـ) ٩　　(د) ١٢

(٢٣) مجموعة حل المعادلة : لو$_{٢}$ س + لو$_{٤}$ س = ٣ هي ....

(أ) {٢} (ب) {٤} (جـ) {٢ ، ٤} (د) {٠}

(٢٤) إذا كان : لو$_{٢}$ س + لو$_{٢}$ س^{٢} = ٦ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٢١٦

(٢٥) مجموعة حل المعادلة : لو س^{٢} − (لو س)^{٢} = ٠ هي ....

(أ) {١} (ب) {١ ، ١٠} (جـ) {١ ، ١٠٠} (د) {١٠٠}

(٢٦) مجموعة حل المعادلة : (لو$_{٣}$ س)^{٢} − لو$_{٣}$ س^{٢} + ٢ = ٠ هي ....

(أ) {٣} (ب) {٣ ، ٩} (جـ) {٩} (د) {١ ، ٢}

(٢٧) مجموعة حل المعادلة : لو$_{٢}$ س − ٢ لو$_{س}$ ٢ = ١ في ح هي ....

(أ) {٨ ، ٢} (ب) {٨ ، $\frac{١}{٢}$} (جـ) {٩ ، $\frac{١}{٢}$} (د) {٨}

(٢٨) إذا كان : س$^{لو_{س} س^{٢}}$ = لو$_{٢}$ ١٦ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ± ٢ (د) ٤

(٢٩) أي العبارات الآتية صحيحة ؟

(أ) لو ٣ + لو ٢ = لو ٦ (ب) ١ − لو ٥ = ٢

(جـ) لو ٢ × لو ٢ = لو ٤ (د) لو (١ + ٢ + ٣) = لو ١ + لو ٢ + لو ٣

(٣٠) إذا كان : س = $\sqrt{ص ع}$ حيث س ، ص ، ع أعدادًا موجبة فإن : لو ص = ...

(أ) $\frac{لو س^{٢}}{لو ع}$ (ب) $\frac{٢ لو س}{لو ع}$ (جـ) ٢ لو س − لو ع (د) ٢ (لو س − لو ع)

(٣١) إذا كان : لو ٢٣ = أ فإن : لو ٢٣٠٠ = ...

(أ) أ + ٢ (ب) أ − ٢ (جـ) ١٠٠ أ (د) أ^{٢}

(٣٢) إذا كان : لو$_{٢}$ ٥ = أ فإن : لو$_{١٠}$ ٥ = ...

(أ) أ^{٢} (ب) ٣ أ (جـ) $\frac{١}{أ + ٢}$ (د) $\frac{أ}{أ + ١}$

(٣٣) إذا كان : لو ٣ = س ، لو ٤ = ص فإن : لو ١٢ = ...

(أ) س + ص (ب) س ص (جـ) س − ص (د) لو س + لو ص

(٣٤) أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في أ فيه : أ ب = (لو$_{٩}$ ٣) سم ، أ حـ = (لو$_{٢}$ ٦٤) سم

فإن مساحة Δ أ ب حـ = ... سم^{٢}

(أ) ١,٥ (ب) ٣ (جـ) لو ١٦ (د) لو$_{٢}$ ١٦

(٣٥) إذا كان : $\frac{لو س}{لو ٥} = \frac{لو ٣٦}{لو ٦} = \frac{لو ٦٤}{لو ص}$ فإن : س + ص = ...

(أ) ٢٥ (ب) ٨ (جـ) ١٧ (د) ٣٣

(٣٦) إذا كان : ل ، م هما جذرا المعادلة : ٣ س^{٢} − ١٦ س + ١٢ = ٠

فإن قيمة : لو$_{٢}$ ل + لو$_{٢}$ م = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ١٢ (د) ١٦

(٣٧) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : س^{٢} + س لو$_{٣}$ أ = ٩ وكان : $\frac{\text{ل + م}}{\text{ل م}} = \frac{١}{٣}$

فإن : أ = ...

(أ) ١٢ (ب) ٢٤ (جـ) ٢٧ (د) ٧٢٩

(٣٨) مجموعة حل المعادلة : لو$_{ب}$ (س + ٥) = لو$_{ب}$ س + لو$_{ب}$ ٥ في ح هي ....

(أ) $\{٥\}$ (ب) $\{٤\}$ (جـ) $\{\frac{٤}{٥}\}$ (د) $\{\frac{٥}{٤}\}$

(٣٩) محيط الشكل المقابل = ... سم



(أ) ٢ لو$_{٣}$ ٣٥ (ب) لو$_{٣}$ ٧٠

(جـ) ٣ (د) ٦

(٤٠) لو (حا θ) + لو (قا θ) = ... حيث θ ∈ $]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) −١

ثانيًا الأسئلة المقالية

(١) بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة كل مما يأتي :

① لو$_{٣}$ ٨١ × لو$_{٩}$ ٣ «٢»

② لو$_{٢}$ ١٥ + لو$_{٢}$ ١٤ − لو$_{٢}$ ١٠٥ «١»

③ لو$_{٤}$ لو$_{٢}$ لو$_{٢}$ ٤ «صفر»

④ ١ + لو ٣ − لو ٢ − لو ١٥ «صفر»

⑤ ٢ لو ٢٥ + لو $(\frac{١}{٢} + \frac{١}{٥})$ + ٢ لو ٣ − لو ٣٠ «٢»

⑥ لو ٢٥ + $\frac{\text{لو ٨ × لو ١٦}}{\text{لو ٦٤}}$ «٢»

⑦ $\frac{\text{لو}_{٢}\text{ ٢٥ + لو}_{٢}\text{ ٤}}{\text{لو}_{٢}\text{ ٣٠ − لو}_{٢}\text{ ٣}}$ «٢»

⑧ $\frac{\text{(لو ٣)}^{٢}\text{ − لو ٣}^{٢}}{\text{لو ٣ − لو ١٠٠}}$ «لو ٣»

⑨ لو$_{٥}$ $\frac{\text{١ − لو}_{٢}\text{ ٢}}{\text{لو}_{٣}\text{ (}\frac{٣}{٢}\text{)}^{٥}}$ «−١»

⑩ لو$_{٣}$ (لو س^{١٨}) − لو$_{٣}$ (لو س^{٢}) «٢»

⑪ لو$_{أ ب حـ}$ أ + لو$_{أ ب حـ}$ ب + لو$_{أ ب حـ}$ حـ «١»

⑫ $\frac{١}{٢}$ لو$_{٢}$ أ + $\frac{١}{٢}$ لو$_{٢}$ ب + ٢ لو$_{٢}$ حـ − لو$_{٢}$ $\sqrt[٢]{\text{أ ب}}$ − لو$_{٢}$ ٢ حـ^{٢} «−١»

⑬ $\frac{١}{\text{لو}_{٢}\text{ ١٢}} + \frac{١}{\text{لو}_{٨}\text{ ١٢}} + \frac{١}{\text{لو}_{٩}\text{ ١٢}}$ «٢»

٢ بدون استخدام حاسبة الجيب أثبت كلًّا مما يأتى :

(١) $٢ \text{ لو}_٣ ١٥ + \text{لو}_٣ \frac{٧}{٣} - \text{لو}_٣ ١٧٥ = ٢ \text{ لو}_٣ \sqrt{٣}$

(٢) $\text{لو}_٢ \frac{٣}{١١} + \text{لو}_٢ \frac{٢٩٧}{٩٨} - \left(٢ \text{ لو}_٢ ٢ \times \text{لو}_٢ \frac{٩}{٧}\right) = -١$

(٣) $(١ - \text{لو } ٥)(٢ - \text{لو } ٢٥) = ٢ (\text{لو } ٢)^٢$

(٤) $\frac{\text{لو } ٧٢٩ - \text{لو } ٦٤}{\text{لو } ٩ - \text{لو } ٤} = ٣$

(٥) $\frac{(\text{لو } ٥)^٢ - \text{لو } ٥^٢}{\text{لو } ٥ - \text{لو } ١٠٠} = ١ - \text{لو } ٢$

(٦) $\frac{\text{لو}_٢ \text{لو}_٥ \text{لو}_٣ ٢٤٣}{\text{لو}_٢ \text{لو}_٣ \text{لو}_٢ ٥١٢} = \text{صفر}$

٣ باستخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة س لأقرب رقمين عشريين فى كل مما يأتى :

(١) $٣^{س+٢} = ٦$ «−٠,٣٧»

(٢) $٣^{٧-٢س} = ١٣,٤$ «٢,٣٢»

(٣) $٧^{س+١} = ٣^{س-٢}$ «−٤,٨٩»

(٤) $٣^{٢س-٢} = ١١^{١-س}$ «١,٢٤»

(٥) $س^{١,٦} = ٩٤,٥$ «±١٧,١٧»

(٦) $\frac{٥}{(١٠)^{٢س}} = ٧$ «−٠,٠٧»

(٧) $٧^{س+١} + ٧^{س-١} = ٣٠٠$ «١,٩٢»

(٨) $٢^{س} \times ٣ = ٢ \times ٣^{س+٢}$ «−٤,٤٢»

(٩) $٣ \times ٢^{س-١١} = ٨ \times ٥٦^{س-١}$ «−٠,٨٢»

(١٠) $٢٥^{س} - ٢٧ \times ٥^{س} + ٥٠ = ٠$ «٠,٤٣ ، ٢»

(١١) $٨^{٢-٥س} \div ٧^{٤+س} = ٢$ «−٠,١٨»

(١٢) $\text{لو}_٥ (٤^{س+١}) = س - ٢$ «٢٠,٦٤»

٤ إذا كان : $\text{لو}_٣ ٥ = ١,٤٦٥$ فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة :

(١) $\text{لو}_٣ ١٥$

(٢) $\text{لو}_٣ ١٣٥$

(٣) $\text{لو}_٣ \frac{٥}{٩}$

٥ إذا كان : لو ٢ = س ، لو ٣ = ص أوجد بدلالة س ، ص كلًّا من :

(١) لو ٦

(٢) $\text{لو}_{١٨} ١٢$

٦ ناقش صحة كل مما يأتى مع تصحيح الخطأ منها ، [حيث س ، ص $\in ح^+$ ، م ، ب $\in ح^+ - \{١\}$ فى المسائل (٣) إلى (٧)]

(١) $\text{لو}_س س^س = س$ لكل س $\in ح$

(٢) $\text{لو } س^ن = ن \text{ لو } س$ لكل س $\in ح$

(٣) $\text{لو}_م (س + ص) = \text{لو}_م س + \text{لو}_م ص$

(٤) $\text{لو}_م (س + ص) = \text{لو}_م س \times \text{لو}_م ص$

(٥) $\text{لو}_م (س ص) = \text{لو}_م س + \text{لو}_م ص$

(٦) $\text{لو}_م \left(\frac{س}{ص}\right) = \text{لو}_م س + \text{لو}_م ص^{-١}$

(٧) $\frac{\text{لو}_م س}{\text{لو}_م ص} = \frac{\text{لو}_ب س}{\text{لو}_ب ص}$

(٨) إذا كان : س < صفر فإن : $\text{لو}_م س^٤ = ٤ \text{ لو}_م س$ ، $م \in ح^+ - \{١\}$

7 أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

(١) لو$_٣$ (س + ٦) = ٢ لو$_٣$ س «{٣}»

(٢) لو$_٤$ س + لو$_٤$ (س + ٦) = ٣ «{−٣ + $\sqrt{٧٣}$}»

(٣) لو$_٢$ س + لو$_٢$ س^٢ = ٣ «{٢}»

(٤) لو$_٢$ (س − ١) + لو$_٢$ (س + ١) = لو$_٢$ ٨ «{٣}»

(٥) لو (س + ٨) − لو (س − ١) = ١ «{٢}»

(٦) لو$_٤$ س = ١ − لو$_٤$ (س − ٣) «{٤}»

(٧) لو$_٥$ س^٢ + لو$_٥$ ٢ = لو$_٥$ ١٨ «{٣ ، −٣}»

(٨) لو$_٣$ (٧ س^٢ − ٤) = ٢ لو$_٣$ س + $\frac{١}{٢}$ لو$_٣$ ٩ «{١}»

(٩) ٥ لو$_٢$ (س + ٢) − لو$_٢$ (س − ١)^٥ = لو$_٢$ ٣٢ «{٤}»

(١٠) لو (٨ − س) + ٢ لو $\sqrt{س − ٦}$ = ٠ «{٧}»

(١١) لو (س + ٢) + لو (س − ٢) = ١ − لو ٢ «{٣}»

(١٢) لو ٧ × لو ٧٢٩ = لو ٤٩ × لو س^٣ «{٣}»

(١٣) لو$_٢$ (س^٢ + ٦ س + ٩) − لو$_٢$ (س − ١) = لو$_٥$ ٦٢٥ «{٥}»

(١٤) لو س = $\frac{(\text{لو } ٣)^٢ − \text{لو } ٢٧}{\text{لو } ٠٫٠٠٣}$ «{٣}»

(١٥) (لو س)^٢ − لو س^٢ = ٣ «{٠٫١ ، ١٠٠٠}»

(١٦) (لو س)^٢ + لو س^٢ + ١ = (لو ٥)^٢ «{$\frac{١}{٥٠}$ ، $\frac{١}{٢}$}»

(١٧) ٢ لو$_س$ ٢ + لو$_س$ ١٤ − ٣ لو$_س$ ٣ = ٣ + لو$_س$ ٧ «{$\frac{٢}{٣}$}»

(١٨) لو $\sqrt[٣]{٣ س − ١}$ + لو $\sqrt[٣]{س − ٢}$ = لو ٢٠ − ١ «{٣}»

8 أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

(١) لو$_٢$ س = لو$_٤$ ٩ «{٣}»

(٢) ٣$^{\text{لو} س}$ = ٢$^{\text{لو} ٣}$ «{٢}»

(٣) س$^{\text{لو} س}$ = ١٠ «{٠٫١ ، ١٠}»

(٤) لو$_٢$ س = لو$_س$ ٢ «{٢ ، $\frac{١}{٢}$}»

(٥) س$^{\text{لو} س^٢}$ = لو ١٠^٩ «{٣}»

(٦) ٢$^{\text{لو} س}$ × ٥$^{\text{لو} س}$ = ٨٠٠٠ «{١٠٠٠}»

(٧) ٢$^{(\text{لو} س)^٢}$ × ٦٤ = ٢$^{\text{لو} س^٥}$ «{١٠٠ ، ١٠٠٠}»

(٨) لو س − $\frac{١}{\text{لو} س}$ = $\frac{٣}{٢}$ «{$\frac{١}{\sqrt{١٠}}$ ، ١٠٠}»

⑨ 📖 $\text{لو}_٢ س + \text{لو}_س ٢ = ٢$ «$\{٢\}$»

⑩ 📖 $\text{لو} س - \text{لو}_س ١٠٠ = ١$ «$\{\frac{١}{١٠} ، ١٠٠\}$»

⑪ $\text{لو} \frac{س}{٢} \times \text{لو} \frac{٢}{س} = -١$ «$\{٠,٢ ، ٢٠\}$»

⑫ 📖 $(\text{لو} س)^٢ = \text{لو} س^٩$ «$\{١ ، ١٠٠٠ ، ٠,٠٠١\}$»

⑬ 📖 $س^{\text{لو} س} = ١٠٠ س$ «$\{١٠٠ ، \frac{١}{١٠}\}$»

⑭ $(\text{لو} س + ٢) \left(\text{لو} \frac{س}{١٠٠}\right) = ٥$ «$\{١٠٠٠ ، ٠,٠٠٠١\}$»

⑮ $\text{لو}_٢ س + \text{لو}_٩ س^٢ + ٣ = ٠$ «$\left\{\frac{١}{٢\sqrt[٣]{٢}}\right\}$»

⑯ $\text{لو}_٢ س = \text{لو}_٤ (س + ٦)$ «$\{٣\}$»

⑰ 📖 $\text{لو}_٢ س + \text{لو}_٤ س = \frac{-٣}{٢}$ «$\{\frac{١}{٢}\}$»

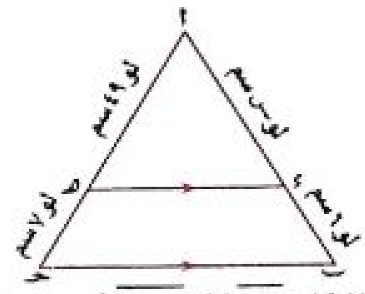
⑱ 📖 $\sqrt{\text{لو}_٢ س} = \text{لو}_٢ \sqrt{س}$ «$\{١ ، ١٦\}$»

⑲ $\sqrt{س^{\text{لو} \sqrt{س}}} = ١٠$ «$\{١٠٠ ، \frac{١}{١٠٠}\}$»

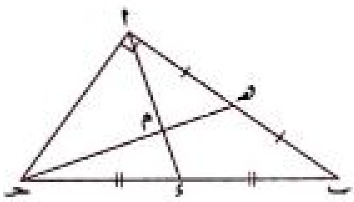
⑳ $\sqrt{\text{لو}\left(٩١ + \sqrt[٣]{\frac{٣}{٢}}\right)} = \text{لو} \sqrt[٢]{١٠}$ «$\{٨\}$»

㉑ $\text{لو}_٢ \frac{١}{س^٢ + س - ١} = س (\text{لو} ٥ - ١)$ «$\{١\}$»

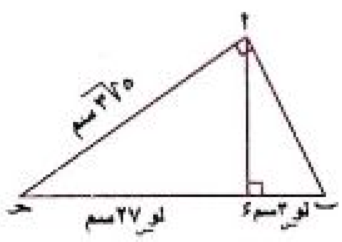
9 في كل من الأشكال الآتية أوجد ما هو مطلوب أسفل كل شكل في أبسط صورة :



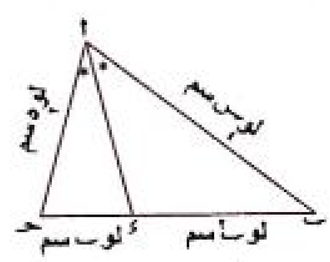
① إذا كان $\overline{ءهـ} // \overline{ب حـ}$ أوجد قيمة س



② إذا كان م ء = $\text{لو}_{٨١} ٢٤٣$ سم ، أوجد طول $\overline{ب حـ}$



③ إذا كان $\overline{أب} \perp \overline{أحـ}$ ، $\overline{أء} \perp \overline{ب حـ}$ أوجد قيمة س



④ إذا كان $\overleftrightarrow{أء}$ ينصف ∠ أ أوجد قيمة س

10 أوجد مجموعة الحل لكل زوج من المعادلات الآتية آنيًا في ح × ح :

① $\text{لو}_س ص = ١ - \text{لو} ٥$ ، $\text{لو} ص^٢ = ٣ - \text{لو} ١٢٥$ «$\{(١ ، ٢)\}$»

② $\text{لو}_٢ س + \text{لو}_٢ ص + \text{لو}_٢ ٤ = ٢ + \text{لو}_٢ ٩$ ، $س + ص = ١٠$ «$\{(١ ، ٩) ، (٩ ، ١)\}$»

③ $\text{لو} س^٢ + \text{لو} ص^٢ = ١١$ ، $\text{لو} س^٢ - \text{لو} ص^٢ = ٣$ «$\{(١٠٠٠ ، ١٠)\}$»

١١ أجب عما يأتى :

① إذا كان : س ص = ٩ $\sqrt{٣}$ فاثبت أن : ٥ لو$_{٣}$ س + ٤ لو$_{٣}$ ص − لو$_{٣}$ س^{٢} ص^{٢} = ٥

② إذا كان : $\frac{١}{٤}$ لو أ = $\frac{١}{٥}$ لو ب = لو حـ فاثبت أن : حـ^{٨} = أ ب

③ إذا كان : لو $\frac{\text{س + ص}}{٣}$ = $\frac{١}{٢}$ (لو س + لو ص) فاثبت أن : $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ + $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ = ٧

④ إذا كان : ٣$^{\text{لو}_{\text{أ}}\text{س}}$ = أ فاثبت أن : لو$_{\text{أ}}$ س معكوس ضربى للعدد لو$_{\text{أ}}$ ٣

ثم أوجد قيمة : لو$_{٩}$ س «٢»

⑤ أثبت أن : لو$_{\text{أ}^{٢}}$ ب^{٢} = لو$_{\text{أ}}$ ب ثم أثبت أن : لو$_{\text{أ}}$ ب^{٢} + لو$_{\text{أ}^{٢}}$ ب^{٤} = ٤ لو$_{\text{أ}}$ ب

⑥ إذا كان : ٣ لو س + ٤ لو ص − لو س ص^{٢} = ٢ (لو ٢ + لو ٣) فاثبت أن : س = $\frac{٦}{\text{ص}}$

⑦ إذا كان : س^{٢} + ص^{٢} = ٨ س ص

أثبت أن : ٢ لو (س + ص) = ١ + لو س + لو ص

⑧ إذا كان : لو (س + ص) = $\frac{١}{٢}$ (لو س + لو ص) + لو٢ أثبت أن : س = ص

⑨ إذا كان : لو$_{\text{س}}$ ص^{٣} = ١ ، لو$_{\text{س}^{٢}}$ ص = ١ أوجد قيمة : لو$_{\text{س}}$ ص «$\frac{٢}{٥}$»

⑩ أثبت أن : لو$_{\text{ص}}$ س = $\frac{١}{\text{لو}_{\text{س}}\text{ ص}}$

ثم أوجد مجموعة حل المعادلة : لو$_{٣}$ س + ٣ لو$_{\text{س}}$ ٣ = ٤ «{٢ ، ٢٧}»

⑪ إذا كانت : س ، ص ، ع أعدادًا صحيحة موجبة

وكان $\frac{٤}{\text{لو}_{\text{س}}\text{ ص}}$ + $\frac{٧}{\text{لو}_{\text{ع}}\text{ ص}}$ = ٣ لو$_{\text{ص}}$ ع أوجد قيمة : س ع «١٠»

⑫ إذا كان : ص = أ$^{\text{لو}_{\text{أ}}\text{س}}$ فاثبت أن : ص = س ومن ذلك أوجد قيمة : ٣$^{\frac{١}{٢}\text{لو}_{٣}\text{ ٤٩}}$ «٧»

⑬ أثبت أن : لو$_{\text{أ}^{\text{ص}}}$ أ$^{\text{س}}$ = $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ ومن ذلك أوجد قيمة : لو$_{\sqrt{٥}}$ ١٢٥ × لو$_{٨}$ $\sqrt{٢}$ «$\frac{٣}{٢}$»

⑭ أثبت أن : لو$_{\text{ب}}$ أ = $\frac{\text{لو أ}}{\text{لو ب}}$

ومن ثم استخدم العلاقة فى إثبات أن : (لو$_{\text{أ}}$ أ ب)$^{-١}$ + (لو$_{\text{ب}}$ أ ب)$^{-١}$ = ١

⑮ إذا كان : لو$_{\text{حـ}}$ أ + لو$_{\text{حـ}}$ ب − ٢ لو$_{\text{حـ}}$ $\frac{\text{أ + ب}}{٢}$ = ٠ فاثبت أن : أ − ب = ٠

⑯ إذا كان : (س$^{\text{لو س}}$)^{٢} × س^{٣} = ١٠^{٥} فأوجد قيمة : س «١٠ ، $\frac{١}{١٠\sqrt{١٠٠}}$»

⑰ بوضع أ$^{\text{س}}$ = ص فى المعادلة : أ$^{\text{س}}$ − أ$^{-\text{س}}$ = ١

أوجد قيمة ص ومن ذلك أثبت أن : س = لو$_{\text{أ}}$ $\frac{١ + \sqrt{٥}}{٢}$ «$\frac{١ \pm \sqrt{٥}}{٢}$»

(١٨) إذا كانت : د (س) = لو $س^٢$

أوجد مجموعة حل المعادلة : د (س + ١) + د (س − ١) = د (٣) «{٢ ، −٢}»

(١٩) ابحث نوع الدالة د : د (س) = لو $(\sqrt{س^٢ + ١} - س)$ من حيث كونها زوجية أم فردية.

(٢٠) استخدم الآلة الحاسبة في إيجاد عدد أرقام العدد $٤^{٤٧}$ «٢٩»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : لو س = ع + لو ص فإن : س = ...

(أ) ص × $١٠^ع$ (ب) $\frac{ع}{ص}$ (جـ) ع − $(١٠)^ص$ (د) $\frac{١}{ص} \times (١٠)^ع$

(٢) $\frac{١}{١ + لو_ب أ + لو_ب جـ} + \frac{١}{١ + لو_جـ أ + لو_جـ ب} + \frac{١}{١ + لو_أ ب + لو_أ جـ} = ...$

(أ) لو$_أ$ ب جـ (ب) لو$_ب$ أ جـ (جـ) لو$_جـ$ أ ب (د) ١

(٣) مجموع جذري المعادلة : $(٢٥)^س - ١٢ \times ٥^س + ٢٧ = ٠$ يساوي ....

(أ) لو$_٥$ ١٢ (ب) ١٢ (جـ) لو$_٥$ ٢٧ (د) ٢٧

(٤) $٣^{لو س} = ...$

(أ) ٣ لو س (ب) س لو ٣ (جـ) لو ٣ س (د) $س^{لو ٣}$

(٥) إذا كان : أ > ب > جـ > ١ فإن : لو$_جـ$ لو$_ب$ لو$_أ$ $أ^{ب^{جـ}}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) أ ب جـ

(٦) إذا كان : $ب^س - ٢ ب^{-س} = ١$ حيث ب > ١ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) لو ٢ (جـ) لو$_ب$ ٢ (د) لو$_٢$ ب

(٧) إذا كان : $\frac{١}{لو_٢ س} + \frac{١}{لو_٤ س} + \frac{١}{لو_٨ س} + \frac{١}{لو_{١٦} س} = ٥$ فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٨

(٨) إذا كان : لو أ ∈]٠ ، ١[فإن : أ ∈ ....

(أ)]٠ ، ١[(ب)]١ ، ٢[(جـ)]١ ، ١٠[(د)]١ ، ∞[

(٩) إذا كان : أ ∈]٠ ، ٩[فإن : لو$_٣$ أ ∈ ....

(أ)]−∞ ، ٢[(ب)]٢ ، ٨١[(جـ)]٢ ، ∞[(د)]−∞ ، ٠[

(١٠) مجموعة حل المعادلة : $٢^{لو_٢ (س + ٤)} + ٣^{لو_٣ (س + ٥)} = (٢٥)^{لو_٥ ٧}$ هى ....

(أ) {٢ ، ٣}　(ب) {−٤ ، −٥}　(جـ) {٢ ، −٢}　(د) {٢٠}

(١١) إذا كانت : س ، ص ∈ ح⁺ − {١} وكان : لو_ص س = لو_س ص　فإن : ....

(أ) س = ص　(ب) س = $\frac{١}{ص}$　(جـ) س = ± ١　(د) أ ، ب معًا.

(١٢) إذا كان : $٣^{أ} = ٥^{ب} = ٧^{جـ}$　فإن : $\frac{أ}{ب} + \frac{أ}{جـ}$ = ...

(أ) ٣٥　(ب) ٧　(جـ) لو_٣ ٧　(د) لو_٣ ٣٥

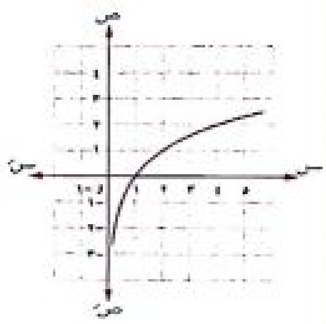
(١٣) إذا كان : لو_٢ س + لو_٤ س + لو_١٦ س = ١١　فإن : س = ...

(أ) ٣٢　(ب) ٣٦　(جـ) ٦٤　(د) ١٢١

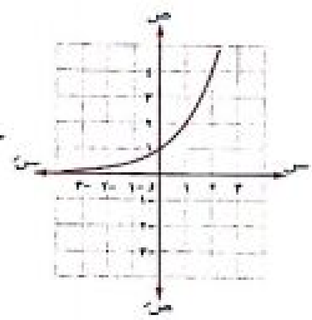
(١٤) إذا كان : لو_٢ ٣ × لو_٣ ٤ × لو_٤ ٥ × ... × لو_ن (ن + ١) = ١٠　فإن : ن = ...

(أ) ٩　(ب) ١٠　(جـ) ١٠٢٣　(د) ١٠٢٤

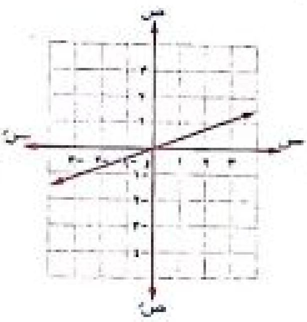
(١٥) الشكل البيانى الذى يمثل الدالة د : د (س) = لو $٢^{س}$ هو ....



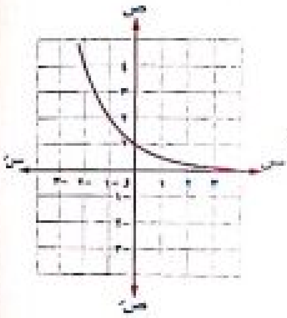
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

---

(٢) بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتى :

(١) لو_٣ $\frac{١}{٢}$ + لو_٣ $\frac{٢}{٣}$ + لو_٣ $\frac{٣}{٤}$ + ... + لو_٣ $\frac{٨٠}{٨١}$　«−٤»

(٢) لو (ظا ١°) + لو (ظا ٢°) + لو (ظا ٣°) + ... + لو (ظا ٨٩°)　«صفر»

(٣) لو ظا ١° × لو ظا ٢° × لو ظا ٣° × ... × لو ظا ٧٣°　«صفر»

---

(٣) أثبت أن : لو_ب س + لو_ب٢ $س^{٢}$ + لو_ب٣ $س^{٣}$ + ... + لو_بن $س^{ن}$ = ن لو_ب س

تطبيقات حياتية على الوحدة الثانية

📖 من أسئلة الكتاب المدرسى

١ 📖 **الربط بالهندسة :**

إذا كان طول نصف قطر كرة نق يعطى بدلالة الحجم ح من العلاقة نق = $\left(\frac{٣ ح}{٤ \pi}\right)^{\frac{١}{٣}}$

أوجد الزيادة فى طول نصف القطر عندما يتغير الحجم من $\frac{٣٢}{٣}\pi$ إلى ٣٦ π وحدة مكعبة. «١ وحدة طولية»

٢ 📖 **الربط بالأعداد :** إذا كان مجموع الأعداد ٢ + ٤ + ٨ + ١٦ + ... + $٢^{ن}$

يعطى بالعلاقة $حـ_{ن}$ = ٢ ($٢^{ن}$ − ١)

(١) أوجد مجموع العشرة أعداد الأولى فى النمط. «٢٠٤٦»

(٢) أوجد عدد الحدود فى النمط ابتداء من الحد الأول ليكون مجموعها ١٣١٠٧٠ «١٦»

٣ **الربط بالتعليم :**

إذا كانت العلاقة بين درجات تذكر أحد الطلاب بالمعلومات التى درسها فى الصف الأول الثانوى وعدد الأشهر (ن) التى تبدأ من نهاية تدريس الصف هى :

د (ن) = ٧٠ − ٤ $لو_{٢}$ (ن + ١) **فأوجد درجات هذا الطالب :**

(١) فى نهاية تدريس الصف الأول الثانوى (ن = ٠) «٧٠ درجة»

(٢) بعد مرور ٧ أشهر من تدريس الصف الأول الثانوى. «٥٨ درجة»

٤ 📖 فى دراسة لقياس مدى احتفاظ الطلبة لما تم دراسته فى إحدى المواد يعاد امتحانهم من فترة إلى أخرى فى نفس المادة. فإذا كانت درجات أحد الطلبة تتبع العلاقة د (ن) = ٨٥ − ٢٥ لو (ن + ١)

حيث ن عدد الأشهر بعد اكتمال الدراسة، د (ن) درجة الطالب (نسبة مئوية). **أوجد :**

(١) درجة الطالب فى أول امتحان لهذه المادة. «٨٥٪»

(٢) درجة الطالب بعد مرور ٣ أشهر من دراسته لهذه المادة. «٦٩٫٩٥٪»

(٣) درجة الطالب بعد مرور عام كامل من دراسته لهذه المادة. «٥٧٫١٥٪»

٥ **تطبق إحدى الدول نظامًا ضريبيًا بحيث يدفع الممول الضريبة المستحقة سنويًا وفقًا للدالة :**

$$د (س) = \begin{cases} ١٠٪ \ س & \text{عندما } س \leq ٥٠٠٠ \\ ١٠٪ \ س + ١٠٠ \ لو \ (س - ٤٩٩٩) & \text{عندما } س > ٥٠٠٠ \end{cases}$$

حيث س هى صافى الربح السنوى. **أوجد :**

(١) الضريبة المستحقة على أحد المولين الذين يبلغ صافى ربحهم السنوى ٣٦٠٠ جنيه.

② الضريبة المستحقة على أحد المولين الذين يبلغ صافى ربحهم السنوى ٨٠٠٠ جنيه.

«٣٦٠٠ جنيهًا ، ١١٤٧.٧٢٦٦ جنيهًا»

٦ الربط بالكيمياء : يعرف الرقم الهيدروچينى للمحلول (PH) على أنه سالب لوغاريتم تركيز الهيدروچين فى المحلول (H^+) أى أن $PH = -\log(H^+)$

① احسب الرقم الهيدروچينى لمحلول تركيز الهيدروچين فيه 10^{-3}

② احسب تركيز الهيدروچين فى محلول رقمه الهيدروچينى 9

«٣ ، ١٠^-٩»

٧ الربط بالسكان : إذا كان عدد سكان إحدى المدن يتزايد بمعدل سنوى قدره ٧ ٪

① أوجد العلاقة التى توضح عدد السكان بعد عام.

② بعد كم سنة يتضاعف عدد السكان إذا استمرت الزيادة بهذا المعدل ؟

«١٠ سنوات»

٨ إذا كان عدد سكان إحدى المدن ابتداءً من عام ٢٠١٠ يُعطى بالعلاقة

ع = ٩١٠ (١,٣)^(ن - ٢٠١٠) ، حيث ع عدد السكان ، ن السنة.

① احسب عدد سكان هذه المدينة عام ٢٠١٥

② فى أى سنة يصبح عدد سكان هذه المدينة ١,٤ مليون نسمة ؟

«٣٣٧١٢٩٣ نسمة ، ٢٠٢٠»

٩ إذا كانت درجة قوة الزلزال (د) على مقياس ريختر تحسب بالعلاقة د = لو $\frac{ش}{ش_٠}$

حيث ش هى شدة الزلزال ، ش٠ هى الشدة الابتدائية.

① أوجد بمقياس ريختر درجة الزلزال الذى شدته تعادل ١,٥ × ١٠^٦ مرة قدر الشدة الابتدائية.

② إذا كانت درجة قوة الزلزال = ٨ درجات بمقياس ريختر أوجد كم مرة تعادل شدة هذا الزلزال من الشدة الابتدائية.

«٦,٢ ، ١٠^٨»

١٠ إذا كانت كفاءة عمل إحدى الآلات تتناقص سنويًا طبقًا للعلاقة ك = ك٠ (٠,٩)^ن حيث ك كفاءة الآلة، ك٠ الكفاءة الابتدائية للآلة ، ن عدد سنوات عمل الآلة. فإذا عُلِمَ أنَّ الآلة تتوقف عن العمل إذا بلغت كفاءتها ٤٠ ٪ من كفاءتها الابتدائية فما عدد السنوات التى تعملها هذه الآلة قبل أنْ تتوقف عن العمل ؟ «٩ سنوات»

١١ الربط بالصناعة : إذا كانت كفاءة آلة تتناقص سنويًا بمعدل ٥ ٪ فإذا علم أن الآلة تتوقف عن التشغيل إذا بلغت كفاءتها ٦٠ ٪ من كفاءتها الابتدائية.

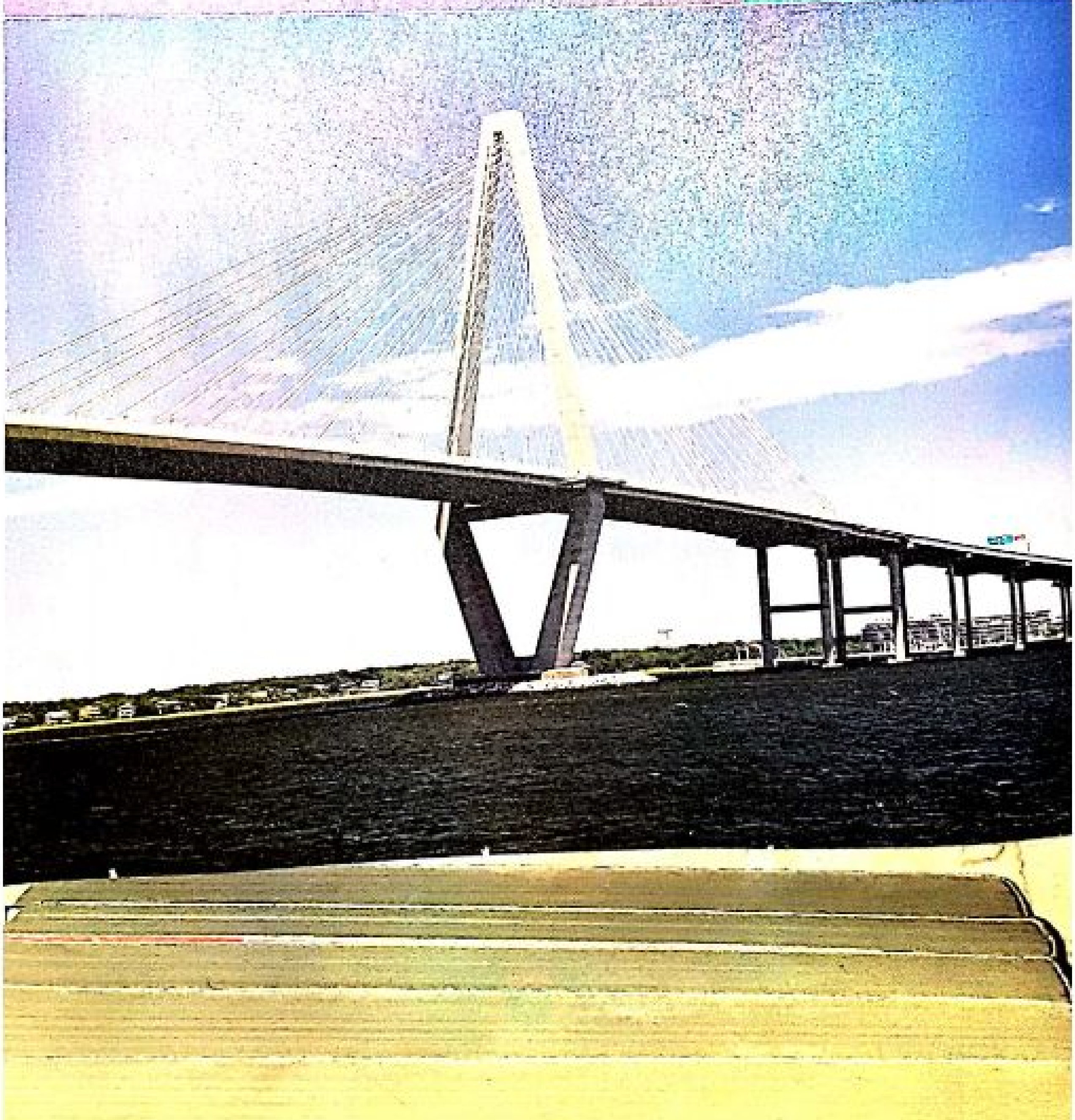
فما عدد السنوات التى تعملها هذه الآلة ؟

«١٠ سنوات»

ثانيًا

التفاضل وحساب المثلثات

الوحدة الثالثة	النهايات والاتصال
الوحدة الرابعة	حساب المثلثات



الوحدة الثالثة

النهايات والاتصال

دروس الوحدة

الدرس 1 مقدمة فى النهايات «تقدير النهاية عددياً وبيانياً».

الدرس 2 إيجاد نهاية الدالة جبرياً.

الدرس 3 نظرية (٤) «القانون».

الدرس 4 نهاية الدالة عند اللا نهاية.

الدرس 5 نهايات الدوال المثلثية.

الدرس 6 بحث وجود نهاية للدالة مجزأة المجال.

الدرس 7 الاتصال.

الدرس **1**

مقدمة فى النهايات
«تقدير النهاية عدديًا وبيانيًا»



الكميات المعينة وغير المعينة وغير المعرفة

عند إجراء العمليات الحسابية على ح نتعرض إلى واحدة من ثلاثة أنواع من الكميات وهى :

١ الكمية المعينة : هى الكمية التى لها ناتج محدد :

فمثلًا : $\frac{٨}{٥}$ كمية معينة أى لها ناتج محدد هو ١,٦

لأن : العدد الحقيقى الذى إذا ضرب فى ٥ كان الناتج ٨ هو ١,٦

ومن أمثلة الكميات المعينة : $\frac{ن}{٢}$ ، ٥ ± ٠ ، ٧ × ٣ ، .....

٢ الكمية غير المعينة : هى الكمية التى ليس لها جواب محدد :

فمثلًا : $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة أى لها عدد لا نهائى فى ح من الإجابات الصحيحة

لأن : حاصل ضرب أى عدد حقيقى × صفر = صفر

مع ملاحظة أنه توجد كميات أخرى غير معينة سنتعرض لها فى دراستنا لاحقًا.

٣ الكمية غير المعرفة : هى الكمية التى ليس لها معنى :

فمثلًا : $\frac{٥}{\text{صفر}}$ كمية غير معرفة أى ليس لها معنى.

لأنه : لا يوجد عدد حقيقى إذا ضرب × صفر كان الناتج = ٥

وبصفة عامة : $\frac{أ}{\text{صفر}}$ حيث أ ∈ ح − {٠} كمية غير معرفة.

الرمزان ∞ ، − ∞

* الرمز ∞ (لا نهاية) ليس عددًا حقيقيًا ولكنه يعبر عن كمية أكبر من أى عدد حقيقى موجب يمكن إدراكه.

* الرمز − ∞ (سالب لا نهاية) ليس عددًا حقيقيًا ولكنه يعبر عن كمية أصغر من أى عدد حقيقى سالب يمكن إدراكه.

* والتعامل بالرمزين ∞ ، − ∞ عند إجراء العمليات الحسابية

يخضع للخواص الآتية :

بفرض أن أ عدد حقيقى فإن :

١ $\infty \pm$ أ = ∞ ، − ∞ ± أ = − ∞

معلومة إثرائية

الصور غير المعينة سبع هى :

$\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، ∞ − ∞ ، ∞ × صفر ، (صفر)^صفر^ ، (∞)^صفر^ ، (١)^∞^

٢ ∞ × أ = { ∞ عندما أ > ٠ ، − ∞ عندما أ < ٠ ، كمية غير معينة عندما أ = ٠ }

، − ∞ × أ = { − ∞ عندما أ > ٠ ، ∞ عندما أ < ٠ ، كمية غير معينة عندما أ = ٠ }

فمثلًا : ∞ ± ٧ = ∞ ، − ∞ ± ٢ = − ∞ ، ∞ × ١٥ = ∞ ، − ∞ × ٧ = − ∞

، ∞ + ∞ = ∞ ، − ∞ × −٢ = ∞

مفهوم نهاية الدالة عند نقطة

مثال توضيحى

إذا أردنا إيجاد قيمة الدالة د : د (س) = $\frac{\text{س}^2 - 1}{\text{س} - 1}$ عند س = ١ فإننا نجد أن : د (١) = $\frac{1^2 - 1}{1 - 1}$ = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

وهى كمية غير معينة أى أننا لم نستطع تعيين قيمة للدالة عند س = ١

ولذلك نلجأ إلى دراسة اقتراب د (س) من قيمة معينة كلما اقتربت س من العدد ١

وذلك بإحدى الطريقتين التاليتين :

١ تقدير النهاية عدديًا

أعطِ قيمًا للمتغير س تقترب شيئًا فشيئًا من العدد ١ من خلال قيم أكبر من ١ وقيم أصغر من ١ دون أن تأخذ س القيمة ١ وملاحظة ما يحدث لقيم د (س) المناظرة كما بالجدول التالى :

س تقترب من ١ (من اليمين) ⟵ ⟶ س تقترب من ١ (من اليسار)

س	١,٥	١,٤	١,٣	١,٢	١,١		٠,٩	٠,٨	٠,٧	٠,٦	٠,٥
د (س)	٢,٥	٢,٤	٢,٣	٢,٢	٢,١		١,٩	١,٨	١,٧	١,٦	١,٥

د (س) تقترب من ٢ (من اليمين) ⟵ ⟶ د (س) تقترب من ٢ (من اليسار)

نجد أنه :

* كلما اقتربت س من العدد ١ من جهة اليمين أى (من خلال قيم للمتغير س أكبر من ١) وتكتب رياضيًا (س ⟵ 1^+) وتقرأ «س تؤول إلى ١ من اليمين»

فإن : د (س) تقترب من العدد ٢ ويسمى العدد ٢ بالنهاية اليمنى للدالة

وتكتب رياضيًا : $\lim\limits_{\text{س} \to 1^+}$ د (س) = ٢ أ، د (1^+) = ٢

وتقرأ نهاية الدالة عندما (س ⟵ 1^+) تساوى ٢

* وكلما اقتربت س من العدد ١ من جهة اليسار أى (من خلال قيم للمتغير س أصغر من ١)

وتكتب رياضيًا : ($س \leftarrow ١^-$) وتقرأ «س تؤول إلى ١ من اليسار»

فإن : د (س) تقترب من العدد ٢ ويسمى العدد ٢ بالنهاية اليسرى للدالة.

وتكتب رياضيًا : $\underset{س \leftarrow ١^-}{نهـــا}$ د (س) = ٢ أ، د (١^-) = ٢

وتقرأ نهاية الدالة عندما ($س \leftarrow ١^-$) تساوى ٢

تعريف

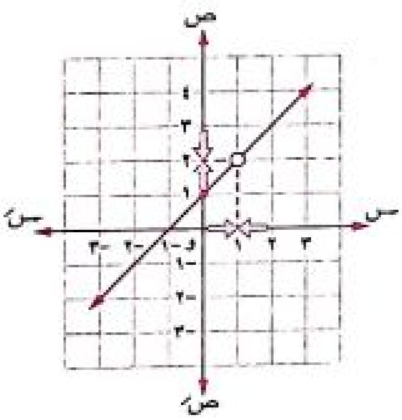
إذا كانت قيمة الدالة د تقترب من قيمة وحيدة ل عندما تقترب س من أ من جهتى اليمين واليسار

فإن نهاية د (س) تساوى ل وتكتب رمزيًا $\underset{س \leftarrow أ}{نهـــا}$ د (س) = ل

أى أنه إذا كان : د ($أ^+$) = د ($أ^-$) = ل فإن : $\underset{س \leftarrow أ}{نهـــا}$ د (س) = ل

ففى المثال السابق : ∵ د (١^+) = د (١^-) = ٢ ∴ $\underset{س \leftarrow ١}{نهـــا}$ د (س) = ٢

٢ تقدير النهاية بيانيًا



∵ د (س) = $\frac{س^2 - ١}{س - ١}$ دالة غير معرفة عند س = ١

∴ د (س) = $\frac{(س + ١)\cancel{(س - ١)}}{\cancel{(س - ١)}}$ = س + ١ ، س ≠ ١

أى أنها تمثل بخط مستقيم به ثقب عند النقطة التى

إحداثيها السينى = ١ كما بالشكل المقابل

ومن الرسم نلاحظ أنه : عند س $\xleftarrow{تؤول إلى}$ ١ (من اليمين واليسار)

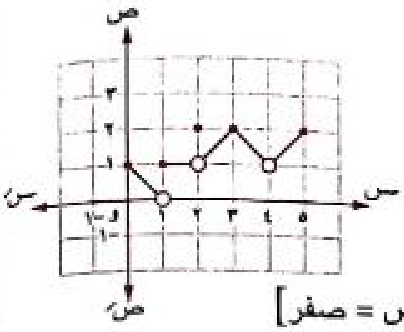
فإن : د (س) $\xleftarrow{تؤول إلى}$ ٢ أى أن : $\underset{س \leftarrow ١}{نهـــا}$ د (س) = ٢

ملاحظتان

١ عند إيجاد $\underset{س \leftarrow أ}{نهـــا}$ د (س) ليس من الضرورى أن تكون الدالة معرفة عند س = أ ، فقط يجب أن تكون معرفة فى فترة على يسار أ وفترة أخرى على يمين أ

٢ إذا كانت : د ($أ^+$) ≠ د ($أ^-$) فإن : $\underset{س \leftarrow أ}{نهـــا}$ د (س) غير موجودة

ملاحظات هامة عند إيجاد نهاية الدالة بيانيًا :



١ فى الشكل المقابل نجد أن :

أولًا : عند س = صفر :

$\lim_{س \to 0^+}$ د (س) = ١ ، $\lim_{س \to 0^-}$ د (س) غير موجودة

، $\lim_{س \to 0}$ د (س) غير موجودة [لأن الدالة غير معرفة على يسار س = صفر]

ثانيًا : عند س = ١ : $\lim_{س \to 1^-}$ د (س) = ٠ ، $\lim_{س \to 1^+}$ د (س) = ١

$\therefore$ $\lim_{س \to 1}$ د (س) غير موجودة [لأن النهاية اليمنى ≠ النهاية اليسرى]

لاحظ أنه : بالرغم من أن د معرفة عند س = ١ « د (١) = ١ » إلا أن النهاية غير موجودة

ثالثًا : عند س = ٢ : $\lim_{س \to 2^-}$ د (س) = $\lim_{س \to 2^+}$ د (س) = $\lim_{س \to 2}$ د (س) = ١

[لاحظ أنه ليس من الضرورى أن قيمة الدالة تساوى قيمة النهاية حيث د (٢) = ٢]

رابعًا : عند س = ٣ : $\lim_{س \to 3^-}$ د (س) = $\lim_{س \to 3^+}$ د (س) = $\lim_{س \to 3}$ د (س) = د (٣) = ٢

خامسًا : عند س = ٤ : $\lim_{س \to 4^-}$ د (س) = $\lim_{س \to 4^+}$ د (س) = $\lim_{س \to 4}$ د (س) = ١

[لاحظ أن د (٤) غير معرفة أى أن النهاية موجودة على الرغم من أن الدالة غير معرفة]

سادسًا : عند س = ٥ : $\lim_{س \to 5^-}$ د (س) = ٢

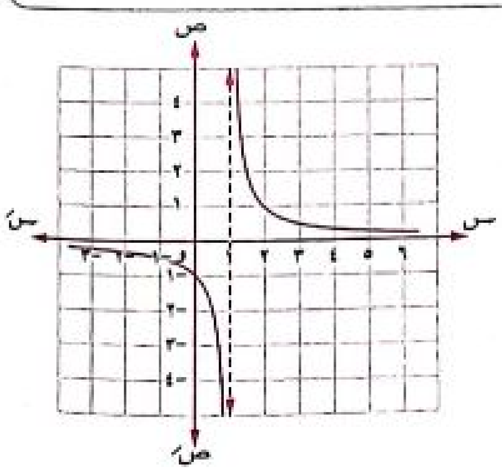
، $\lim_{س \to 5^+}$ د (س) ، $\lim_{س \to 5}$ د (س) غير موجودتين [لأن الدالة غير معرفة على يمين س = ٥]

ملاحظـــة

من الرسم البيانى للدالة فى الشكل السابق نجد أن :

* النقطة التى تمثل بفجوة لا تؤثر فى وجود نهاية عندها كما فى ثالثًا وخامسًا.
* النقطة التى عندها قفزة تؤدى إلى عدم وجود نهاية كما فى ثانيًا.

٢ الشكل المقابل يمثل الدالة د : د (س) = $\frac{١}{س - ١}$



ونجد أن : د (1^+) = ∞ ، د (1^-) = − ∞

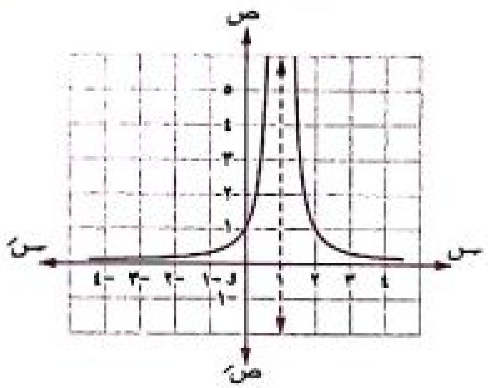
$\therefore$ د (1^+) ≠ د (1^-)

$\therefore$ $\lim_{س \to 1}$ د (س) غير موجودة

[٣] الشكل المقابل يمثل الدالة د : د (س) = $\frac{١}{(س - ١)^{٢}}$

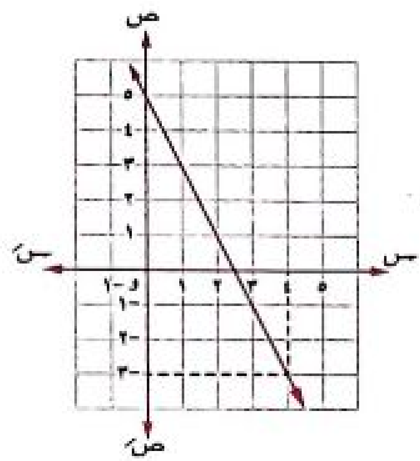
ونجد أن : د (١^{+}) = ∞ ، د (١^{-}) = ∞

، $\lim\limits_{س \to ١}$ د (س) = ∞



مثال ①

قدّر : $\lim\limits_{س \to ٤}$ (٥ - ٢ س) بيانيًا وعدديًا



الحـــل

* بيانيًا : نمثل الدالة الخطية د : د (س) = ٥ - ٢ س كما بالشكل المقابل.

نلاحظ أنه عندما س ⟵ ٤ فإن : د (س) ⟵ -٣

أى أن : $\lim\limits_{س \to ٤}$ (٥ - ٢ س) = -٣

* عدديًا : نكون جدولًا لقيم د (س) وذلك باختيار قيم س

تقترب من العدد ٤ من اليمين واليسار كما يلى :

س	٤,١	٤,٠١	٤,٠٠١	.... ٤	٣,٩٩٩	٣,٩٩	٣,٩
د (س)	-٣,٢	-٣,٠٢	-٣,٠٠٢	.... -٣	-٢,٩٩٨	-٢,٩٨	-٢,٨

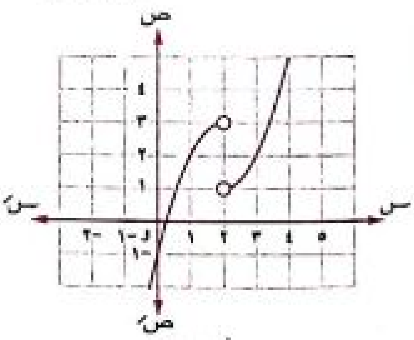
نلاحظ من الجدول أنه كلما تقترب س من العدد ٤ من اليمين أو اليسار

فإن : قيم د (س) تقترب من العدد -٣ ∴ $\lim\limits_{س \to ٤}$ (٥ - ٢ س) = -٣

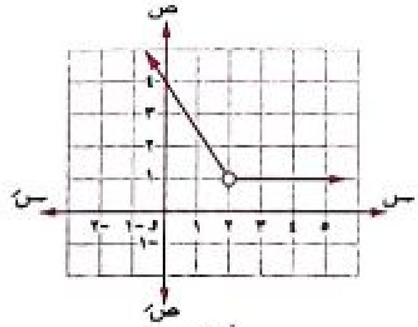
مثال ②

ادرس كلًا من الأشكال الآتية ثم أوجد قيمة :

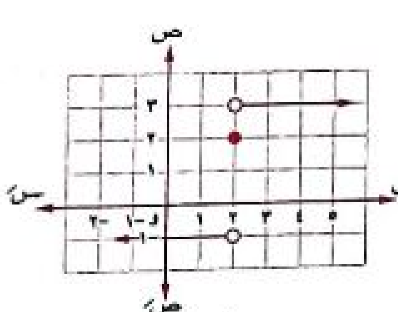
[١] د (٢) [٢] $\lim\limits_{س \to ٢^{+}}$ د (س) [٣] $\lim\limits_{س \to ٢^{-}}$ د (س) [٤] $\lim\limits_{س \to ٢}$ د (س)



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

الحــل

في شكل(١) : د (٢) غير معرفة ، $\underset{س \to ٢^+}{\text{نهــا}}$ د (س) = ١ ، $\underset{س \to ٢^-}{\text{نهــا}}$ د (س) = ٢

، $\underset{س \to ٢}{\text{نهــا}}$ د (س) غير موجودة

في شكل(٢) : د (٢) غير معرفة ، $\underset{س \to ٢^+}{\text{نهــا}}$ د (س) = ١ ، $\underset{س \to ٢^-}{\text{نهــا}}$ د (س) = ١ ، $\underset{س \to ٢}{\text{نهــا}}$ د (س) = ١

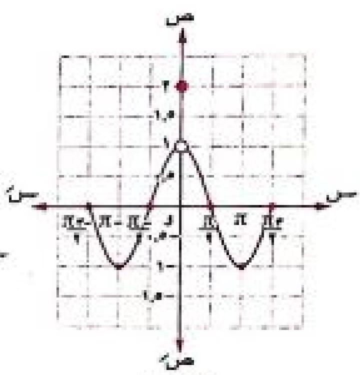
في شكل(٣) : د (٢) = ٢ ، $\underset{س \to ٢^+}{\text{نهــا}}$ د (س) = ٢ ، $\underset{س \to ٢^-}{\text{نهــا}}$ د (س) = −١

، $\underset{س \to ٢}{\text{نهــا}}$ د (س) غير موجودة.

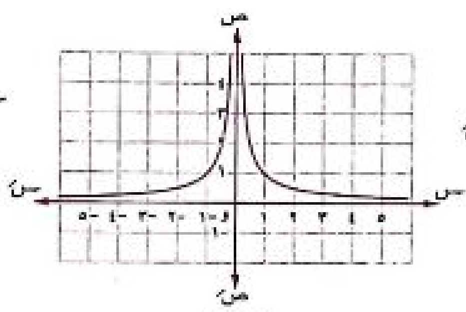
مثال ٣

ادرس كلاً من الأشكال الآتية ثم أوجد فى كل شكل قيمة :

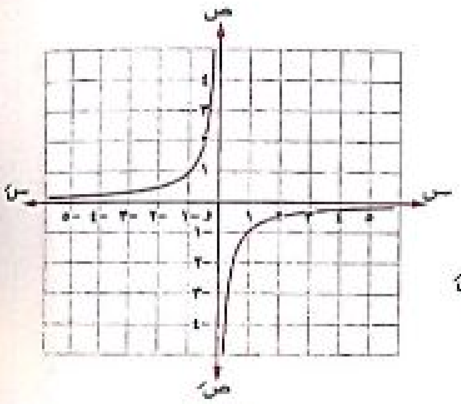
١ د (٠)	٢ د (٠^+)
٣ د (٠^-)	٤ $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}}$ د (س)



شكل(١)



شكل(٢)



شكل(٣)

الحــل

في شكل(١) : د (٠) = ٢ ، د (٠^+) = د (٠^-) = ١ $\therefore$ $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}}$ د (س) = ١

في شكل(٢) : د (٠) غير معرفة ، د (٠^+) = د (٠^-) = ∞ $\therefore$ $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}}$ د (س) = ∞

في شكل(٣) : د (٠) غير معرفة ، د (٠^+) = −∞ ، د (٠^-) = ∞

$\therefore$ $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}}$ د (س) غير موجودة.

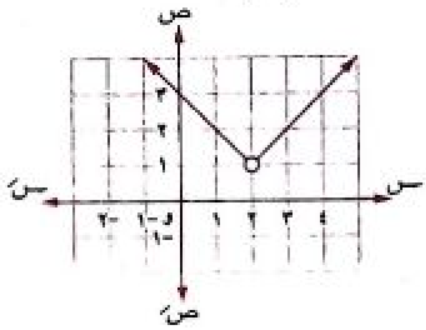
أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① كل الكميات الآتية غير معينة ماعدا ....

(أ) صفر ÷ صفر (ب) ∞ − ∞ (جـ) ∞ + ∞ (د) ∞ ÷ ∞

② فى الشكل المقابل :

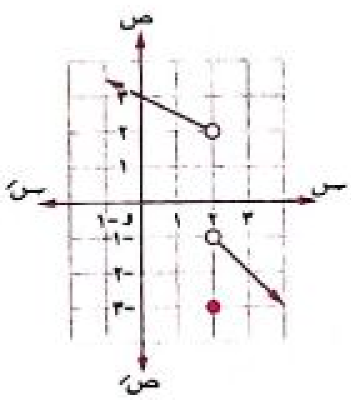


نهــا (س ← ٢) د (س) = ...

(أ) ١ (ب) −١

(جـ) غير موجودة. (د) ٢

③ فى الشكل المقابل :



نهــا (س ← ٢) د (س) = ...

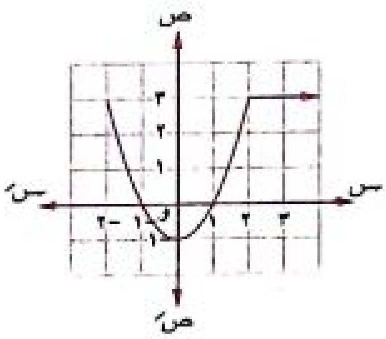
(أ) −٣

(ب) ٢

(جـ) −١

(د) غير موجودة.

④ فى الشكل المقابل :

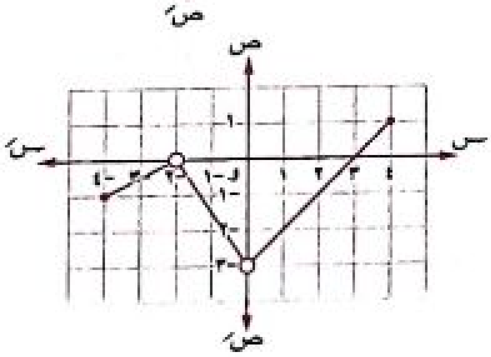


نهــا (س ← ٢) د (س) = ...

(أ) صفر (ب) ٢

(جـ) ٣ (د) غير موجودة.

⑤ من الشكل البيانى المقابل :



أولاً : نهــا (س ← −٢) د (س) = ...

(أ) صفر (ب) −٣

(جـ) −٢ (د) غير موجودة.

ثالثًا : $\underset{س \to ١^{-}}{\text{نهـــا}}$ د (س) = ...

(أ) صفر　　(ب) ‎-١　　(جـ) ٤　　(د) غير موجودة.

رابعًا : د (٢) = ...

(أ) صفر　　(ب) ٣　　(جـ) ٤　　(د) غير معرفة.

خامسًا : د (٥) = ...

(أ) صفر　　(ب) ٢　　(جـ) ٥　　(د) غير معرفة.

سادسًا : $\underset{س \to ٥^{-}}{\text{نهـــا}}$ د (س) = ...

(أ) صفر　　(ب) ٢　　(جـ) ٣　　(د) غير موجودة.

سابعًا : $\underset{س \to ٥^{+}}{\text{نهـــا}}$ د (س) = ...

(أ) صفر　　(ب) ٢　　(جـ) ٣　　(د) غير موجودة.

ثامنًا : $\underset{س \to ٥}{\text{نهـــا}}$ د (س) = ...

(أ) صفر　　(ب) ٢　　(جـ) ٣　　(د) غير موجودة.

تاسعًا : $\underset{س \to ٧^{-}}{\text{نهـــا}}$ د (س) = ...

(أ) صفر　　(ب) ٢　　(جـ) ٤　　(د) غير موجودة.

عاشرًا : $\underset{س \to ٧}{\text{نهـــا}}$ د (س) = ...

(أ) صفر　　(ب) ٢　　(جـ) ٤　　(د) غير موجودة.

ثانيًا　الأسئلة المقالية

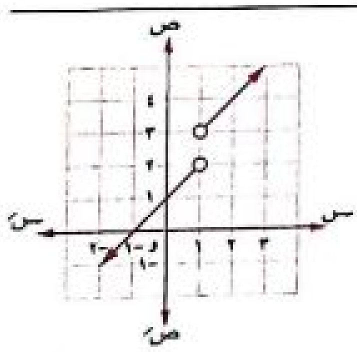
١ أكمل الجدول الآتى واستنتج : $\underset{س \to ٢}{\text{نهـــا}}$ د (س) حيث د (س) = ٥ س + ٤

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	←	٢	→	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د (س)	....	....	....	←	؟	→	....	....	....

٢ قدّر كلا من النهايتين الآتيتين بيانيًا وعدديًا :

(١) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـــا}}$ (١ − ٣ س)　　(٢) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـــا}}$ (س^{٢} − ٢)

٣ من الشكل المقابل أوجد :



(١) د (١)

(٢) د (١$^{+}$)

(٣) د (١$^{-}$)

(٤) $\underset{س \to ١}{\text{نهـــا}}$ د (س)

ثانيًا : نهـــا$_{س \leftarrow ٠}$ د (س) = ...

(أ) صفر　　(ب) −٢　　(جـ) −٣　　(د) غير موجودة.

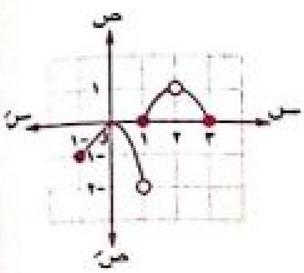
ثالثًا : نهـــا$_{س \leftarrow -٤}$ د (س) = ...

(أ) صفر　　(ب) −٤　　(جـ) −١　　(د) غير موجودة.

رابعًا : نهـــا$_{س \leftarrow ٤}$ د (س) = ...

(أ) صفر　　(ب) ٤　　(جـ) ١　　(د) غير موجودة.

(٦) بالاستعانة بالشكل المقابل :



أولًا : نهـــا$_{س \leftarrow ١^{+}}$ د (س) = ...

(أ) صفر　　(ب) −٢

(جـ) ١　　(د) غير موجودة.

ثانيًا : نهـــا$_{س \leftarrow ١^{-}}$ د (س) = ...

(أ) صفر　　(ب) −٢　　(جـ) ١　　(د) غير موجودة.

ثالثًا : نهـــا$_{س \leftarrow ١}$ د (س) = ...

(أ) صفر　　(ب) −٢　　(جـ) ١　　(د) غير موجودة.

رابعًا : نهـــا$_{س \leftarrow -١^{+}}$ د (س) = ...

(أ) صفر　　(ب) −١　　(جـ) −٢　　(د) غير موجودة.

خامسًا : نهـــا$_{س \leftarrow -١}$ د (س) = ...

(أ) صفر　　(ب) −١　　(جـ) −٢　　(د) غير موجودة.

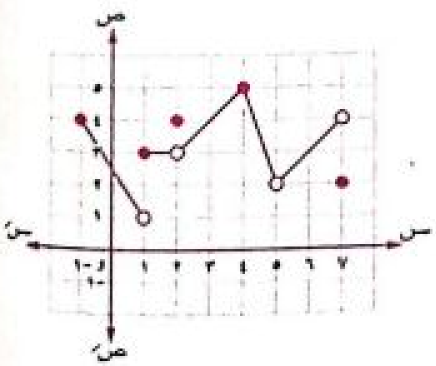
سادسًا : نهـــا$_{س \leftarrow ٢}$ د (س) = ...

(أ) صفر　　(ب) ١　　(جـ) ٢　　(د) غير موجودة.

سابعًا : نهـــا$_{س \leftarrow ٠}$ د (س) = ...

(أ) صفر　　(ب) ١　　(جـ) −١　　(د) غير موجودة.

(٧) بالاستعانة بالشكل المقابل :



أولًا : نهـــا$_{س \leftarrow -١^{+}}$ د (س) = ...

(أ) صفر　　(ب) −١

(جـ) ٤　　(د) غير موجودة.

ثانيًا : نهـــا$_{س \leftarrow -١^{-}}$ د (س) = ...

(أ) صفر　　(ب) −١

(جـ) ٤　　(د) غير موجودة.

ثالثًا : $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}}$ د (س) = ...

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) ٤ (د) غير موجودة.

رابعًا : د (٢) = ...

(أ) صفر (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) غير معرفة.

خامسًا : د (٥) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) غير معرفة.

سادسًا : $\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهـا}^{-}}$ د (س) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) غير موجودة.

سابعًا : $\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهـا}^{+}}$ د (س) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) غير موجودة.

ثامنًا : $\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهـا}}$ د (س) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) غير موجودة.

تاسعًا : $\underset{س \leftarrow ٧^{-}}{\text{نهـا}}$ د (س) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) غير موجودة.

عاشرًا : $\underset{س \leftarrow ٧}{\text{نهـا}}$ د (س) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) غير موجودة.

ثانيًا الأسئلة المقالية

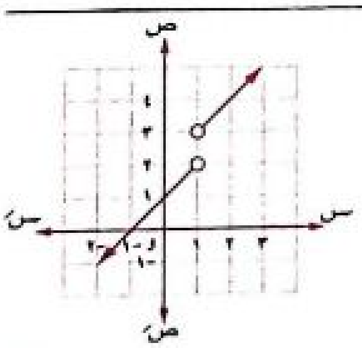
١ أكمل الجدول الآتى واستنتج : $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ د (س) حيث د (س) = ٥ س + ٤

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	←	٢	→	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د (س)	....	....	....	←	؟	→	....	....	....

٢ قدِّر كلًا من النهايتين الآتيتين بيانيًا وعدديًا :

① $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ (١ − ٣ س) ② $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ (س^{٢} − ٢)

٣ من الشكل المقابل أوجد :



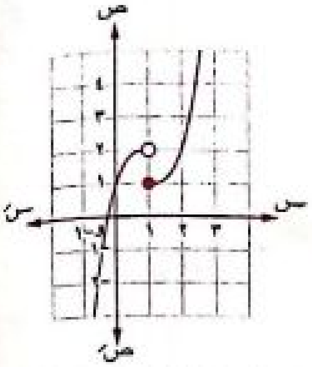
① د (١)

② د (١$^{+}$)

③ د (١$^{-}$)

④ $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ د (س)

٤ ادرس الشكل المقابل ثم أوجد :



① د (١)

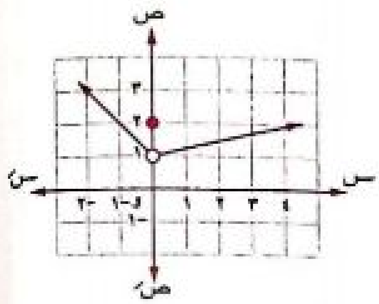
② د (١^{-})

③ د (١^{+})

④ $\underset{س \to ١}{\text{نهــا}}$ د (س)

---

٥ ادرس الشكل المقابل ثم أوجد :



① د (٠)

② د (٠^{-})

③ د (٠^{+})

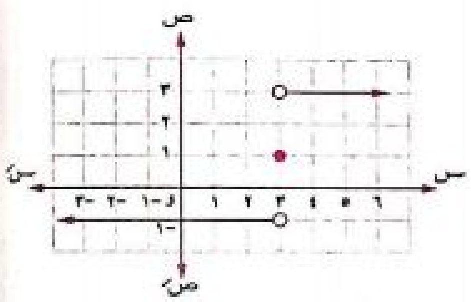
④ $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}}$ د (س)

⑤ د (٢)

⑥ $\underset{س \to ٢}{\text{نهــا}}$ د (س)

---

٦ من الشكل المقابل أوجد ما يأتى :



① د (٣)

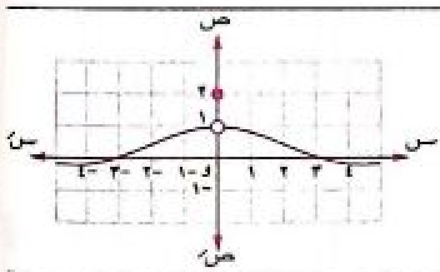
② $\underset{س \to ٣^{+}}{\text{نهــا}}$ د (س)

③ $\underset{س \to ٣^{-}}{\text{نهــا}}$ د (س)

④ $\underset{س \to ٣}{\text{نهــا}}$ د (س)

---

٧ من الشكل المقابل أوجد :



① د (٠)

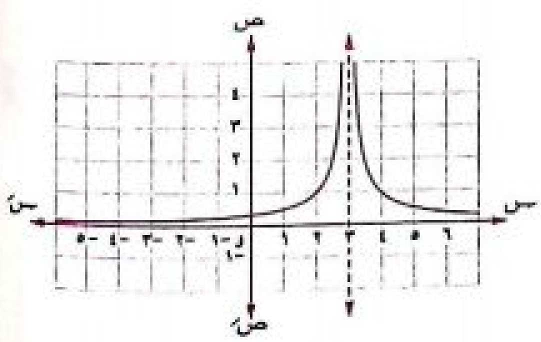
② د (٠^{+})

③ د (٠^{-})

④ $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}}$ د (س)

---

٨ من الشكل المقابل أوجد إن أمكن ما يلى :



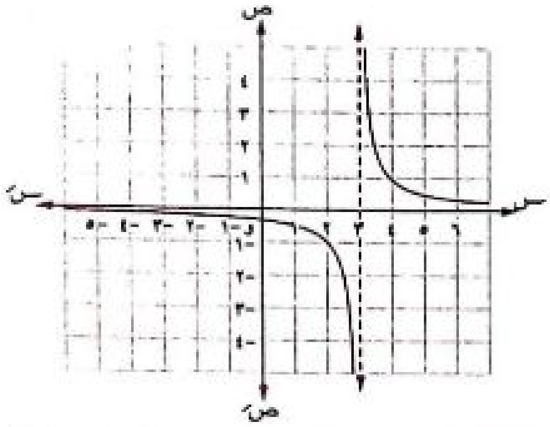
① د (٣)

② $\underset{س \to ٣^{+}}{\text{نهــا}}$ د (س)

③ $\underset{س \to ٣^{-}}{\text{نهــا}}$ د (س)

④ $\underset{س \to ٣}{\text{نهــا}}$ د (س)

٩ من الشكل المقابل أوجد إن أمكن ما يلى :



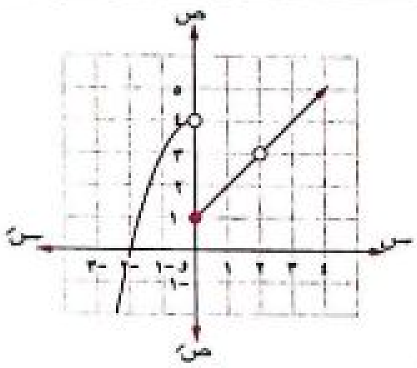
① د (٣)

② د (٣⁺)

③ د (٣⁻)

④ نهــا د (س) عندما س ← ٣

١٠ من الشكل المقابل أوجد :



① د (٠)

② د (٠⁺)

③ د (٠⁻)

④ نهــا د (س) عندما س ← ٠

⑤ د (٢)

⑥ د (٢⁺)

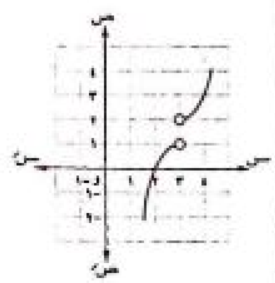
⑦ د (٢⁻)

⑧ نهــا د (س) عندما س ← ٢

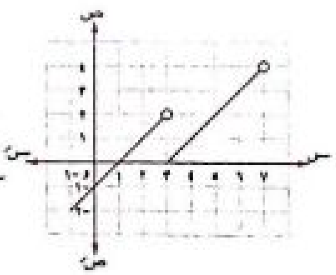
ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

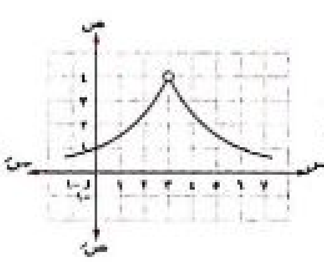
① أى من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية لها نهاية عند س = ٢ ؟



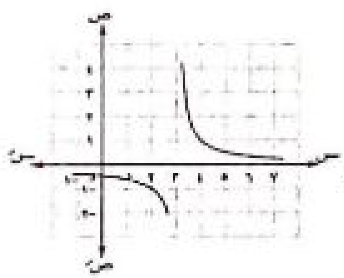
(أ)



(ب)

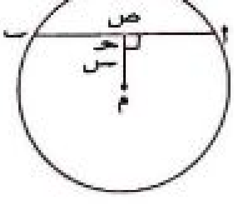


(جـ)



(د)

② الشكل المقابل يمثل دائرة م



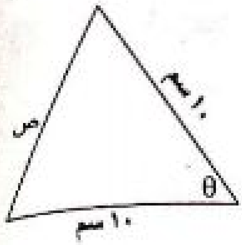
طول نصف قطرها ٥ سم ، م‍ح ⊥ أب

، طول م‍ح = س ، طول أب = ص عندما س ← ٠

فإن : ص ← .... سم

(أ) ٢,٥ (ب) ٥ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

③ فى الشكل المقابل :



عندما θ ← $\frac{\pi}{٢}$ فإن : ص ← .... سم

(أ) صفر (ب) ٥

(جـ) ١٠ (د) ١٠ $\sqrt{٢}$

④ إذا قطع منحنى الدالة د الكثيرة الحدود محور السينات عند س = ٣ فإن : ....

(أ) نهــا (س ← ٣) د (س) = صفر (ب) نهــا (س ← ٠) د (س) = ٣

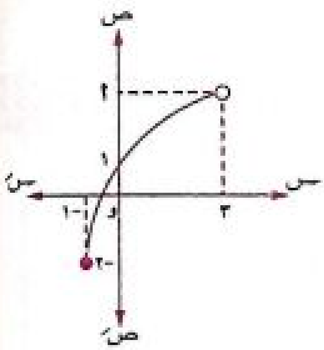
(جـ) نهــا (س ← ٠) د (س) = صفر (د) نهــا (س ← ٢) د (س) = ٣

⑤ إذا قطع منحنى الدالة د الكثيرة الحدود محور الصادات عند ص = ٣ فإن : ....

(أ) نهــا (س ← ٣) د (س) = صفر (ب) نهــا (س ← ٣) د (س) = ٣

(جـ) نهــا (س ← ٠) د (س) = صفر (د) نهــا (س ← ٠) د (س) = ٣

⑥ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة ص = د (س)



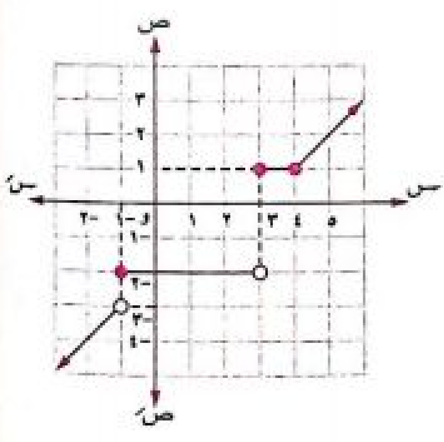
وكان : نهــا (س ← ٠) د (س) = نهــا (س ← -١⁺) د (س) + نهــا (س ← ٢⁻) د (س)

فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٤

(جـ) ٥ (د) ٦

⑦ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة ص = د (س)



وكان : نهــا (س ← أ⁻) د (س) = نهــا (س ← -١⁺) د (س)

+ نهــا (س ← ٢⁺) د (س)

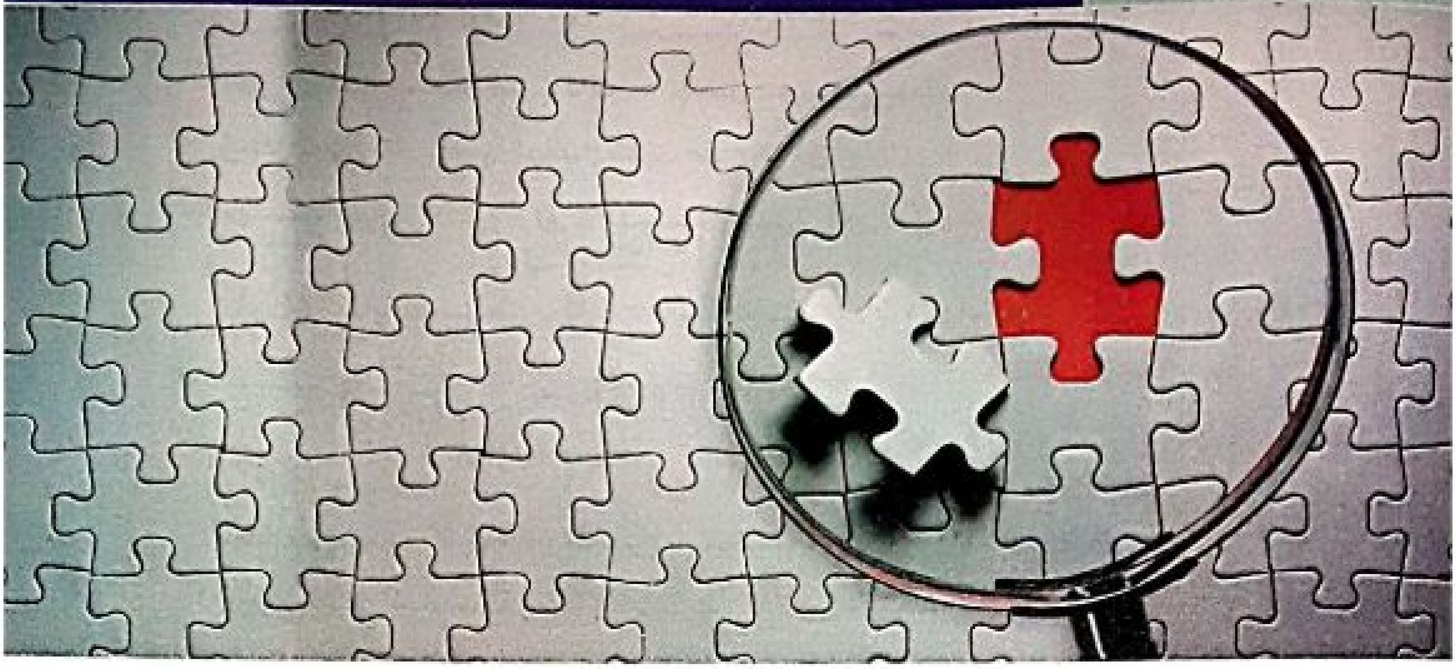
فإن أكبر قيمة للعدد أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢

(جـ) ٣ (د) ٤

الدرس 2

إيجاد نهاية الدالة جبريًا



سنعرض الآن بعض النظريات والنتائج التى تساعد فى إيجاد نهاية دالة دون اللجوء إلى الرسم البيانى أو دراسة قيم الدالة.

نظرية ١ نهاية الدالة كثيرة الحدود

إذا كانت : د (س) كثيرة حدود فى المتغير س فإن : $\underset{س \leftarrow أ}{نهــا}$ د (س) = د (أ)

فمثلًا : $\underset{س \leftarrow ٢}{نهــا}$ (٢ س + ٥) = د (٢) = ٢ × ٢ + ٥ = ٩

، $\underset{س \leftarrow ١}{نهــا}$ (س^٢ − ٣ س + ٢) = د (١) = ١ − ٣ + ٢ = ٠

نتيجة

نهاية الدالة الثابتة

إذا كانت : د (س) = ك حيث ك ثابت فإن : $\underset{س \leftarrow أ}{نهــا}$ د (س) = $\underset{س \leftarrow أ}{نهــا}$ ك = ك

فمثلًا : $\underset{س \leftarrow ٢}{نهــا}$ ٤ = ٤ ، $\underset{س \leftarrow -١}{نهــا}$ −٥ = −٥

نظرية ٢

إذا كانت د ، ر دالتين فى المتغير س وكانت : $\underset{س \leftarrow أ}{نهــا}$ د (س) = ل

، $\underset{س \leftarrow أ}{نهــا}$ ر (س) = م حيث ل ، م ∈ ح فإن :

١ $\underset{س \leftarrow أ}{نهــا}$ [د (س) ± ر (س)] = $\underset{س \leftarrow أ}{نهــا}$ د (س) ± $\underset{س \leftarrow أ}{نهــا}$ ر (س) = ل ± م

أى أن نهاية المجموع الجبرى لدالتين = المجموع الجبرى لنهايتيهما

ويمكن تعميم ذلك بالنسبة للمجموع الجبرى لعدد منته من الدوال.

٢ $\lim_{س \to أ} [د(س) \times ر(س)] = \lim_{س \to أ} د(س) \times \lim_{س \to أ} ر(س) = ل \times م$

أى أن نهاية حاصل ضرب دالتين = حاصل ضرب نهايتيهما

ويمكن تعميم ذلك بالنسبة لحاصل ضرب عدد منته من الدوال.

٣ $\lim_{س \to أ} ك \times د(س) = ك \times \lim_{س \to أ} د(س) = ك \times ل$ حيث ك مقدار ثابت.

أى أن نهاية حاصل ضرب ثابت × دالة = الثابت × نهاية هذه الدالة.

٤ $\lim_{س \to أ} \frac{د(س)}{ر(س)} = \frac{ل}{م}$ بشرط أن $م \neq ٠$

أى أن

نهاية خارج قسمة دالتين = خارج قسمة نهايتيهما بشرط ألا تكون نهاية المقسوم عليه = ٠

ويمكن تعميم ذلك بالنسبة لحاصل ضرب عدد منته من الدوال مقسومًا على حاصل ضرب عدد منته من الدوال بشرط أن أيًا من نهايات المقسوم عليه لا يساوى الصفر.

٥ $\lim_{س \to أ} [د(س)]^{ن} = [\lim_{س \to أ} د(س)]^{ن} = ل^{ن}$ ، $ن \in ص^{+}$

مثال ١

أوجد كلاً من النهايات الآتية :

١ $\lim_{س \to ٠} س^٢ + ٣س - ٢ + \frac{٢س}{س - ١}$

٢ $\lim_{س \to -٢} (س^٢ + ٣)(س^٣ - ٢س^٢ + ٤س - ١)$

٣ $\lim_{س \to ١} \frac{(٢س^٢ - ٥س + ٦)(س + ١)}{(س^٢ + ٢)(٣س - ١)}$

الحل

١ $\lim_{س \to ٠} س^٢ + ٣س - ٢ + \frac{٢س}{س - ١} = \lim_{س \to ٠} (س^٢ + ٣س - ٢) + \lim_{س \to ٠} \frac{٢س}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ٠} (س^٢ + ٣س - ٢) + \frac{\lim_{س \to ٠} ٢س}{\lim_{س \to ٠} س - ١} = -٢ + \frac{٠}{-١} = -٢$

٢ $\lim_{س \to -٢} (س^٢ + ٣)(س^٣ - ٢س^٢ + ٤س - ١)$

$= \lim_{س \to -٢} (س^٢ + ٣) \times \lim_{س \to -٢} (س^٣ - ٢س^٢ + ٤س - ١)$

$= (٤ + ٣)(-٨ - ٨ - ٨ - ١) = ٧ \times -٢٥ = -١٧٥$

[٣] $\lim_{س \to ١} \frac{(٢ س^٢ - ٥ س + ٦)(س + ١)}{(س^٢ + ٢)(٣ س - ١)}$

$= \frac{\lim_{س \to ١} (٢ س^٢ - ٥ س + ٦) \times \lim_{س \to ١} (س + ١)}{\lim_{س \to ١} (س^٢ + ٢) \times \lim_{س \to ١} (٣ س - ١)} = \frac{(٢ - ٥ + ٦)(١ + ١)}{(١ + ٢)(٣ - ١)} = \frac{٣ \times ٢}{٣ \times ٢} = ١$

يمكنك حل المثال السابق مباشرة باستخدام التعويض المباشر دون تقسيم النهايات.

ملاحظة

يمكن استخدام التعويض المباشر وتكون $\lim_{س \to أ} د(س) = د(أ)$

إذا كانت الدالة د كثيرة حدود أو دالة كسرية مقامها ≠ صفر عند التعويض عن س = أ

نظرية ٣

إذا كانت : د ، ى دالتين فى المتغير س وكانت : د (س) = ى (س) لجميع قيم س ∈ ح - {أ}

وكانت : $\lim_{س \to أ} ى(س) = ل$ فإن : $\lim_{س \to أ} د(س) = ل$

استخدام النظرية السابقة :

تستخدم هذه النظرية لإيجاد نهاية دالة كسرية جبرية

(أى نهاية كسر كل من بسطه ومقامه عبارة عن دالة كثيرة حدود)

ولتكن د (س) عندما س ← أ وذلك عندما تكون

د (أ) = $\frac{صفر}{صفر}$ وهذا معناه أن (س - أ)

يكون عاملًا مشتركًا بين البسط والمقام.

لاحظ أن

س ← أ تعنى أن

(س - أ) ← صفر

أى أن (س - أ) ≠ صفر

ولهذا السبب تم الاختصار

ولإيجاد $\lim_{س \to أ} د(س)$ فى هذه الحالة فإننا نختصر العامل (س - أ) وذلك عن طريق

التحليل أو القسمة المطولة فنحصل على دالة جديدة ولتكن ى (س) تكون مساوية للدالة د (س) عندما س ≠ أ

فتكون $\lim_{س \to أ} د(س) = \lim_{س \to أ} ى(س)$ والمثال التالى يوضح ذلك.

مثال ٢

أوجد كلاً مما يأتى :

[١] $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ - ١٦}{س - ٤}$ [٢] $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٨}{س^٢ - ٥ س + ٦}$ [٣] $\lim_{س \to -١} \frac{(٢ س + ٣)^٢ - ١}{س^٢ + س}$

الحل

[١] بفرض د (س) = $\frac{س^٢ - ١٦}{س - ٤}$ ∴ د (٤) = $\frac{٤^٢ - ١٦}{٤ - ٤} = \frac{صفر}{صفر}$

∴ $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ - ١٦}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤} \frac{(س - ٤)(س + ٤)}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤} (س + ٤) = ٤ + ٤ = ٨$

[٢] بفرض $د(س) = \frac{س^٣ - ٨}{س^٢ - ٥س + ٦}$ $\therefore$ $د(٢) = \frac{٢^٣ - ٨}{٢^٢ - ٥(٢) + ٦} = \frac{صفر}{صفر}$

$$\therefore \lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٨}{س^٢ - ٥س + ٦} = \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}{(س - ٢)(س - ٣)}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ + ٢س + ٤}{س - ٣} = \frac{٢^٢ + ٢(٢) + ٤}{٢ - ٣} = -١٢$$

[٣] بفرض $د(س) = \frac{(٢س + ٣)^٢ - ١}{س^٢ + س}$ $\therefore$ $د(-١) = \frac{(-٢ + ٣)^٢ - ١}{(-١)^٢ - ١} = \frac{صفر}{صفر}$

$$\therefore \lim_{س \to -١} \frac{(٢س + ٣)^٢ - ١}{س^٢ + س} = \lim_{س \to -١} \frac{(٢س + ٣ - ١)(٢س + ٣ + ١)}{س(س + ١)}$$

$$= \lim_{س \to -١} \frac{(٢س + ٢)(٢س + ٤)}{س(س + ١)} = \lim_{س \to -١} \frac{٢(س + ١) \times ٢(س + ٢)}{س(س + ١)}$$

$$= \lim_{س \to -١} \frac{٤(س + ٢)}{س} = \frac{٤(-١ + ٢)}{-١} = -٤$$

مثال ٣

أوجد : $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٧س + ٦}{٣س^٢ - ٨س + ٤}$

الحل

بفرض $د(س) = \frac{س^٣ - ٧س + ٦}{٣س^٢ - ٨س + ٤}$

$\therefore$ $د(٢) = \frac{(٢)^٣ - ٧(٢) + ٦}{٣(٢)^٢ - ٨(٢) + ٤} = \frac{صفر}{صفر}$

$\therefore$ $(س - ٢)$ عامل مشترك بين البسط والمقام

وبإجراء قسمة مطولة للبسط على $(س - ٢)$

$س^٣ \quad - ٧س + ٦$	$س - ٢$
$\ominus س^٣ \oplus ٢س^٢$	$س^٢ + ٢س - ٣$
$٢س^٢ - ٧س + ٦$	
$\ominus ٢س^٢ \oplus ٤س$	
$-٣س + ٦$	
$\oplus -٣س \ominus ٦$	
$..$	

$\therefore$ البسط $= (س - ٢)(س^٢ + ٢س - ٣)$

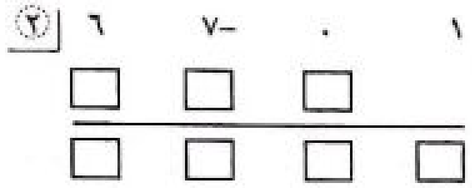
$$\therefore \lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٧س + ٦}{٣س^٢ - ٨س + ٤} = \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س^٢ + ٢س - ٣)}{(س - ٢)(٣س - ٢)} = \lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ + ٢س - ٣}{٣س - ٢}$$

$$= \frac{٤ + ٤ - ٣}{٦ - ٢} = \frac{٥}{٤}$$

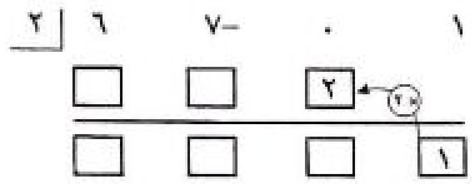
> **تذكر أنه**
>
> فى عملية القسمة المطولة :
>
> (١) نرتب حدود كل من المقسوم والمقسوم عليه بحسب قوى س ترتيبًا تصاعديًا أو تنازليًا بنفس الطريقة مع ترك مكان فارغ للقوى غير الموجودة.
>
> (٢) نقسم الحد الأول من المقسوم على الحد الأول من المقسوم عليه ونكتب ناتج القسمة.
>
> (٣) نضرب ناتج القسمة فى المقسوم عليه ونطرح الناتج من المقسوم للحصول على الباقى.
>
> (٤) نستمر بنفس الطريقة حتى الانتهاء من عملية القسمة.

ملاحظـــة

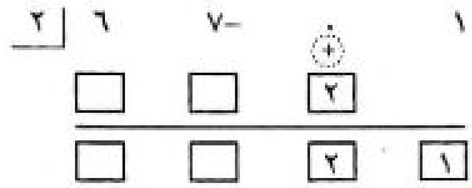
يمكن فى حالة القسمة على مقدار من الدرجة الأولى ومعامل س = ١ أى على الصورة (س − أ) استخدام طريقة القسمة التركيبية كتسهيل لطريقة القسمة المطولة ويمكن استخدامها فى المثال السابق كما يلى لقسمة (س³ − ٧ س + ٦) على (س − ٢)



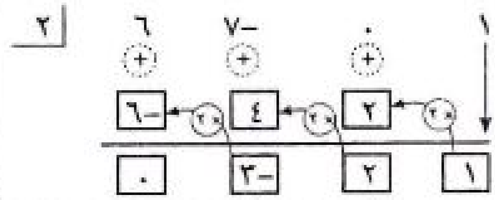
١ نرتب المعاملات حسب قوى س التصاعدية أو التنازلية مع وضع (٠) كمعامل للقوى غير الموجودة مع وضع الـ ٢ (وهى صفر المقسوم عليه) فى خانة المقسوم عليه.



٢ يترك معامل أكبر قوى لينزل للصف الثالث مباشـرة ثم يضـرب فى الـ ٢ ونضع ناتج الضرب فى خانة الصف الثانى بالعمود المجاور مباشرة.



٣ اجمع معامل القوة التالية مع ناتج الضرب الذى حصلت عليه توًا.



٤ كـرر الضرب والجمع لتحصل على معاملات خارج القسـمة وهى ١ ، ٢ ، −٣

∴ خارج القسمة هو س² + ٢ س − ٣

حل آخر للمثال السابق :

يمكن استخدام التحليل بالتقسيم وذلك بمعلومية أن (س − ٢) عامل من عوامل البسط كالتالى.

$$\lim_{\text{س}\to 2}\frac{\text{س}^3-7\,\text{س}+6}{3\,\text{س}^2-8\,\text{س}+4}=\lim_{\text{س}\to 2}\frac{(\text{س}^3-8)+(-7\,\text{س}+14)}{(\text{س}-2)(3\,\text{س}-2)}$$

$$=\lim_{\text{س}\to 2}\frac{(\text{س}-2)(\text{س}^2+2\,\text{س}+4)-7(\text{س}-2)}{(\text{س}-2)(3\,\text{س}-2)}$$

$$=\lim_{\text{س}\to 2}\frac{\cancel{(\text{س}-2)}(\text{س}^2+2\,\text{س}+4-7)}{\cancel{(\text{س}-2)}(3\,\text{س}-2)}=\frac{2^2+2\times2-3}{3\times2-2}=\frac{5}{4}$$

ملاحظـــة هامة

فى حالة وجود فرق بين جذرين تربيعين لمقدارين جبريين (فى البسط أ ، فى المقام أ ، فى كليهما) فإننا نضرب كلاً من البسط والمقام فى مرافق (البسط أ ، المقام أ ، كليهما) وذلك عندما تكون نتيجة التعويض المباشر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ والمثال التالى يوضح ذلك.

مثال ٤

أوجد كلاً مما يأتى : [١] $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{س}^٢ + ٢\text{س}}{\sqrt{\text{س} + ٩} - ٣}$ [٢] $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\sqrt{٤ + \text{س}} - ٢}{\sqrt{٩ + \text{س}} - \sqrt{٩ - \text{س}}}$

الحل

بالتعويض عن س = ٠ فى كل من الدالتين السابقتين سنجد أن قيمة كل منهما = $\dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

[١] $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{س}^٢ + ٢\text{س}}{\sqrt{\text{س} + ٩} - ٣} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{س}^٢ + ٢\text{س}}{\sqrt{\text{س} + ٩} - ٣} \times \dfrac{\sqrt{\text{س} + ٩} + ٣}{\sqrt{\text{س} + ٩} + ٣}$

(وذلك بالضرب بسطًا ومقامًا فى مرافق المقام)

$$= \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{س}(\text{س} + ٢)\left(\sqrt{\text{س} + ٩} + ٣\right)}{(\text{س} + ٩) - ٩}$$

$$= \lim\limits_{\text{س} \to ٠} (\text{س} + ٢)\left(\sqrt{\text{س} + ٩} + ٣\right) = (٠ + ٢)\left(\sqrt{٠ + ٩} + ٣\right) = ١٢$$

[٢] $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\sqrt{٤ + \text{س}} - ٢}{\sqrt{٩ + \text{س}} - \sqrt{٩ - \text{س}}}$

$$= \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\left(\sqrt{٤ + \text{س}} - ٢\right)\left(\sqrt{٤ + \text{س}} + ٢\right)\left(\sqrt{٩ + \text{س}} + \sqrt{٩ - \text{س}}\right)}{\left(\sqrt{٩ + \text{س}} - \sqrt{٩ - \text{س}}\right)\left(\sqrt{٩ + \text{س}} + \sqrt{٩ - \text{س}}\right)\left(\sqrt{٤ + \text{س}} + ٢\right)}$$

(وذلك بالضرب بسطًا ومقامًا في مرافق البسط ومرافق المقام)

$$= \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{(٤ + \text{س} - ٤)\left(\sqrt{٩ + \text{س}} + \sqrt{٩ - \text{س}}\right)}{(٩ + \text{س} - ٩ + \text{س})\left(\sqrt{٤ + \text{س}} + ٢\right)}$$

$$= \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{س}\left(\sqrt{٩ + \text{س}} + \sqrt{٩ - \text{س}}\right)}{٢\text{س}\left(\sqrt{٤ + \text{س}} + ٢\right)} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\sqrt{٩ + \text{س}} + \sqrt{٩ - \text{س}}}{٢\left(\sqrt{٤ + \text{س}} + ٢\right)}$$

$$= \dfrac{\sqrt{٩ + ٠} + \sqrt{٩ - ٠}}{٢\left(\sqrt{٤ + ٠} + ٢\right)} = \dfrac{٣}{٤}$$

مما سبق نستنتج أن

لإيجاد $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \text{د}(\text{س})$ نوجد د (أ) بالتعويض المباشر عن س = أ فى الدالة فإذا كان الناتج :

[١] عدد حقيقى ب فإن : $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \text{د}(\text{س}) = \text{ب}$

[٢] $\dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ «كمية غير معينة» نقوم بقسمة كل من البسط والمقام على (س − أ)

مثال ٥

أوجد كلاً مما يأتى :

١ $\underset{\text{س} \leftarrow -٢}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^{٢} + ١}$

٢ $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \left(\frac{\text{س}^{٢} - \text{س}}{\text{س} - ٢} - \frac{٢}{\text{س} - ٢} \right)$

الحــل

١ $\because$ د $(-٢) = \frac{-٢ - ٣}{(-٢)^{٢} + ١} = -١$ (التعويض المباشر يعطى عددًا حقيقيًا)

$\therefore \underset{\text{س} \leftarrow -٢}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^{٢} + ١} = -١$

٢ بفرض د $(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} - \text{س}}{\text{س} - ٢} - \frac{٢}{\text{س} - ٢}$

$\therefore$ د $(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢}{\text{س} - ٢}$

$\therefore$ د $(٢) = \frac{٤ - ٢ - ٢}{٢ - ٢} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ (التعويض المباشر يعطى $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ «كمية غير معينة»)

$\therefore \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \left(\frac{\text{س}^{٢} - \text{س}}{\text{س} - ٢} - \frac{٢}{\text{س} - ٢} \right) = \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢}{\text{س} - ٢}$

$= \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ١)}{\text{س} - ٢}$

$= \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} (\text{س} + ١) = ٢ + ١ = ٣$

مثال ٦

إذا كانت : $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \frac{\text{د}(\text{س}) - ٧}{\text{س} - ٢} = ٤$ حيث د (س) كثيرة حدود

فأوجد : $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ د (س)

الحــل

$\because \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \frac{\text{د}(\text{س}) - ٧}{\text{س} - ٣}$ موجودة وتساوى ٤

، $\because$ المقام = ٠ عند س = ٣ $\therefore$ البسط = ٠ عند س = ٣

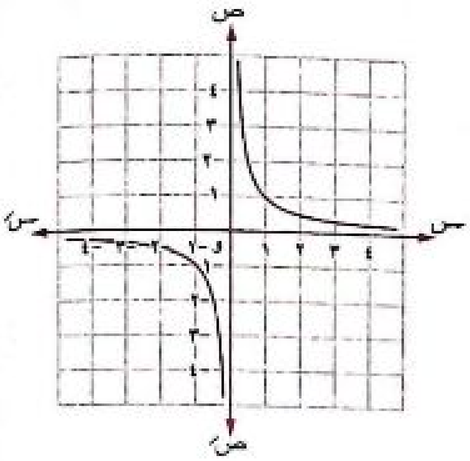
$\therefore$ د (٣) − ٧ = ٠ $\therefore$ د (٣) = ٧

، $\because$ د (س) كثيرة حدود $\therefore \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ د (س) = د (٣) = ٧

معلومة إثرائية

النهاية التى يعطى فيها التعويض المباشر $\frac{\text{عدد حقيقى} \neq \text{صفر}}{\text{صفر}}$ «كمية غير معرفة»

الشكل المقابل :



يمثل الدالة د : د (س) = $\frac{1}{س}$ بيانيًا ونلاحظ منه أن :

[1] $\lim_{س \to 0^+} \frac{1}{س} = \infty$

[2] $\lim_{س \to 0^-} \frac{1}{س} = -\infty$

[3] $\lim_{س \to 0} \frac{1}{س}$ غير موجودة لأن د $(0)^+ \neq$ د $(0)^-$

ومما سبق يمكن ايجاد نهايات أخرى التعويض المباشر

فيها يعطى $\frac{\text{عدد حقيقى} \neq \text{صفر}}{\text{صفر}}$ دون الاستعانة بالتمثيل البيانى كالتالى.

[1] $\lim_{س \to 2} \frac{1}{س - 2} = \lim_{(س-2) \to 0} \frac{1}{(س - 2)}$

$\lim_{(س-2) \to 0^+} \frac{1}{(س - 2)} = \infty$

$\lim_{(س-2) \to 0^-} \frac{1}{(س - 2)} = -\infty$

∴ النهاية اليمنى ≠ النهاية اليسرى.

∴ $\lim_{س \to 2} \frac{1}{س - 2}$ غير موجودة.

[2] $\lim_{س \to 0} \frac{1}{س^2}$

$\lim_{س \to 0^+} \left(\frac{1}{س}\right)^2 = \left(\lim_{س \to 0^+} \frac{1}{س}\right)^2 = (\infty)^2 = \infty$

$\lim_{س \to 0^-} \left(\frac{1}{س}\right)^2 = \left(\lim_{س \to 0^-} \frac{1}{س}\right)^2 = (-\infty)^2 = \infty$

∴ النهاية اليمنى = النهاية اليسرى. ∴ $\lim_{س \to 0} \frac{1}{س^2} = \infty$

[3] $\lim_{س \to -1} \frac{3س + 4}{س + 1}$

$= \lim_{س+1 \to 0} (3س + 4) \times \frac{1}{(س + 1)}$

$\lim_{(س+1) \to 0^+} (3س + 4) \times \frac{1}{(س + 1)} = 1 \times \infty = \infty$

$\lim_{(س+1) \to 0^-} (3س + 4) \times \frac{1}{(س + 1)} = 1 \times -\infty = -\infty$

∴ النهاية اليمنى ≠ النهاية اليسرى. ∴ $\lim_{س \to -1} \frac{3س + 4}{س + 1}$ غير موجودة.

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\underset{س \leftarrow \frac{1}{2}}{\text{نهـا}}$ (١٠) = ...

(أ) ٥ (ب) ٢٠ (جـ) ١٠ (د) $\frac{1}{2}$ ١٠

② $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \left(٢ س - \sqrt{س}\right)$ = ...

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٤ (د) ١٦

③ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ (٣ أ^{٢}) = ...

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٣ أ^{٢} (د) ١٢

④ $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ (٢ س^{٢} - أ س - أ^{٢}) = ... حيث أ ∈ ع

(أ) صفر (ب) أ (جـ) ٤ أ^{٢} (د) أ^{٢} - ٢ أ

⑤ $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{2}}{\text{نهـا}}$ (٢ س - جا س) = ...

(أ) π (ب) π + ١ (جـ) π - ١ (د) ٢ π - ١

⑥ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \sqrt{\frac{٣ + ٢ س}{٤ س - ١}}$ = ...

(أ) -٣ (ب) ١ (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) - $\frac{1}{2}$

⑦ $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{٢ س - ٦}{٧ س - ٢١}$ = ...

(أ) $\frac{2}{3}$ (ب) $\frac{2}{7}$ (جـ) $\frac{3}{7}$ (د) ٣

⑧ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} - س}{س}$ = ...

(أ) صفر (ب) -١ (جـ) غير موجودة. (د) ١

⑨ $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} - ٧ س + ١٢}{س - ٣}$ = ...

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) ٧ (د) -٢

(١٠) $\underset{س \to -١}{\text{نهــا}} \dfrac{س^{٢} + س}{س^{٢} + ١} = \dots\dots\dots$

(أ) صفر (ب) $-\frac{١}{٢}$ (جـ) -١ (د) ليس لها وجود.

(١١) 📖 $\underset{س \to ٢}{\text{نهــا}} \dfrac{س^{٢} - س - ٦}{س^{٢} + س - ١٢} = \dots\dots\dots$

(أ) $\frac{٥}{٧}$ (ب) $\frac{١}{٧}$ (جـ) -١ (د) -٥

(١٢) $\underset{س \to -٤}{\text{نهــا}} \dfrac{٣س^{٢} - ٤٨}{س + ٤} = \dots\dots\dots$

(أ) ٣٢ (ب) -٣٢ (جـ) ٢٤ (د) -٢٤

(١٣) $\underset{س \to ٢}{\text{نهــا}} \dfrac{س^{٢} + س - ٦}{س^{٢} - ٤} = \dots\dots\dots$

(أ) $\frac{٤}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٤}$ (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) $\frac{-٢}{٥}$

(١٤) $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{٣س + ٢س^{-١}}{س + ٤س^{-١}} = \dots\dots\dots$

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٤}$

(١٥) $\underset{س \to \sqrt{٥}}{\text{نهــا}} \dfrac{س^{٤} - س^{٢} - ٢٠}{س - \sqrt{٥}} = \dots\dots\dots$

(أ) ٩ (ب) $٢\sqrt{٥}$ (جـ) $٩\sqrt{٥}$ (د) $١٨\sqrt{٥}$

(١٦) $\underset{س \to ٤}{\text{نهــا}} \dfrac{(س - ٣)^{٢} - ١}{س - ٤} = \dots\dots\dots$

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٧) $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt{س + ١} - ١}{س} = \dots\dots\dots$

(أ) صفر (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ليس لها وجود.

(١٨) $\underset{س \to ٣}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt{س + ١} - ٢}{س - ٣} = \dots\dots\dots$

(أ) ٤ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) ٦ (د) $\frac{١}{٦}$

(١٩) $\underset{س \to ٩}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt{٢} - \sqrt{س - ٧}}{س - ٩} = \dots\dots\dots$

(أ) $٢\sqrt{٢}$ (ب) $\frac{\sqrt{٢}}{٤}$ (جـ) $\frac{-\sqrt{٢}}{٤}$ (د) $-٢\sqrt{٢}$

(٢٠) $\underset{س \to ١}{\text{نهــا}} \dfrac{٤ - \sqrt{س + ١٥}}{١ - س^{٢}} = \dots\dots\dots$

(أ) ٤ (ب) $\frac{١}{٨}$ (جـ) $\frac{١}{١٦}$ (د) -٤

(٢١) $\underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـــا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}} - ٢}{٥\,\text{س}^٢ - ٢٣\,\text{س} + ١٢} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) $\frac{١}{٩٢}$ (ب) $\frac{١}{٦٨}$ (جـ) ٦٨ (د) ٩٢

(٢٢) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \dfrac{(\text{س} - ٣)^٢ - ١}{\sqrt{\text{س} + ٢} - ٢} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) −٦ (ب) −٨ (جـ) −٢ (د) غير موجودة.

(٢٣) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \dfrac{\sqrt{٢\,\text{س} - ١} - ١}{\sqrt{٣\,\text{س} + ١} - ٢} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) ١ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

(٢٤) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \left(\dfrac{\text{س}^٣}{\text{س} - ١} - \dfrac{١}{\text{س} - ١} \right) = \dots\dots\dots\dots$

(أ) صفر (ب) −٣ (جـ) ٣ (د) غير موجودة.

(٢٥) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{س}^٢ - ٧\,\text{س} + ٦}{٣\,\text{س}^٢ - ٨\,\text{س} + ٤} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) $\frac{١}{٢}$

(٢٦) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \dfrac{٣\,(\text{س} - ٢)^٢ + ٢\,\text{س}^٢ - ٨}{\text{س} - ٢} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٨

(٢٧) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \dfrac{٧ + ٢\,\text{س}}{\text{جتا س}} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ١

(٢٨) 📖 $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{طا س}}{\text{س}} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) $\frac{٤}{\pi}$ (د) ليس لها وجود.

(٢٩) $\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـــا}} \text{د}(\text{س}) = ٤$ فإن : $\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـــا}} \left[\text{د}(\text{س}) - ٤ \right] = \dots\dots\dots\dots$

(أ) ٤ (ب) صفر (جـ) ٥ (د) ٨

(٣٠) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{س} - ٣}{\text{س} - ٢} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) −١ (ب) $\frac{-٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) ليس لها وجود.

(٣١) إذا كانت : $\underset{\text{س} \leftarrow \text{م}}{\text{نهـــا}} \dfrac{٢\,\text{س}^٢ - \text{س} - ٣}{٤\,\text{س}^٢ - ٩} = \dfrac{٥}{١٢}$ فإن : م = ...

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{-٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{-٢}{٣}$

(٣٢) إذا كانت : $\underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^2 + 3\text{س} - 4}{\text{س} + \text{أ}} = 5$ فإن : أ = ...

(أ) -١ (ب) ١ (جـ) صفر (د) ٤

(٣٣) 📖 إذا كانت : $\underset{\text{س} \leftarrow 2}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^2 - 4\text{أ}}{\text{س} - 2}$ لها وجود فإن : أ = ...

(أ) -١ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

(٣٤) إذا كان : $\underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^2 - 2\text{س} + \text{ك}}{\text{س}^2 - 9} = \text{م}$ حيث م ∈ ح فإن : ك × م = ...

(أ) $\frac{2}{3}$ (ب) -٣ (جـ) -٢ (د) -١

(٣٥) إذا كانت : $\underset{\text{س} \leftarrow -1}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^2 + \text{ك}\text{س} + \text{م}}{\text{س}^2 - 1} = 3$ فإن : ك + م = ...

(أ) -٤ (ب) -٥ (جـ) -٨ (د) -٩

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد كلاً مما يأتى :

(١) $\underset{\text{س} \leftarrow 5}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^2 - 25}{\text{س} - 5}$ «١٠»

(٢) $\underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^2 - 8\text{س} + 15}{\text{س} - 3}$ «-٢»

(٣) $\underset{\text{س} \leftarrow 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^2}{3\text{س}^3 - 2\text{س}^2}$ «$\frac{-1}{2}$»

(٤) $\underset{\text{س} \leftarrow 2}{\text{نها}} \dfrac{5\text{س} - 10}{4\text{س} - 8}$ «$\frac{5}{4}$»

(٥) $\underset{\text{س} \leftarrow 4}{\text{نها}} \dfrac{4\text{س}^2 - 64}{\text{س} - 4}$ «٣٢»

(٦) 📖 $\underset{\text{س} \leftarrow 4}{\text{نها}} \dfrac{2\text{س} - 8}{\text{س}^2 - \text{س} - 12}$ «$\frac{2}{7}$»

(٧) 📖 $\underset{\text{س} \leftarrow -3}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^2 + 4\text{س} + 3}{\text{س}^2 - 9}$ «$\frac{1}{3}$»

(٨) 📖 $\underset{\text{س} \leftarrow 2}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^2 - 2\text{س}}{\text{س}^2 - \text{س} - 2}$ «$\frac{2}{3}$»

(٩) $\underset{\text{س} \leftarrow -1}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^2 - 3\text{س} - 4}{\text{س}^2 - \text{س} - 2}$ «$\frac{5}{3}$»

(١٠) $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{1}{2}}{\text{نها}} \dfrac{2\text{س}^2 - 5\text{س} + 2}{2\text{س} - 1}$ «$\frac{-3}{2}$»

(١١) 📖 $\underset{\text{س} \leftarrow 9}{\text{نها}} \dfrac{9 - \text{س}}{\text{س}^2 - 81}$ «$-\frac{1}{18}$»

(١٢) 📖 $\underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{نها}} \dfrac{3\text{س}^2 + \text{س} - 4}{\text{س}^2 - 1}$ «$\frac{7}{2}$»

(١٣) $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{3}{4}}{\text{نها}} \dfrac{16\text{س}^2 - 9}{8\text{س} - 6}$ «٣»

(١٤) $\underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{نها}} \dfrac{2\text{س}^2 - 5\text{س} - 3}{2\text{س}^2 - 3\text{س} - 9}$ «$\frac{7}{9}$»

(١٥) $\underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^2 + 2\text{س} - 15}{5\text{س}^2 - 45}$ «$\frac{4}{15}$»

(١٦) $\underset{\text{س} \leftarrow 2}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^3 - 8}{3\text{س}^2 - 12}$ «١»

٢ أوجد كلاً مما يأتى :

(١) $\underset{\text{س} \leftarrow 0}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س} + 2)^2 - 4}{\text{س}^2 + \text{س}}$ «٤»

(٢) 📖 $\underset{\text{س} \leftarrow 0}{\text{نها}} \dfrac{(2\text{س} - 1)^2 - 1}{5\text{س}}$ «$\frac{-4}{5}$»

③ $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{(س - ٣)^٢ - ١}{٢ س^٢ - ٣ س - ٢}$ «$\frac{-٢}{٥}$»

④ $\lim\limits_{س \to -٢} \frac{(س + ٢)^٣ + ١}{٢ س^٢ + ٦ س}$ «$\frac{-١}{٢}$»

⑤ $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^٤ + س^٢ - ٢٠}{س - ٢}$ «٣٦»

⑥ $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{(س^٢ - ٤)^٢}{س - ٢}$ «صفر»

⑦ $\lim\limits_{س \to ١} \frac{٢ س - ٢}{(س - ١)^٥ + ٢ س - ٢}$ «١»

⑧ 📖 $\lim\limits_{س \to -٢} \frac{س + ٢}{س^٤ - ١٦}$ «$-\frac{١}{٣٢}$»

⑨ 📖 $\lim\limits_{س \to ٩} \frac{س + \sqrt{س} - ١٢}{س - ٩}$ «$\frac{٧}{٦}$»

⑩ 📖 $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\frac{١}{٢ + س} - \frac{١}{٢}}{س}$ «$-\frac{١}{٤}$»

⑪ $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^٤ - ٢ س^٣ - ٦ س + ١٢}{س^٢ + س - ٦}$ «$\frac{٢}{٥}$»

⑫ $\lim\limits_{س \to ٢} \left(\frac{٥}{س} + \frac{س^٢ - ٣ س}{س - ٣} \right)$ «$\frac{١٤}{٣}$»

⑬ $\lim\limits_{س \to -١} \left(\frac{س^٢}{س^٢ - ١} - \frac{٣ س + ٤}{س^٢ - ١} \right)$ «$\frac{٥}{٢}$»

⑭ 📖 $\lim\limits_{س \to ١} \left(\frac{١}{س - ١} - \frac{٢}{س^٢ - ١} \right)$ «١»

---

③ أوجد كلاً مما يأتى :

① $\lim\limits_{س \to ٤} \frac{س^٣ - ١٥ س - ٤}{س - ٤}$ «٣٣»

② $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^٣ - ٢ س + ١}{س^٢ + س - ٢}$ «$\frac{١}{٣}$»

③ $\lim\limits_{س \to ٤} \frac{س^٤ - ٢١ س^٢ + ٢٠ س}{س - ٤}$ «١٠٨»

④ $\lim\limits_{س \to -٢} \frac{٢ س^٣ + ٣ س^٢ + ٤}{س^٣ + ٨}$ «١»

⑤ 📖 $\lim\limits_{س \to -٢} \frac{س^٢ + ٤ س + ٤}{س^٣ + س^٢ - ٨ س - ١٢}$ «$-\frac{١}{٥}$»

⑥ $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^٣ - ٥ س^٢ + ٧ س - ٣}{س^٣ - ٢ س^٢ + س}$ «-٢»

---

④ أوجد كلاً مما يأتى :

① $\lim\limits_{س \to ٩} \frac{\sqrt{س} - ٣}{س - ٩}$ «$\frac{١}{٦}$»

② 📖 $\lim\limits_{س \to ٥} \frac{\sqrt{س - ١} - ٢}{س - ٥}$ «$\frac{١}{٤}$»

③ 📖 $\lim\limits_{س \to -١} \frac{س + ١}{\sqrt{س + ٥} - ٢}$ «٤»

④ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\sqrt{٣ - ٢ س} - \sqrt{٣}}{س}$ «$-\frac{١}{\sqrt{٣}}$»

⑤ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\sqrt{٢ س + ٩} - ٣}{س^٢ + س}$ «$\frac{١}{٣}$»

⑥ 📖 $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{س^٢ - ٥ س}{\sqrt{س + ٤} - ٢}$ «٢٠»

⑦ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ - س - ٦}{\sqrt{٥س - ٦} - ٢}$ «٦»

⑧ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{١ + س} - \sqrt{١ - س}}{٢س}$ «$\frac{١}{٢}$»

⑨ $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س - ١}{\sqrt{٣س - ٢} - \sqrt{س}}$ «١»

⑩ 📖 $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س^٢ + ٨} - ٣}{س + ١}$ «$-\frac{١}{٣}$»

⑪ $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{١ - س}{٢ - \sqrt{س^٢ + ٣}}$ «٢»

⑫ $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س + ١} - ٢}{\sqrt{س - ٢} - ١}$ «$\frac{١}{٢}$»

⑬ $\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٢٤ - ٥س} - ٢}{٣ - \sqrt{س + ٥}}$ «٧,٥»

⑭ $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{س - ٣}{س - \sqrt{س + ٦}}$ «$\frac{٦}{٥}$»

---

٥ 📖 إذا كانت : $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{د(س) - ٥}{س - ٢} = ١$ حيث د (س) كثيرة حدود فأوجد : $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} د(س)$ «٥»

---

٦ 📖 إذا كانت : $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{د(س)}{س^٢} = ٥$ فأوجد :

① $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} د(س)$ ② $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{د(س)}{س}$ «صفر ، صفر»

---

٧ إذا كانت : $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ - (أ - ١)س - أ}{س + ١} = ٤$ أوجد : قيمة أ «-٥»

---

٨ إذا كانت : $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ + أس + ب}{س - ١} = ٥$ أوجد : قيمة كل من أ ، ب «٣ ، -٤»

---

٩ 📖 الربط بالتجارة : وجدت شركة أنها لو أنفقت س من الجنيهات للدعاية لمنتجها ، فإن ربحها يعطى بالعلاقة $د(س) = ٢,٠ س^٢ + ٤٠ س + ١٥٠$ ، أوجد مقدار ربح الشركة عندما يقترب إنفاقها على الدعاية من ١٠٠ جنيه. «٦١٥٠ جنيهًا»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت د دالة تحقق أن : $س\left(د(س) + ١\right) = د(س) + س^٢$

فإن : $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} د(س) =$ ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) صفر

② إذا كانت : $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{م س + ك} - ٣}{س} = ٢$ فإن : $\frac{م}{ك} =$ ....

(أ) ٨ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) $\frac{٤}{٣}$

③ إذا كانت : $\underset{\text{س}\to\text{م}}{\text{نهـا}} \left(٢\,\text{د}(\text{س}) - ٥\,\text{هـ}(\text{س})\right) = ١٠$

، $\underset{\text{س}\to\text{م}}{\text{نهـا}} \left(\text{د}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س})\right) = ٦$ فإن : $\underset{\text{س}\to\text{م}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{د}(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})} =$ ....

(أ) $\frac{٤٠}{٧}$ (ب) $\frac{٢}{٧}$ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

④ إذا كانت : ع (س) دالة وكانت $\underset{\text{س}\to٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ع}(\text{س}) - ٨}{\text{س} - ٢} = ٧$

فإن : $\underset{\text{س}\to٢}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\,\text{س}^{٢} - \text{ع}(\text{س})}{\text{س} - ٢} =$ ....

(أ) ١ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ١٥

٢ أوجد كلاً مما يأتى :

① $\underset{\text{س}\to٥}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{\text{س}^{٢} - ٤\,\text{س} - ٥}{\text{س}^{٢} - ٦\,\text{س} + ٥}\right)^{٢}$ «$\frac{٩}{٤}$»

② $\underset{\text{س}\to١}{\text{نهـا}} \sqrt{\dfrac{\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س} - ٣}{\text{س}^{٢} - \text{س}}}$ «٢»

③ $\underset{\text{س}\to\sqrt{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٢}{\text{س}^{٢} + \sqrt{٢}\,\text{س} - ٤}$ «$\frac{٢}{٣}$»

④ $\underset{\text{س}\to١}{\text{نهـا}} \dfrac{٥\,\text{س}^{-٢} + ٢\,\text{س}^{-١} - ٧}{٣\,\text{س}^{-٢} + \text{س}^{-٢} - ٤}$ «$\frac{١٧}{٩}$»

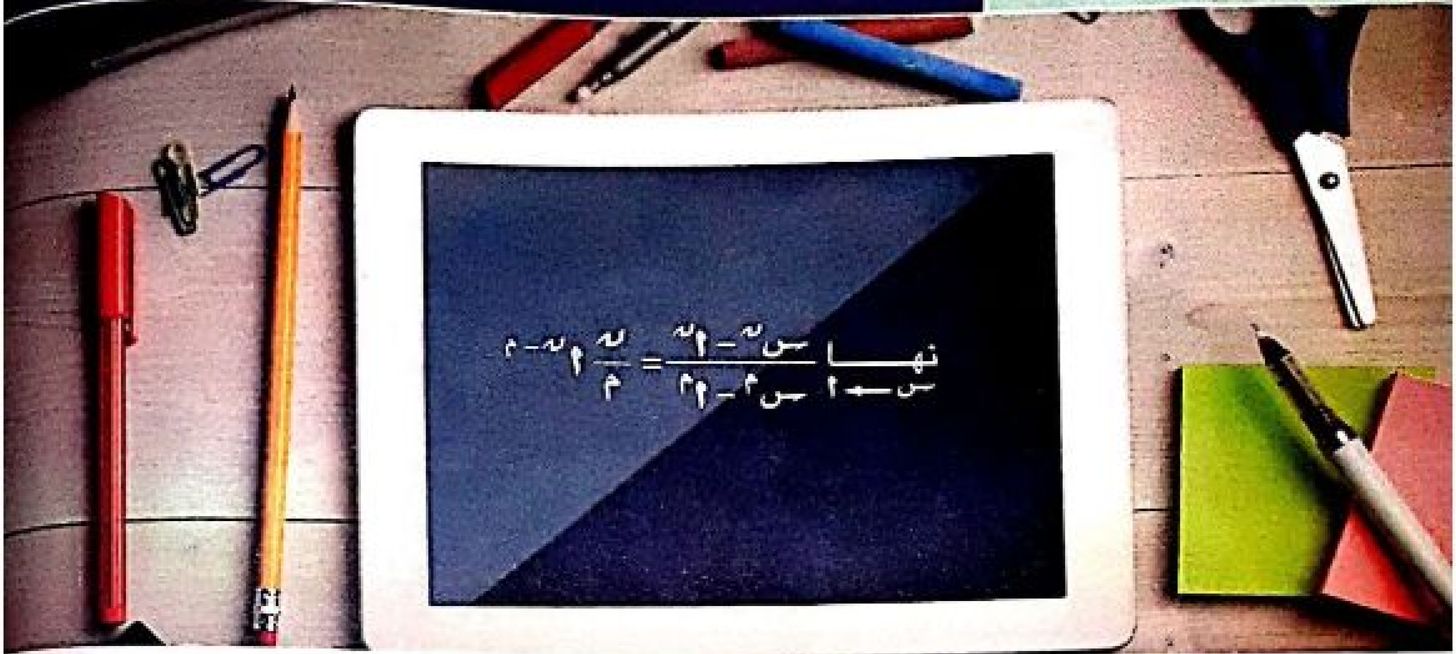
⑤ $\underset{\text{طا س}\to٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{طا}^{٢}\,\text{س} - ٢\,\text{طا س} - ٣}{\text{طا}^{٢}\,\text{س} - ٤\,\text{طا س} + ٣}$ «٢»

⑥ $\underset{\text{س}\to٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{حتا}^{٢}\,\text{س} - ٥\,\text{حتا س} + ٤}{\text{حا}^{٢}\,\text{س}}$ «$\frac{٣}{٢}$»

⑦ $\underset{(\text{س}-٤)\to٤}{\text{نهـا}} \dfrac{(\sqrt[٣]{\text{س}} - ٢)\left(\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{\text{س}} + ٤\right)}{\text{س}^{٢} - ٦٤}$ «$\frac{١}{١٦}$»

⑧ $\underset{\text{س}\to١}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٣} + ٢}{\text{س}^{٢} - \text{س}} - \dfrac{٢}{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٣} - ٢}\right)$ «−٢»

الدرس 3 نظرية (٤) «القانون»



نظرية ٤

$$\underset{س \to أ}{\text{نهــا}} \frac{س^ن - أ^ن}{س - أ} = ن أ^{ن-١} \quad \text{لكل } ن \in ح - \{٠\}$$

ولاستخدام هذه النظرية يراعى الآتى :

١ أن تكون الدالة على الصورة (أو يمكن وضعها على الصورة) $\frac{س^ن - أ^ن}{س - أ}$

٢ أن يكون المطلوب إيجاد النهاية عندما $س \to أ$

مثال ١

أوجد كلاً مما يأتى :

١ $\underset{س \to ٣}{\text{نهــا}} \frac{س^٤ - ٨١}{س - ٣}$

٢ $\underset{س \to \sqrt{٥}}{\text{نهــا}} \frac{س^٧ - ١٢٥\sqrt{٥}}{س - \sqrt{٥}}$

٣ $\underset{س \to -٢}{\text{نهــا}} \frac{س^٥ + ٣٢}{س^٢ + ٥س + ٦}$

٤ $\underset{س \to \frac{١}{٢}}{\text{نهــا}} \frac{٣٢س^٥ - ١}{٢س - ١}$

الحـل

١ $\underset{س \to ٣}{\text{نهــا}} \frac{س^٤ - ٨١}{س - ٣} = \underset{س \to ٣}{\text{نهــا}} \frac{س^٤ - ٣^٤}{س - ٣} = ٤ \times ٣^٣ = ١٠٨$

لاحظ أنه : عند التعويض المباشر نجد أن : د (٣) = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

٢ $\underset{س \to \sqrt{٥}}{\text{نهــا}} \frac{س^٧ - ١٢٥\sqrt{٥}}{س - \sqrt{٥}} = \underset{س \to \sqrt{٥}}{\text{نهــا}} \frac{س^٧ - (\sqrt{٥})^٧}{س - \sqrt{٥}} = ٧ \times (\sqrt{٥})^٦ = ٨٧٥$

٣ $\underset{س \to -٢}{\text{نهــا}} \frac{س^٥ - ٣٢}{(س + ٢)(س + ٢)} = \underset{س \to -٢}{\text{نهــا}} \frac{س^٥ - (-٣٢)}{س - (-٢)} \times \underset{س \to -٢}{\text{نهــا}} \frac{١}{س + ٢}$

$= \underset{س \to -٢}{\text{نهــا}} \frac{س^٥ - (-٢)^٥}{س - (-٢)} \times ١ = ٥ \times (-٢)^٤ = ٨٠$

٤ $\lim\limits_{س \to \frac{1}{2}} \frac{٣٢ س^٥ - ١}{٢ س - ١} = \lim\limits_{س \to \frac{1}{2}} \frac{٣٢ \left[س^٥ - \frac{1}{٣٢}\right]}{٢ \left[س - \frac{1}{2}\right]} = ١٦ \times \lim\limits_{س \to \frac{1}{2}} \frac{س^٥ - \left(\frac{1}{2}\right)^٥}{س - \frac{1}{2}}$

$= ١٦ \lim\limits_{س \to \frac{1}{2}} \frac{س^٥ - \left(\frac{1}{2}\right)^٥}{س - \frac{1}{2}} = ١٦ \times ٥ \times \left(\frac{1}{2}\right)^٤ = ٥$

حل آخر :

عندما س ← $\frac{1}{2}$ فإن : ٢ س ← ١

$\therefore \lim\limits_{س \to \frac{1}{2}} \frac{٣٢ س^٥ - ١}{٢ س - ١} = \lim\limits_{٢س \to ١} \frac{(٢ س)^٥ - (١)^٥}{٢ س - ١} = ٥ \times ١^٤ = ٥$

حل ثالث :

بوضع ٢ س = ص فعندما س ← $\frac{1}{2}$ فإن : ص ← ١

$\therefore \lim\limits_{س \to \frac{1}{2}} \frac{٣٢ س^٥ - ١}{٢ س - ١} = \lim\limits_{س \to \frac{1}{2}} \frac{(٢ س)^٥ - (١)^٥}{(٢ س) - ١}$

$= \lim\limits_{ص \to ١} \frac{(ص)^٥ - (١)^٥}{ص - ١} = ٥ \times ١^٤ = ٥$

نتيجتان

١ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{(س + أ)^ن - أ^ن}{س} = ن أ^{ن - ١}$

٢ $\lim\limits_{س \to أ} \frac{س^ن - أ^ن}{س^م - أ^م} = \frac{ن}{م} أ^{ن - م}$ حيث ن ∈ ح - {٠} ، م ∈ ح - {٠}

مثال ٢

أوجد كلاً مما يأتي :

١ $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^٥ - ١}{س^٣ - ١}$

٢ $\lim\limits_{س \to -٣} \frac{س^٥ + ٢٤٣}{س^٤ - ٨١}$

٣ $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{س^٤ - ٢٧ س}{٣ س^٤ - ٢٤٣}$

٤ $\lim\limits_{س \to ١} \frac{(س + ١)^٦ - ٦٤}{(س + ١)^٣ - ٨}$

الحل

١ $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^٥ - ١}{س^٣ - ١} = \lim\limits_{س \to ١} \frac{س^٥ - ١^٥}{س^٣ - ١^٣} = \frac{٥}{٣} \times ١^{٥ - ٣} = \frac{٥}{٣}$

٢ $\lim\limits_{س \to -٣} \frac{س^٥ + ٢٤٣}{س^٤ - ٨١} = \lim\limits_{س \to -٣} \frac{س^٥ - (-٣)^٥}{س^٤ - (-٣)^٤} = \frac{٥}{٤} \times (-٣)^{٥ - ٤} = -\frac{١٥}{٤}$

٣ $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٤ - ٢٧س}{٣س^٤ - ٢٤٣} = \lim_{س \to ٣} \frac{س(س^٣ - ٢٧)}{٣(س^٤ - ٨١)} = \lim_{س \to ٣} \frac{س}{٣} \times \lim_{س \to ٣} \frac{س^٣ - ٣^٣}{س^٤ - ٣^٤}$

$= \frac{٣}{٣} \times \frac{٣}{٤} \times ٣^{٣-٤} = \frac{١}{٤}$

٤ ∵ س ⟵ ١ ∴ س + ١ ⟵ ٢

∴ $\lim_{س \to ١} \frac{(س+١)^٦ - ٦٤}{(س+١)^٣ - ٨} = \lim_{س+١ \to ٢} \frac{(س+١)^٦ - ٢^٦}{(س+١)^٣ - ٢^٣} = \frac{٦}{٣} \times ٢^{٦-٣} = ١٦$

حل آخر :

بتحليل البسط كفرق بين مربعين :

∴ $\lim_{س \to ١} \frac{(س+١)^٦ - ٦٤}{(س+١)^٣ - ٨} = \lim_{س \to ١} \frac{[(س+١)^٣ - ٨][(س+١)^٣ + ٨]}{(س+١)^٣ - ٨}$

$= \lim_{س \to ١} \left((س+١)^٣ + ٨\right) = (١ + ١)^٣ + ٨ = ١٦$

مثال ٣

أوجد كلاً مما يأتي :

١ $\lim_{س \to ٠} \frac{(س+٥)^٤ - ٦٢٥}{س}$ ٢ $\lim_{س \to ٦} \frac{(س-٥)^٧ - ١}{س - ٦}$ ٣ $\lim_{هـ \to ٠} \frac{(أ + ٢هـ)^٦ - أ^٦}{٥هـ}$

الحل

١ $\lim_{س \to ٠} \frac{(س+٥)^٤ - ٦٢٥}{س} = \lim_{س \to ٠} \frac{(س+٥)^٤ - ٥^٤}{س} = ٤ \times ٥^٣ = ٥٠٠$

٢ $\lim_{س \to ٦} \frac{(س-٥)^٧ - ١}{س - ٦} = \lim_{س - ٥ \to ١} \frac{(س-٥)^٧ - ١^٧}{(س-٥) - ١} = ٧ \times ١^٦ = ٧$

٣ $\lim_{هـ \to ٠} \frac{(أ + ٢هـ)^٦ - أ^٦}{٥هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{\frac{٢}{٥}[(أ + ٢هـ)^٦ - أ^٦]}{\frac{٢}{٥} \times ٥هـ} = \lim_{٢هـ \to ٠} \frac{\frac{٢}{٥}[(أ + ٢هـ)^٦ - أ^٦]}{٢هـ}$

$= \frac{٢}{٥} \times ٦ \times أ^٥ = \frac{١٢}{٥} أ^٥$

ملاحظتان

- $\sqrt[ن]{أ} = أ^{\frac{١}{ن}}$ حيث ن ∈ ص$^+$ - {١} ، أ ∈ ح$^+$

فمثلاً : $\sqrt{س} = س^{\frac{١}{٢}}$ ، $\sqrt[٣]{٨} = ٨^{\frac{١}{٣}} = ٢$

- $\sqrt[ن]{أ^م} = أ^{\frac{م}{ن}}$ حيث ن ∈ ص$^+$ - {١} ، أ ∈ ح$^+$ ، م ∈ ص

فمثلاً : $\sqrt[٤]{س^٥} = س^{\frac{٥}{٤}}$ ، $\sqrt[٥]{٦٤} = \sqrt[٥]{٢^٦} = ٢^{\frac{٦}{٥}}$

مثال ٤

أوجد كلاً مما يأتي :

[١] $\lim\limits_{\text{س} \to ٩} \dfrac{\sqrt{\text{س}} - ٣}{\text{س} - ٩}$

[٢] $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \dfrac{\sqrt[٥]{\text{س}} - ١}{\sqrt[٣]{\text{س}} - ١}$

[٣] $\lim\limits_{\text{س} \to ١٦} \dfrac{\sqrt[٤]{\text{س}^{٥}} - ٣٢}{\sqrt{\text{س}^{٣}} - ٦٤}$

الحل

[١] $\lim\limits_{\text{س} \to ٩} \dfrac{\sqrt{\text{س}} - ٣}{\text{س} - ٩} = \lim\limits_{\text{س} \to ٩} \dfrac{\text{س}^{\frac{١}{٢}} - ٩^{\frac{١}{٢}}}{\text{س} - ٩} = \dfrac{١}{٢} \times ٩^{\frac{١}{٢} - ١} = \dfrac{١}{٢} \times ٩^{-\frac{١}{٢}} = \dfrac{١}{٢\sqrt{٩}} = \dfrac{١}{٦}$

حل آخر :

بتحليل المقام كفرق بين مربعين :

$\therefore \lim\limits_{\text{س} \to ٩} \dfrac{\sqrt{\text{س}} - ٣}{\text{س} - ٩} = \lim\limits_{\text{س} \to ٩} \dfrac{\sqrt{\text{س}} - ٣}{(\sqrt{\text{س}} - ٣)(\sqrt{\text{س}} + ٣)} = \lim\limits_{\text{س} \to ٩} \dfrac{١}{(\sqrt{\text{س}} + ٣)}$

$= \dfrac{١}{\sqrt{٩} + ٣} = \dfrac{١}{٦}$

[٢] $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \dfrac{\sqrt[٥]{\text{س}} - ١}{\sqrt[٣]{\text{س}} - ١} = \lim\limits_{\text{س} \to ١} \dfrac{\text{س}^{\frac{١}{٥}} - ١^{\frac{١}{٥}}}{\text{س}^{\frac{١}{٣}} - ١^{\frac{١}{٣}}} = \dfrac{\frac{١}{٥}}{\frac{١}{٣}} \times ١^{\frac{١}{٥} - \frac{١}{٣}} = \dfrac{٣}{٥}$

[٣] $\lim\limits_{\text{س} \to ١٦} \dfrac{\sqrt[٤]{\text{س}^{٥}} - ٣٢}{\sqrt{\text{س}^{٣}} - ٦٤} = \lim\limits_{\text{س} \to ١٦} \dfrac{\text{س}^{\frac{٥}{٤}} - (١٦)^{\frac{٥}{٤}}}{\text{س}^{\frac{٣}{٢}} - (١٦)^{\frac{٣}{٢}}}$

$= \dfrac{\frac{٥}{٤}}{\frac{٣}{٢}} \times ١٦^{\left(\frac{٥}{٤} - \frac{٣}{٢}\right)}$

$= \dfrac{٥}{٦} \times ١٦^{-\frac{١}{٤}} = \dfrac{٥}{١٢}$

> **لاحظ أن**
>
> $١٦^{\frac{٥}{٤}} = (٢^{٤})^{\frac{٥}{٤}} = ٢^{٤ \times \frac{٥}{٤}}$
>
> $= ٢^{٥} = ٣٢$
>
> **أي أن** $٣٢ = ١٦^{\frac{٥}{٤}}$
>
> وكذلك : $٦٤ = ١٦^{\frac{٣}{٢}}$

مثال ٥

أوجد كلاً مما يأتي :

[١] $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \dfrac{\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} - ٣٦}{\text{س}^{٤} - ٨١}$

[٢] $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \dfrac{\sqrt[٤]{٢\text{س} + ١٤} - ٢}{\text{س} - ١}$

[٣] $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\sqrt[٣]{٣\text{س} + ٢} - ٢}{\sqrt[٥]{\text{س} - ٣} + ١}$

الحـــل

١

$$\lim_{س \to ٣} \frac{س^٣ + س^٢ - ٣٦}{س^٤ - ٨١} = \lim_{س \to ٣} \frac{س^٣ - ٢٧ + س^٢ - ٩}{س^٤ - ٨١}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{س^٣ - ٣^٣}{س^٤ - ٣^٤} + \lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٣^٢}{س^٤ - ٣^٤}$$

$$= \frac{٣}{٤} \times ٣^{٣-٤} + \frac{٢}{٤} \times ٣^{٢-٤} = \frac{١}{٤} + \frac{١}{١٨} = \frac{١١}{٣٦}$$

٢

$$\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٤]{٢س + ١٤} - ٢}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{(٢س + ١٤)^{\frac{١}{٤}} - (١٦)^{\frac{١}{٤}}}{س - ١} \times \frac{٢}{٢}$$

$$= ٢ \lim_{٢س + ١٤ \to ١٦} \frac{(٢س + ١٤)^{\frac{١}{٤}} - (١٦)^{\frac{١}{٤}}}{(٢س + ١٤) - ١٦}$$

$$= ٢ \times \frac{١}{٤} (١٦)^{\frac{١}{٤} - ١} = \frac{١}{١٦}$$

٣

$$\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt[٣]{٣س + ٢} - ٢}{\sqrt[٥]{س - ٣} + ١} = \lim_{س \to ٢} \frac{(٣س + ٢)^{\frac{١}{٣}} - ٨^{\frac{١}{٣}}}{٣س + ٢ - ٨} \times \frac{٣س + ٢ - ٨}{(س - ٣)^{\frac{١}{٥}} + ١}$$

$$= \lim_{٣س + ٢ \to ٨} \frac{(٣س + ٢)^{\frac{١}{٣}} - ٨^{\frac{١}{٣}}}{(٣س + ٢) - ٨} \times \lim_{س \to ٢} \frac{٣(س - ٢)}{(س - ٣)^{\frac{١}{٥}} + ١}$$

$$= \frac{١}{٣} \times ٨^{\frac{١}{٣} - ١} \times ٣ \lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{(س - ٣)^{\frac{١}{٥}} - (-١)^{\frac{١}{٥}}}$$

$$= \frac{١}{٤} \lim_{س - ٣ \to -١} \frac{(س - ٣) - (-١)}{(س - ٣)^{\frac{١}{٥}} - (-١)^{\frac{١}{٥}}} = \frac{١}{٤} \times \frac{١}{\frac{١}{٥}} \times (-١)^{١ - \frac{١}{٥}} = \frac{٥}{٤}$$

أولاً / أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① 📖 $\lim_{س \to أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} = ...$

(أ) $\frac{م}{ن}$ (ب) $\frac{م}{ن} (أ)^{م - ن}$ (جـ) $\frac{ن}{م} (أ)^{م - ن}$ (د) $\frac{ن}{م} (أ)^{ن - م}$

② $\lim_{ص \to ٢} \frac{ص^{٥} - ٣٢}{ص - ٢} = ...$

(أ) $٣١ ص^{٤}$ (ب) ٣٢×٢^{٤} (جـ) ٦٤ (د) ٥×٢^{٤}

③ $\lim_{س \to ١} \frac{س^{١٠} - ١}{س - ١} = ...$

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٩ (د) ١٠

④ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{-١} - ٢^{-١}}{س^{-٤} - ٢^{-٤}} = ...$

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٣٢}$ (د) ٨

⑤ $\lim_{س \to -١} \frac{س^{٥} + ١}{س + ١} = ...$

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) −٥ (د) −٤

⑥ 📖 $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٥} - ٣٢}{س^{٣} - ٨} = ...$

(أ) ٤ (ب) $\frac{٥}{٢}$ (جـ) صفر (د) $٦\frac{٢}{٣}$

⑦ $\lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{٤ س^{٢} - ١}{٣٢ س^{٥} - ١} = ...$

(أ) $\frac{٢}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٩}$ (د) $\frac{١}{٨}$

⑧ $\lim_{س \to -٢} \frac{س^{٧} + ١٢٨}{س^{٤} - ١٦} = ...$

(أ) ٩ (ب) −٩ (جـ) −١٤ (د) ١٤

⑨ $\lim_{س \to ١٦} \frac{\sqrt[٤]{س^{٥}} - ٣٢}{س - ١٦} = ...$

(أ) ٥ (ب) $\frac{٥}{٢}$ (جـ) $\frac{٥}{٤}$ (د) $\frac{٥}{٨}$

(١٠) $\lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{(س + هـ)^{٧} - س^{٧}}{هـ}$ = ...

(أ) $س^{٧}$ (ب) $٧ س^{٦}$ (جـ) صفر (د) ١

(١١) $\lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{(٢ - ٢هـ)^{٧} - ١٢٨}{٤ هـ}$ = ...

(أ) ٣٣٦ (ب) −٣٣٦ (جـ) ٤٤٨ (د) −٤٤٨

(١٢) $\lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{(٢هـ - ١)^{٥} + ١}{٥ هـ}$ = ...

(أ) −٣ (ب) $\frac{٣}{٥}$ (جـ) ٣ (د) ٥

(١٣) $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^{٦} - ٦٤}{س - ٢}$ = ...

(أ) $٦ (٢)^{٥}$ (ب) ١٢٨ (جـ) $٦٤ (٢)^{٥}$ (د) ٦٣

(١٤) $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^{\frac{١٣}{٢}} - س^{\frac{١}{٢}}}{س^{\frac{٧}{٢}} - س^{\frac{١}{٢}}}$ = ...

(أ) $\frac{١٣}{٧}$ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) س

(١٥) $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^{٢} - س^{-٢}}{س - س^{-١}}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) −٢

(١٦) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{(س + ٢)^{٥} - ٣٢}{س}$ = ...

(أ) ٢٥ (ب) ٦٤ (جـ) ٨٠ (د) ١٠٠

(١٧) $\lim\limits_{س \to ٥} \frac{(س - ٣)^{٧} - ١٢٨}{س - ٥}$ = ...

(أ) ٧ (ب) ٢٨ (جـ) ٦٤ (د) ٤٤٨

(١٨) $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{(س + ١)^{٤} - ٨١}{س - ٢}$ = ...

(أ) ١٨ (ب) ٨١ (جـ) −١٠٨ (د) ١٠٨

(١٩) $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^{أ} - س^{جـ}}{س^{أ} - س^{ء}}$ = ...

(أ) $\frac{أ + جـ}{أ + ء}$ (ب) $أ س^{جـ - ء}$ (جـ) $\frac{أ - جـ}{أ - ء}$ (د) $\frac{جـ}{ء}$

(٢٠) $\lim\limits_{س \to ١} \frac{١ - \sqrt[ن]{س}}{١ - \sqrt[م]{س}}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{ن}{م}$ (جـ) −١ (د) $\frac{م}{ن}$

(٢١) $\lim\limits_{\text{س} \to ٩} \dfrac{٣ - \sqrt{\text{س}}}{٢٧ - \sqrt{\text{س}^٣}} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) $\frac{١}{٩}$ (ب) $\frac{١}{٢٧}$ (جـ) ٣ (د) $\frac{-١}{٢٧}$

(٢٢) $\lim\limits_{\text{س} \to -٢} \dfrac{(\text{س} + ٣)^٥ - ١}{\text{س}^٢ - ٤} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) $-\frac{٥}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $-\frac{١}{٤}$

(٢٣) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\text{س}^٥ - ٣٢}{\text{س}^٢ + ٣\text{س} - ١٠} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) ٨٠ (ب) $\frac{٨٠}{٧}$ (جـ) $\frac{٧}{٨٠}$ (د) $\frac{١}{٨٠}$

(٢٤) $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \dfrac{\sqrt[٤]{\text{س}} + ٢\sqrt{\text{س}} - ٣}{\text{س} - ١} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) $\frac{٦}{٥}$ (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) ٣

(٢٥) إذا كان : $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^٥$ ، $\text{ر}(\text{س}) = \text{س}^٢ - ٤$

فإن : $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\text{د}(\text{س}) - ٣٢}{\text{ر}(\text{س})} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) −٢٠ (ب) ٢٠ (جـ) ± ٢٠ (د) ٣٢

(٢٦) إذا كان : $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \dfrac{\text{س}^\text{ن} - \text{أ}^\text{ن}}{\text{س}^\text{م} - \text{أ}^\text{م}} = \dfrac{\text{ن}}{\text{م}}$ فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ن (جـ) م (د) $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$

(٢٧) إذا كانت : $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{(\text{س})^\text{ن} - (٢)^\text{ن}}{\text{س} - ٢} = ٣٢$ فإن : ن = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٩ (د) ١٢

(٢٨) إذا كانت : $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \dfrac{\text{س}^٨ - \text{أ}^٨}{\text{س}^٦ - \text{أ}^٦} = ٤٨$ فإن : أ = ...

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ± ٤ (د) ± ٦

(٢٩) $\lim\limits_{\text{س} \to ٥} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س} + ٣} - ٢}{\text{س} - ٥} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) $\frac{١}{١٢}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) ١

(٣٠) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{(١ + \text{س})^{\frac{٥}{٢}} - ١}{\text{س}} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) $\frac{٥}{٢}$ (ب) صفر (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) ليس لها وجود.

(٣١) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{(\text{س} + ٢)^٦ - ٦٤}{\text{س}^٢ + ١٦\text{س}} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) ٦ (ب) ١٢ (جـ) ١٦ (د) ٦٤

(٣٢) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{س}^{٦} - \text{س}^{٧} + \text{س}^{٨} - \text{س}^{٩}}{\text{س} - ١} \right) = \dots\dots\dots$

(أ) ٣٠ (ب) −٢ (ج) ٣ (د) ٩

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد كلاً مما يأتى :

(١) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٣} - ٨}{\text{س} - ٢}$ «١٢»

(٢) 📖 $\underset{\text{س}\to -٥}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٤} - ٦٢٥}{\text{س} + ٥}$ «−٥٠٠»

(٣) $\underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٥} - \text{أ}^{٥}}{\text{س} - \text{أ}}$ «٥ $\text{أ}^{٤}$»

(٤) 📖 $\underset{\text{س}\to -٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٤} - ٨١}{\text{س}^{٥} + ٢٤٣}$ «$-\frac{٤}{١٥}$»

(٥) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٦} - ٦٤}{\text{س}^{٧} - ١٢٨}$ «$\frac{٣}{٧}$»

(٦) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{٢\,\text{س}^{٦} - ١٢٨}{\text{س}^{٢} - ٤}$ «٩٦»

(٧) $\underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٦} - ٦٤}{٣\,\text{س} + ٦}$ «−٦٤»

(٨) $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{١٠} + \text{س}}{\text{س}^{٧} - \text{س}}$ «$\frac{-٣}{٢}$»

(٩) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{س}^{٩}}{\text{س}^{٧} - ١}$ «$\frac{-٩}{٧}$»

(١٠) $\underset{\text{س}\to -\frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{٣٢\,\text{س}^{٥} + ١}{٦٤\,\text{س}^{٦} - ١}$ «$\frac{-٥}{٦}$»

(١١) $\underset{\text{س}\to \frac{-٢}{٣}}{\text{نهـا}} \frac{٢٤٣\,\text{س}^{٥} + ٣٢}{٢٧\,\text{س}^{٣} + ٨}$ «$\frac{٢٠}{٣}$»

(١٢) $\underset{٢\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \frac{١٦\,\text{س}^{٥} - ٨١\,\text{س}}{٢\,\text{س}^{٣} - ٣\,\text{س}^{٢}}$ «٧٢»

٢ أوجد كلاً مما يأتى :

(١) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{-٧} - (٢)^{-٧}}{\text{س} - ٢}$ «$\frac{-٧}{٢٥٦}$»

(٢) $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{-٤} - ١}{\text{س}^{-١٨} - ١}$ «$\frac{٢}{٩}$»

(٣) $\underset{\text{س}\to \sqrt{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٧} - ٨\sqrt{٢}}{\text{س}^{٢} - ٢}$ «$١٤\sqrt{٢}$»

(٤) $\underset{\text{س}\to -\sqrt{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٨} - ١٦}{\text{س}^{٥} + ٤\sqrt{٢}}$ «$\frac{-١٦\sqrt{٢}}{٥}$»

(٥) $\underset{\text{س}\to \frac{-٣}{\sqrt{٢}}}{\text{نهـا}} \frac{٨\,\text{س}^{٦} - ٧٢٩}{\sqrt{٢}\,\text{س} + ٣}$ «−١٤٥٨»

(٦) $\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٦}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^{٣}\text{س} - \frac{١}{٨}}{\text{جا}\,\text{س} - \frac{١}{٢}}$ «$\frac{٣}{٤}$»

(٧) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{-٥} - \frac{١}{٣٢}}{\text{س}^{-٧} - \frac{١}{١٢٨}}$ «$\frac{٢٠}{٧}$»

(٨) $\underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهـا}} \frac{٨\,\text{س}^{-٣} + ١}{\text{س}^{-٨} - \frac{١}{٢٥٦}}$ «−٩٦»

(٩) 📖 $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{-٨} - (١٦)^{-٢}}{\text{س} - ٢}$ «$\frac{-١}{٦٤}$»

(١٠) $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{\frac{٧}{٢}} - ١٢٨}{\text{س}^{\frac{٥}{٢}} - ٣٢}$ «$\frac{٢٨}{٥}$»

(١١) 📖 $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٧]{\text{س}} - ١}{\text{س} - ١}$ «$\frac{١}{٧}$»

(١٢) $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س}^{٣}} - ٨}{\text{س}^{٢} - ١٦}$ «$\frac{٣}{٨}$»

(١٣) 📖 $\underset{\text{س}\to ١٦}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٤]{\text{س}^{٧}} - ١٢٨}{\text{س} - ١٦}$ «١٤»

(١٤) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}\sqrt[٥]{\text{س}} - ١}{\text{س}^{٢} - ١}$ «$\frac{٣}{٥}$»

(١٥) $\lim\limits_{س \to ١} \dfrac{س^{\frac{٢١}{٢}} - س^{\frac{١}{٢}}}{س^{\frac{١٤}{٣}} - س^{\frac{٢}{٣}}}$ «$\frac{٥}{٢}$»

(١٦) $\lim\limits_{س \to ٤} \dfrac{\frac{١}{٢} س^{٤} - ١٢٨}{س - ٤}$ «١٢٨»

(١٧) $\lim\limits_{س \to -١} \dfrac{س^{٤} - \frac{١}{س^{٤}}}{س^{٣} - \frac{١}{س^{٣}}}$ «$\frac{-٤}{٣}$»

(١٨) $\lim\limits_{٢س \to ١} \dfrac{٥ س^{٤} - \frac{٥}{١٦}}{٢ س - ١}$ «$\frac{٥}{٤}$»

(١٩) $\lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{س^{١٠} - ١٠٢٤}{س^{٢} - ٣ س + ٢}$ «٥١٢٠»

(٢٠) $\lim\limits_{س \to ١} \dfrac{س^{١٧} - ١}{٣ س^{٢} + ٢ س - ٥}$ «$\frac{١٧}{٨}$»

---

٣ أوجد كلاً مما يأتى :

(١) $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{(١ + س)^{١٠} - ١}{(١ + س)^{٧} - ١}$ «$\frac{١٠}{٧}$»

(٢) 📖 $\lim\limits_{س \to ٦} \dfrac{(س - ٥)^{٧} - ١}{س - ٦}$ «٧»

(٣) 📖 $\lim\limits_{س \to -٢} \dfrac{(س + ٣)^{٥} - ١}{س + ٢}$ «٥»

(٤) $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{(س + ٢)^{٥} - ٣٢}{س}$ «٨٠»

(٥) 📖 $\lim\limits_{هـ \to ٠} \dfrac{(٣ + هـ)^{٤} - ٨١}{٦ هـ}$ «١٨»

(٦) $\lim\limits_{هـ \to ٠} \dfrac{(١ + ٤ هـ)^{٨} - ١}{هـ}$ «٣٢»

(٧) $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{(١ - ٢ س)^{٥} - ١}{٥ س}$ «-٢»

(٨) $\lim\limits_{هـ \to ٠} \dfrac{(س + ٣ هـ)^{٥} - س^{٥}}{هـ}$ «١٥ $س^{٤}$»

(٩) 📖 $\lim\limits_{هـ \to ٠} \dfrac{(س - ٢ هـ)^{١٧} - س^{١٧}}{٥١ هـ}$ «$-\frac{٢}{٣} س^{١٦}$»

(١٠) $\lim\limits_{س + ١ \to ٠} \dfrac{(٣ س + ٢)^{٩} + ١}{س + ١}$ «٢٧»

(١١) $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{\sqrt[٣]{١ + ٣ س} - ١}{٢ س}$ «$\frac{١}{٢}$»

(١٢) $\lim\limits_{س \to ١} \dfrac{\sqrt[٣]{٢٦ + س} - ٣}{س - ١}$ «$\frac{١}{٢٧}$»

(١٣) 📖 $\lim\limits_{س \to ٧} \dfrac{\sqrt[٥]{س + ٢٥} - ٢}{س - ٧}$ «$\frac{١}{٨٠}$»

(١٤) 📖 $\lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{(س - ٤)^{٥} + ٣٢}{س - ٢}$ «٨٠»

(١٥) 📖 $\lim\limits_{س \to -٢} \dfrac{(س + ٣)^{٥} - ١}{س^{٢} - ٤}$ «$-\frac{٥}{٤}$»

(١٦) $\lim\limits_{س \to ١} \dfrac{س^{١٩} + س^{٨} - ٢}{س - ١}$ «٢٧»

(١٧) $\lim\limits_{س \to -١} \dfrac{س^{٧} + س^{٩} + ٢}{س + ١}$ «١٦»

(١٨) $\lim\limits_{س \to ١} \dfrac{\sqrt{س} + \sqrt[٣]{س} - ٢}{س - ١}$ «$\frac{٥}{٦}$»

(١٩) $\lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{س^{٥} + س^{٢} - ٣٦}{س - ٢}$ «٨٤»

(٢٠) $\lim\limits_{س \to ٥} \dfrac{(س - ٣)^{٥} - ٣٢}{س^{٢} - ٥ س}$ «١٦»

(٢١) $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{(٢ س - ٣)^{٥} + ٢٤٣}{٣ س (س - ٢)}$ «-١٣٥»

٤ أوجد قيمة ا إذا كانت : $\underset{\text{س}\to\text{ا}}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{12} - \text{ا}^{12}}{\text{س}^{10} - \text{ا}^{10}} = 30$ «± ٥»

---

٥ أوجد قيمة ك إذا كانت : $\underset{\text{س}\to -1}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{15} + 1}{\text{س} + 1} = \underset{\text{س}\to\text{ك}}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{5} - \text{ك}^{5}}{\text{س}^{3} - \text{ك}^{3}}$ «± ٣»

---

٦ إذا كانت : $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{\text{ن}} - 64}{\text{س} - 2} = \text{ل}$ أوجد قيمتي : ن ، ل «٦ ، ١٩٢»

---

٧ إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{1}{\text{س}^{4}}$ أوجد : $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \dfrac{\text{د}(\text{س}) - \text{د}(2)}{\text{س} - 2}$ «$-\frac{1}{8}$»

---

٨ أوجد كلاً مما يأتي :

① $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \left(\dfrac{\text{س}^{3} - 8}{\text{س}^{5} - 32} + \dfrac{\text{س}^{4} - 16}{\text{س}^{7} - 128} \right)$ «$\frac{31}{140}$»

② $\underset{\text{س}\to 3}{\text{نها}} \left(\dfrac{\text{س}^{5} - 243}{\text{س}^{2} - 4} \times \dfrac{\text{س} - 2}{\text{س} - 3} \right)$ «٨١»

③ $\underset{\text{س}\to -3}{\text{نها}} \left(\dfrac{\text{س}^{4} - 81}{\text{س}^{3} + 27} \right)^{3}$ «−٦٤»

④ $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}^{25} - 1)^{2}}{\text{س}^{2} - 2\text{س} + 1}$ «٦٢٥»

⑤ $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{12} - 2\text{س}^{6} + 1}{\text{س}^{2} - 2\text{س} + 1}$ «٣٦»

⑥ $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \left[\dfrac{(\text{س}^{4} - 16)^{4}}{(\text{س}^{3} - 8)^{3}} \times \dfrac{1}{\text{س}^{8} - 256} \right]$ «$\frac{16}{27}$»

⑦ $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \dfrac{(\sqrt[3]{\text{س}} - 1)(\sqrt[5]{\text{س}^{2}} - 1)}{(\text{س} - 1)^{2}}$ «$\frac{2}{15}$»

⑧ $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{(1 + \text{س})^{15} - (1 - \text{س})^{15}}{(1 + \text{س})^{9} - (1 - \text{س})^{9}}$ «$\frac{5}{3}$»

⑨ $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{12} - 1}{\text{س}^{3} - \text{س}^{2} + \text{س} - 1}$ «٦»

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

أوجد كلاً مما يأتي :

① $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{\sqrt[م]{\text{س}^3} - \sqrt[م]{\text{س}}}{\sqrt[م]{\text{س}^{11}} - \sqrt[م]{\text{س}}}$ «$\frac{1}{5}$»

② $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{(1 + 5\text{س})^{10} - 1}{(1 + 7\text{س})^{8} - 1}$ «$\frac{25}{28}$»

③ $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{\text{س} + 8} - 2}{(\text{س} + 3)^5 - 243}$ «$\frac{1}{4860}$»

④ $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{2\text{س} - 3} - 1}{\sqrt[5]{3\text{س} - 5} - 1}$ «$\frac{10}{9}$»

⑤ $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \dfrac{(\text{س}^2 - 3)^5 - 1}{\text{س} - 2}$ «20»

⑥ $\lim\limits_{\text{س} \to -1} \dfrac{(4\text{س} + 5)^6 + 7\text{س} + 6}{\text{س} + 1}$ «31»

⑦ $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{(5\text{س} - 4)^{10} + 4\text{س} - 5}{\text{س} - 1}$ «54»

⑧ $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\sqrt[5]{\text{س} + 1} - \sqrt[4]{\text{س} + 1}}{\text{س}}$ «$\frac{-1}{20}$»

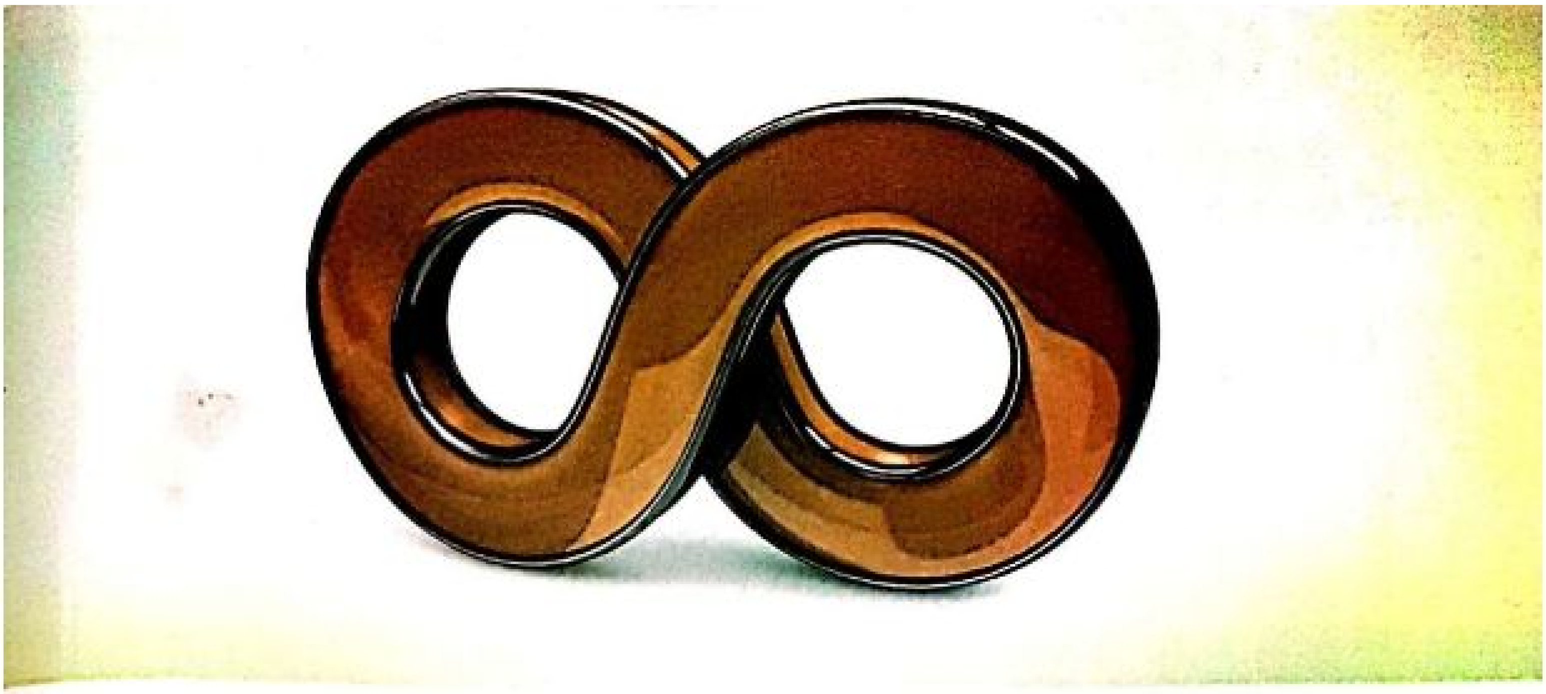
⑨ $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\sqrt[5]{\text{س} + 1} - (\text{س} + 1)^7}{\text{س}}$ «$-6\frac{4}{5}$»

⑩ $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \dfrac{5\sqrt{\text{س} - 1} + \sqrt[3]{\text{س} - 1} - 6}{\text{س} - 2}$ «$\frac{17}{6}$»

⑪ $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{\text{س}^7 + \text{س}^9 + \text{س}^{11} - 3}{\text{س} - 1}$ «27»

⑫ $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \dfrac{\text{س}^4 (\text{س} - 1)^6 - 16}{\text{س} - 2}$ «128»

⑬ $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \dfrac{\text{س}^5 \sqrt[3]{\text{س} + 6} - 64}{\text{س} - 2}$ «$162\frac{2}{3}$»



المقصود ببحث نهاية الدالة عند اللانهاية هو التعرف على سلوك هذه الدالة عندما تكبر س (المتغير المستقل) كبرًا بلا حد ، فإذا كانت د (س) تقترب من عدد حقيقي معين (ل مثلاً) كلما كبرت س فإننا نقول إن الدالة د لها نهاية ل عندما تقترب س من اللانهاية ونكتب $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}}$ د (س) = ل

مثال توضيحي ١

إذا كانت د : د (س) = $\frac{\text{٢س} + ١}{\text{س}}$ وأردنا دراسة سلوك الدالة د عندما تكبر س بدون حد أي عندما تقترب س من اللانهاية فإننا نفرض أن س تأخذ القيم ١ ، ١٠ ، ١٠٠ ، ١٠٠٠ ، ... إلخ فنحصل على الجدول الآتي :

س	١	١٠	١٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠٠	....
د (س) = $\frac{\text{٢س} + ١}{\text{س}}$	٣	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١	٢,٠٠٠١	....

ومن هذا الجدول نلاحظ أنه عندما تأخذ س قيمًا متدرجة في الكبر فإن د (س) تقترب أكثر وأكثر من القيمة ٢ وبلغة النهايات فإننا نقول إن د (س) ← ٢ عندما س ← ∞

ونكتب $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}}$ د (س) = ٢

ونلاحظ في هذا المثال :

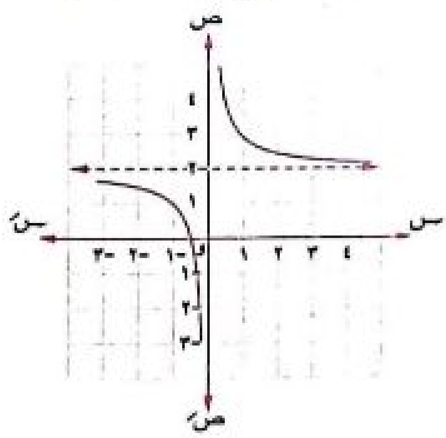
أننا لا نستطيع الحصول على نفس النتيجة عن طريق التعويض المباشر عن س = ∞

حيث سنحصل على $\frac{\infty}{\infty}$ (كمية غير معينة).

الحل البياني

عند رسم الدالة

د : د (س) = $\frac{\text{٢س} + ١}{\text{س}}$ = ٢ + $\frac{١}{\text{س}}$



نلاحظ من الرسم أنه عندما س ← ∞

فإن د (س) ← ٢

مثال توضيحى ٢

إذا أردنا دراسة سلوك الدالة د حيث د (س) = $\frac{١}{س}$ عندما تأخذ س قيمًا متدرجة فى الكبر فإننا نكون الجدول التالى :

س	١	١٠	١٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠٠	....
د (س) = $\frac{١}{س}$	١	٠,١	٠,٠١	٠,٠٠١	٠,٠٠٠١	....

ونلاحظ من هذا الجدول أن :

د (س) ⟵ صفر

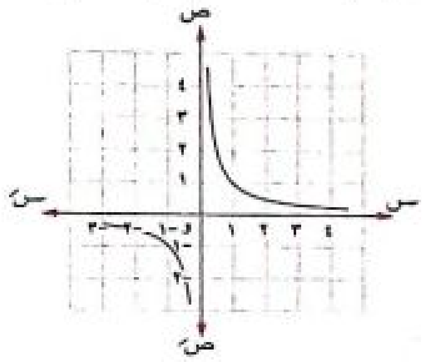
عندما س ⟵ ∞

أى أن : نهـــا (س ⟵ ∞) $\frac{١}{س}$ = صفر

وهذا المثال التوضيحى يقودنا للنظرية الآتية :

الحل البيانى

عند رسم الدالة د : د (س) = $\frac{١}{س}$



نلاحظ من الرسم أنه عندما س ⟵ ∞

فإن د (س) ⟵ صفر

نظرية ٥

نهـــا (س ⟵ ∞) $\frac{١}{س}$ = صفر

نتيجتان

إذا كانت : أ ∈ ح فإن :

١ نهـــا (س ⟵ ∞) $\frac{أ}{س}$ = صفر

٢ نهـــا (س ⟵ ∞) $\frac{أ}{س^{ن}}$ = صفر ، ن ∈ ح+

قواعد أساسية

* نهـــا (س ⟵ ∞) حـ = حـ حيث حـ ثابت
* نهـــا (س ⟵ ∞) $س^{ن}$ = ∞ حيث ن عدد موجب
* نظرية (٢) المتعلقة بنهاية مجموع أو فرق أو ضرب أو قسمة دالتين عند س = أ السابق دراستها صحيحة عندما نضع س ⟵ ∞ بدلًا من س ⟵ أ

مثال ١

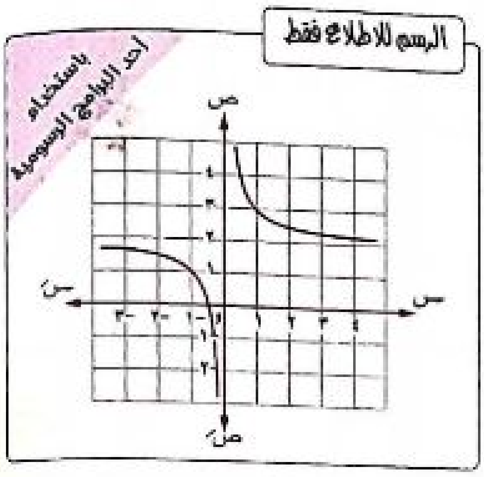
أوجد كلاً مما يأتى : [١] $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{١}{س} + ٢ \right)$ [٢] $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(٣ - \frac{١}{س^{٢}} \right)$

الحـــل

[١] $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{١}{س} + ٢ \right)$

$= \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{١}{س} + \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} ٢$

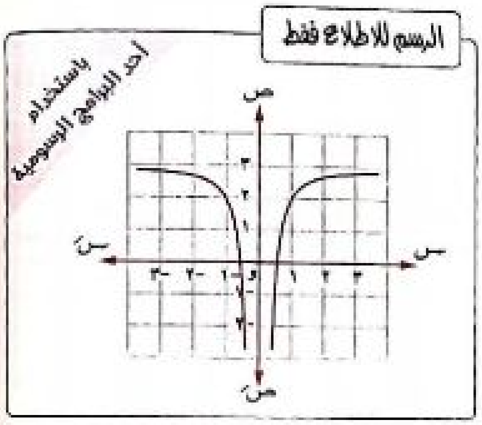
$= ٠ + ٢ = ٢$



[٢] $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(٣ - \frac{١}{س^{٢}} \right)$

$= \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} ٣ - \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{١}{س^{٢}}$

$= ٣ - \text{صفر} = ٣$



إيجاد نهاية دالة كسرية جبرية عند اللانهاية

إذا كان التعويض المباشر عن س = ∞ يعطى $\frac{\infty}{\infty}$ فإننا نقسم كلاً من البسط والمقام على المتغير س مرفوعًا لأعلى قوة فى المقام (درجة المقام) ، ثم نستخدم النظرية ونتيجتها لإيجاد النهاية (إن وجدت)

مثال ٢

أوجد كلاً مما يأتى :

[١] $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢س - ٥}{٣س - ٧}$

[٢] $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٥س^{٢} - ٣س + ٦}{٢س - ٧س^{٢}}$

[٣] $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٣س^{٢} - ٥س}{٢س^{٣} - ٦س^{٢} + ٤س - ١}$

[٤] $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} - ٢س^{٢}}{س^{٤} + ٢س^{٣} - ١}$

الحـــل

[١] بقسمة كل من البسط والمقام على س

$\therefore \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢س - ٥}{٣س - ٧} = \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢ - \frac{٥}{س}}{٣ - \frac{٧}{س}} = \frac{٢ - ٠}{٣ - ٠} = \frac{٢}{٣}$

[٢] بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^{٢}$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{٥\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٦}{٢\text{س} - ٧\text{س}^{٢}} = \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{٥ - \frac{٣}{\text{س}} + \frac{٦}{\text{س}^{٢}}}{\frac{٢}{\text{س}} - ٧} = -\frac{٥}{٧}$$

[٣] بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^{٣}$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{٣\text{س}^{٢} - ٥\text{س}}{٢\text{س}^{٣} - ٦\text{س}^{٢} + ٤\text{س} - ١} = \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\frac{٣}{\text{س}} - \frac{٥}{\text{س}^{٢}}}{٢ - \frac{٦}{\text{س}} + \frac{٤}{\text{س}^{٢}} - \frac{١}{\text{س}^{٣}}}$$
$$= \frac{٠}{٢} = ٠$$

[٤] بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^{٤}$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س}^{٥} - ٢\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٤} + ٢\text{س}^{٢} - ١} = \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س} - \frac{٢}{\text{س}^{٢}}}{١ + \frac{٢}{\text{س}^{٢}} - \frac{١}{\text{س}^{٤}}} = \frac{\infty - ٠}{١ + ٠ - ٠} = \infty$$

ملاحظـــة هامة

* عند إيجاد $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{د}(\text{س})}{\text{ر}(\text{س})}$ حيث كل من د (س) ، ر (س) دالة كثيرة حدود فإن :

[١] النهاية = عدد حقيقي لا يساوي الصفر «إذا كانت درجة البسط = درجة المقام».

[٢] النهاية = صفر «إذا كانت درجة البسط أصغر من درجة المقام».

[٣] النهاية = ± ∞ «إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام».

مثال ❸

أوجد كلاً مما يأتي :

[١] $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{(\text{س} - ١)(\text{س}^{٢} + ١)}{\text{س}^{٢}(٥\text{س} - ١)}$

[٢] $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{(٣\text{س}^{٢} + ٢)^{٢}(\text{س}^{٢} - ١)^{٢}}{\text{س}^{٥}(\text{س} + ١)^{٧}}$

الحـــل

[١] بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^{٣}$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{(\text{س} - ١)(\text{س}^{٢} + ١)}{\text{س}^{٢}(٥\text{س} - ١)} = \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\left(١ - \frac{١}{\text{س}}\right)\left(١ + \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)}{١\left(٥ - \frac{١}{\text{س}}\right)} = \frac{١ \times ١}{١ \times ٥} = \frac{١}{٥}$$

[٢] بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^{١٢}$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{(٣\text{س}^{٢} + ٢)^{٢}(\text{س}^{٢} - ١)^{٢}}{\text{س}^{٥}(\text{س} + ١)^{٧}} = \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\left(٣ + \frac{٢}{\text{س}^{٢}}\right)^{٢}\left(١ - \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)^{٢}}{١\left(١ + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٧}}$$
$$= \frac{٣^{٢} \times ١^{٢}}{١ \times ١^{٧}} = ٩$$

مثال ٤

أوجد كلًا مما يأتي :

١ $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{٢ س^{٣} - ٩}{|٣ س|^{٣} + ٧}$

٢ $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{٥ س - ٦}{\sqrt{٩ س^{٢} + ٧}}$

٣ $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{\sqrt[٣]{٨ س^{٣} - ٥ س + ١}}{٣ س - ٢}$

٤ $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{\sqrt[٥]{س^{٥} + س^{٢}}}{\sqrt[٧]{س^{٧} - س^{٢}}}$

٥ $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\sqrt{س^{٢} - س + ١} - \sqrt{س^{٢} + س + ١} \right)$

الحـــل

١ $\because$ س $\to \infty$ $\quad \therefore |س| = س \quad \therefore$ النهاية $= \lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{٢ س^{٣} - ٩}{٢٧ س^{٣} + ٧}$

وبقسمة كل من البسط والمقام على $س^{٣}$

$$\therefore \lim_{س \to \infty} \frac{٢ س^{٣} - ٩}{٢٧ س^{٣} + ٧} = \lim_{س \to \infty} \frac{٢ - \frac{٩}{س^{٣}}}{٢٧ + \frac{٧}{س^{٣}}} = \frac{٢}{٢٧}$$

لاحظ أنه

عندما س $\to \infty$

فإن : $س = |س| = \sqrt{س^{٢}} = \sqrt[٣]{س^{٣}} = \sqrt[٤]{س^{٤}} = \dots$

٢ بقسمة كل من البسط والمقام على $س = \sqrt{س^{٢}}$

$$\therefore \lim_{س \to \infty} \frac{٥ س - ٦}{\sqrt{٩ س^{٢} + ٧}} = \lim_{س \to \infty} \frac{٥ - \frac{٦}{س}}{\sqrt{٩ + \frac{٧}{س^{٢}}}} = \frac{٥}{\sqrt{٩}} = \frac{٥}{٣}$$

٣ بقسمة كل من البسط والمقام على $س = \sqrt[٣]{س^{٣}}$

$$\therefore \lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[٣]{٨ س^{٣} - ٥ س + ١}}{٣ س - ٢} = \lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[٣]{٨ - \frac{٥}{س^{٢}} + \frac{١}{س^{٣}}}}{٣ - \frac{٢}{س}} = \frac{\sqrt[٣]{٨}}{٣} = \frac{٢}{٣}$$

٤ بقسمة كل من البسط والمقام على $س = \sqrt[٥]{س^{٥}} = \sqrt[٧]{س^{٧}}$

$$\therefore \lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[٥]{س^{٥} + س^{٢}}}{\sqrt[٧]{س^{٧} - س^{٢}}} = \lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[٥]{١ + \frac{١}{س^{٣}}}}{\sqrt[٧]{١ - \frac{١}{س^{٥}}}} = \frac{\sqrt[٥]{١}}{\sqrt[٧]{١}} = ١$$

٥ $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\sqrt{س^{٢} - س + ١} - \sqrt{س^{٢} + س + ١} \right)$

$$= \lim_{س \to \infty} \left[\left(\sqrt{س^{٢} - س + ١} - \sqrt{س^{٢} + س + ١} \right) \times \frac{\sqrt{س^{٢} - س + ١} + \sqrt{س^{٢} + س + ١}}{\sqrt{س^{٢} - س + ١} + \sqrt{س^{٢} + س + ١}} \right]$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{س^{٢} - س + ١ - (س^{٢} + س + ١)}{\sqrt{س^{٢} - س + ١} + \sqrt{س^{٢} + س + ١}}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{- ٢ س}{\sqrt{س^{٢} - س + ١} + \sqrt{س^{٢} + س + ١}}$$

وبقسمة كل من البسط والمقام على $س = \sqrt{س^{٢}}$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{-٢}{\sqrt{١ - \frac{١}{س} + \frac{١}{س^{٢}}} + \sqrt{١ + \frac{١}{س} + \frac{١}{س^{٢}}}} = \frac{-٢}{\sqrt{١} + \sqrt{١}} = -١$$

مثال ٥

أوجد كلاً مما يأتي :

١ $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{٥}{س^٢} - \frac{٧س^٣}{س^٤} + ٢\right)$

٢ $\lim_{س \to \infty} (٤س^٢ + ٣س + ٧)$

٣ $\lim_{س \to \infty} (٥س^٤ - س^٢ - ٣)$

٤ $\lim_{س \to \infty} (٤س^٢ - ٥س^٣ + ١٢)$

الحل

١ $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{٥}{س^٢} - \frac{٧س^٣}{س^٤} + ٢\right) =$ صفر − صفر + ٢ = ٢

٢ $\lim_{س \to \infty} (٤س^٢ + ٣س + ٧)$ [لاحظ التعويض المباشر يعطى $\infty + \infty + ٧$]

∴ $\lim_{س \to \infty} (٤س^٢ + ٣س + ٧) = \infty$

٣ $\lim_{س \to \infty} (٥س^٤ - س^٢ - ٣)$ [لاحظ التعويض المباشر يعطى $\infty - \infty - ٣$ أى كمية غير معينة]

$= \lim_{س \to \infty} س^٤ \left(٥ - \frac{١}{س} - \frac{٣}{س^٤}\right)$ [نأخذ س عامل مشترك بأكبر أس]

$= \lim_{س \to \infty} س^٤ \times \lim_{س \to \infty} \left(٥ - \frac{١}{س} - \frac{٣}{س^٤}\right) = \infty \times ٥ = \infty$

٤ $\lim_{س \to \infty} (٤س^٢ - ٥س^٣ + ١٢)$ [لاحظ التعويض المباشر يعطى $\infty - \infty$ أى كمية غير معينة]

$= \lim_{س \to \infty} س^٣ \left(\frac{٤}{س} - ٥ + \frac{١٢}{س^٣}\right)$ [نأخذ س عامل مشترك بأكبر أس]

$= \lim_{س \to \infty} س^٣ \times \lim_{س \to \infty} \left(\frac{٤}{س} - ٥ + \frac{١٢}{س^٣}\right) = \infty \times -٥ = -\infty$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\underset{س \to \infty}{نهـا} \left(\frac{٣}{س^{٢}} - ٢ \right) = ...$

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) -٣ (د) -٢

② $\underset{س \to \infty}{نهـا} \frac{٣ س}{٤ س + ٥} = ...$

(أ) ∞ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٥}$ (د) صفر

③ $\underset{س \to \infty}{نهـا} \frac{٢ س^{٢} + ١}{س^{٢} + ١} = ...$

(أ) صفر (ب) غير موجودة. (جـ) ∞ (د) ٢

④ $\underset{س \to \infty}{نهـا} \frac{س^{٢} + ٥}{٦} = ...$

(أ) صفر (ب) $\frac{٥}{٦}$ (جـ) ١ (د) ∞

⑤ $\underset{س \to \infty}{نهـا} \frac{\sqrt{س} - ٣}{س} = ...$

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) -٢ (د) ∞

⑥ $\underset{س \to \infty}{نهـا} (٣ س^{-٥} + ٤ س^{-٢} + ٥) = ...$

(أ) ١٢ (ب) ∞ (جـ) ٥ (د) صفر

⑦ $\underset{س \to \infty}{نهـا} \frac{٣ س^{-٢} + ٤ س^{-٢} - ٢}{٧ س^{-٢} - س^{-٢} + ٦} = ...$

(أ) ∞ (ب) صفر (جـ) $\frac{٢}{٧}$ (د) $\frac{-١}{٣}$

⑧ $\underset{س \to \infty}{نهـا} \frac{س^{٧} - ٢ س^{٢}}{٢ س^{٤} - ٣ س^{٢} - ١} = ...$

(أ) صفر (ب) ٣ (جـ) ∞ (د) $\frac{١}{٢}$

⑨ $\underset{س \to \infty}{نهـا} \frac{٣ س^{٢}}{س (٢ س - ١)} = ...$

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) صفر (د) ٣

⑩ $\underset{س \to \infty}{نهـا} \sqrt{\frac{٣ + ٢ س}{٤ س - ١}} = ...$

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(١١) $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{س^3 + 5}{س(2س^2 + 3)} = \cdots\cdots\cdots\cdots$

(أ) $\frac{5}{8}$ (ب) ١ (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{5}{3}$

(١٢) $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{1}{س}\sqrt{8 + 9س^2} = \cdots\cdots\cdots\cdots$

(أ) $2\sqrt{2}$ (ب) ٣ (جـ) $-2\sqrt{2}$ (د) -3

(١٣) $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{\sqrt[3]{64س^3 + 7س - 2}}{3س + 2} = \cdots\cdots\cdots\cdots$

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{4}{3}$

(١٤) $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{\sqrt[3]{8س^3 + 1}}{|س|} = \cdots\cdots\cdots\cdots$

(أ) ٢ (ب) ٨ (جـ) صفر (د) ٤

(١٥) $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{\sqrt{9س^2 + 3}}{\sqrt[3]{1 - 8س^3}} = \cdots\cdots\cdots\cdots$

(أ) $\frac{-2}{3}$ (ب) $\frac{-9}{8}$ (جـ) $\frac{3}{2}$ (د) $\frac{-3}{2}$

(١٦) $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{4 - 3س^2}{\sqrt{س^6 + 9}} = \cdots\cdots\cdots\cdots$

(أ) -3 (ب) ١ (جـ) صفر (د) ∞

(١٧) $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{\sqrt{س + 2} + \sqrt{س + 3}}{\sqrt{2س + 5}} = \cdots\cdots\cdots\cdots$

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) ١ (جـ) $\sqrt{2}$ (د) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

(١٨) $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\frac{3س^2 + 2س + 1}{س^2 - 3س + 2}\right)^4 = \cdots\cdots\cdots\cdots$

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢٧ (د) ٨١

(١٩) $\lim\limits_{س \to \infty} س\left[(أ + \frac{1}{س})^{ن} - أ^{ن}\right] = \cdots\cdots\cdots\cdots$

(أ) ن أ (ب) $ن أ^{ن-1}$ (جـ) صفر (د) غير موجودة.

(٢٠) $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{(12)^{\frac{1}{س}}}{س + 7} = \cdots\cdots\cdots\cdots$

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) $\frac{12}{7}$ (د) ∞

(٢١) $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{ك^{\frac{1}{س}}}{3} = \cdots\cdots\cdots\cdots$ حيث ك ثابت موجب.

(أ) $\frac{ك}{3}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (جـ) ٣ (د) ٣ ك

(٢٢) إذا كانت $\lim_{س \to \infty} \frac{أ^2 س + ٧}{٢ س - ٥} = ٨$ فإن : أ = ... حيث أ ∈ ح

(أ) ٢ (ب) صفر (جـ) ± ٤ (د) ± ٨

(٢٣) $\lim_{س \to \infty} \frac{أ س^2 - ٥ س}{٢ س + ٢ س^2} = ٣$ فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٢

(٢٤) إذا كان : م ∈ ح وكان : $\lim_{س \to \infty} \frac{(م + ٢) س^2 - س + ٤}{٢ م س^3 - ٢ س + ٥} = ٢$ فإن : م = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٢}$ (د) ١

(٢٥) $\lim_{س \to \infty} (٣ + ٢ س - ٥ س^2) = $ ....

(أ) ∞ (ب) − ∞ (جـ) صفر (د) ٧

(٢٦) $\lim_{س \to \infty} (س^3 + ٧ س^2 + ٨) = $ ....

(أ) ∞ (ب) صفر (جـ) − ∞ (د) ١

(٢٧) $\lim_{س \to \infty} (\sqrt{س^2 + س} - س) = $ ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) صفر (جـ) $\sqrt{٢}$ (د) ليس لها وجود.

(٢٨) $\lim_{س \to \infty} س^{ن} = $ صفر إذا كانت ن ∈ ....

(أ) ط (ب) ص (جـ) $ح^+$ (د) $ح^-$

(٢٩) $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{٤ س + \sqrt{س + \sqrt{س}}}}{٨ \sqrt{س}} = $ ....

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٨}$

(٣٠) إذا كان : أ > ب فإن : $\lim_{س \to \infty} \frac{س^أ}{س^ب} = $ ....

(أ) صفر (ب) ∞ (جـ) ١ (د) أ − ب

(٣١) إذا كان : أ < ب < صفر فإن : $\lim_{س \to \infty} \frac{س^أ}{س^ب} = $ ....

(أ) ∞ (ب) − ∞ (جـ) صفر (د) أ − ب

(٣٢) إذا كانت : د (س) كثيرة حدود من الدرجة الثالثة ، ر (س) كثيرة حدود من الدرجة الخامسة

فإن : $\lim_{س \to \infty} \frac{ر (س)}{س^2 د (س)} = $ ....

(أ) ± ∞ (ب) صفر

(جـ) عدد حقيقي ≠ صفر (د) ليس لها وجود.

ثانيًا الأسئلة المقالية

1 أوجد كلاً من النهايات الآتية :

① $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\,\text{س} - ٥}{٣\,\text{س} + ٨}$ «$\frac{٢}{٣}$»

② $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\,\text{س} - ٥}{٣\,\text{س}^{٢} + ٨}$ «صفر»

③ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\,\text{س}^{٢} - ٥}{٣\,\text{س} + ٨}$ «∞»

④ 📖 $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٥ - ٦\,\text{س} - ٣\,\text{س}^{٢}}{٢\,\text{س}^{٢} + \text{س} + ٤}$ «$-\frac{٣}{٢}$»

⑤ 📖 $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٣} - ٢}{|\text{س}|^{٢} + ١}$ «١»

⑥ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٧\,\text{س}^{٢} + ١}{٤\,\text{س}^{٣} - ٨\,\text{س} + ١}$ «صفر»

⑦ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٥\,\text{س}^{٧} + ٢\,\text{س} - ١}{٦\,\text{س}^{٤} + ١٣}$ «∞»

⑧ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٥ - ٧\,\text{س}^{٨} + ٣\,\text{س}^{١٤}}{٧ - ٦\,\text{س}^{١٤} + ٢\,\text{س}^{٩}}$ «$\frac{-١}{٢}$»

⑨ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{٧}{\text{س}^{٢}} + \dfrac{٢}{\text{س}} - ٣\right)$ «-٣»

⑩ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٥\,\text{س}^{-٣} + ٤\,\text{س}^{-٢} - ٣}{٧\,\text{س}^{-٣} - ٢\,\text{س}^{-٢} + ٨}$ «$\frac{-٣}{٨}$»

⑪ 📖 $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٥\,\text{س}^{٣} - ٤\,\text{س}^{٢} + ٢}{٧ - \text{س} + |٢\,\text{س}|^{٣}}$ «$\frac{٥}{٨}$»

⑫ 📖 $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} (\text{س}^{٣} + ٥\,\text{س}^{٢} + ١)$ «∞»

⑬ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left[\sqrt{\text{س}^{٢} + ٥\,\text{س} + ٧} + \text{س}\right]$ «∞»

⑭ 📖 $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} (٥ + \text{س} - \text{س}^{٢})$ «$-\infty$»

2 أوجد كلاً مما يأتى :

① $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٣\,\text{س}^{٢} - ٤\,\text{س} + ٥}{(\text{س} + ٢)^{٢}}$ «٣»

② $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٦\,\text{س}^{٢} - ٥\,\text{س}}{(٣ - \text{س})(٢ + \text{س})}$ «-٦»

③ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٨\,\text{س}^{٣} - \text{س} + ١}{(\text{س} + ١)(٢\,\text{س}^{٢} - ٣)}$ «٤»

④ 📖 $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٤\,\text{س} + ٥}{(٢\,\text{س} - ١)^{٣}}$ «$\frac{١}{٨}$»

⑤ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{(٢\,\text{س} + ٣)(٤\,\text{س}^{٢} - ٥)}{(٣\,\text{س}^{٢} - ٨)(٥\,\text{س} - ٣)}$ «$\frac{٨}{١٥}$»

⑥ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{(٢\,\text{س} + ٣)(٥\,\text{س} - ١)(\text{س} - ٢)}{\text{س}(\text{س} + ١)(٣\,\text{س} - ١)}$ «$\frac{١٠}{٣}$»

⑦ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{(٧ + \sqrt{\text{س}})(٣ + \sqrt{\text{س}})}{٤\,\text{س} - ٣}$ «$\frac{١}{٤}$»

⑧ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{(٦\,\text{س} - ٥)(٣\,\text{س} - ٤)^{٢}}{(٣\,\text{س} - ٢)^{٢}}$ «٢»

⑨ 📖 $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} + ٢)^{٣}(٣ - ٢\,\text{س}^{٢})}{٣\,\text{س}(\text{س}^{٢} + ٧)^{٢}}$ «$-\frac{٢}{٣}$»

⑩ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{(٣\,\text{س}^{٢} - ١)^{٢}}{١٨\,\text{س}^{٦} + \text{س}^{٢} + ١}$ «$\frac{٢}{٣}$»

3 أوجد كلاً مما يأتى :

① $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\,\text{س} + ٣}{\sqrt{٩\,\text{س}^{٢} + ٢٥}}$ «$\frac{٢}{٣}$»

② 📖 $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{\text{س}} \sqrt{٣ + ٤\,\text{س}^{٢}}$ «٢»

③ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\,\text{س} + ١}{\sqrt{٤\,\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س} - ٤}}$ «١»

④ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\,\text{س} - ٣}{\sqrt[٣]{١٢٥\,\text{س}^{٣} + ٥}}$ «$\frac{٢}{٥}$»

⑤ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٣]{٨\,\text{س}^{٣} + ٥\,\text{س} - ٢}}{٣\,\text{س} + ٢}$ «$\frac{٢}{٣}$»

⑥ 📖 $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٤ - ٣\,\text{س}^{٣}}{\sqrt{\text{س}^{٦} + ٩}}$ «-٣»

⑦ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{\sqrt{9س^2 - 3س + 8}}{\sqrt[3]{3س^2 + 125س^3 + 2}}$ «$\frac{3}{5}$»

⑧ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{\sqrt{س^2 + 1}}{\sqrt[4]{س^4 + 2}}$ «1»

⑨ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{\sqrt[3]{8س^3 + 1}}{\sqrt[5]{32س^5 + س}}$ «1»

⑩ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{\sqrt[3]{8س^3 + 1}}{\sqrt[4]{س^4 - 3}}$ «2»

⑪ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{\sqrt{3س - 2} - \sqrt{12س + 7}}{\sqrt{27س - 5}}$ «$\frac{1}{3}$»

⑫ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{\sqrt{4س^2 + 7} + 3س}{2س + 9}$ «$\frac{5}{2}$»

⑬ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{\sqrt[4]{س^4 + 8} - \sqrt[6]{س^2 + 4}}{\sqrt{س^2 + 9}}$ «1»

⑭ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{3س^2 - س - 7}{(س + 1)\sqrt{25س^2 + 1}}$ «$\frac{3}{5}$»

4 أوجد كلاً مما يأتى :

① 📖 $\lim\limits_{س \to \infty} \left[7 + \frac{2س^2}{(س + 3)^2}\right]$ «9»

② 📖 $\lim\limits_{س \to \infty} \left[\frac{س}{2س + 1} + \frac{3س^2}{(س - 3)^2}\right]$ «$\frac{7}{2}$»

③ 📖 $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\frac{2}{3} - \frac{3س}{2س + 7}\right)$ «$\frac{-5}{6}$»

④ $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\frac{2س^3}{2س^2 + 1} - س\right)$ «صفر»

⑤ $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\frac{س^2 - 1}{س + 2} - \frac{س^2 + 1}{س - 2}\right)$ «-4»

⑥ $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\sqrt{س^2 - 2} - \sqrt{س^2 + س}\right)$ «$-\frac{1}{2}$»

⑦ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{1}{س}\left(\sqrt{4س^2 + 1} - \sqrt{س^2 + 1}\right)$ «1»

⑧ $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\sqrt{س^2 + 5س} - س\right)$ «$\frac{5}{2}$»

⑨ 📖 $\lim\limits_{س \to \infty} س\left(\sqrt{4س^2 + 1} - 2س\right)$ «$\frac{1}{4}$»

⑩ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{(2س - 1)^5 (س^2 + 3)^6}{(س + 1)^7 (س^2 - 5)^5}$ «32»

⑪ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{\sqrt{س + 1} - \sqrt{س - 1}}{\sqrt{4س + 1} - \sqrt{4س - 1}}$ «2»

5 أوجد كلاً مما يأتى :

① $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\frac{3س^2 - 5س + 1}{4س^2 - 7}\right)^{\frac{1}{س}}$ «1»

② $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\frac{س + 1}{\sqrt{س^2 - 1}} + أ^{\frac{1}{س}}\right)$ حيث أ موجبة. «2»

③ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} \left(\frac{٢س - ٣}{\sqrt[٣]{٢٧س^٣ - ١٥س^٢ + ٢}} + ٨^{\frac{١}{س}} \right)$ «$١\frac{٢}{٣}$»

④ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} \left(\frac{٥س^٢}{١ - س^٢} - \sqrt[س]{١٢} \right)$ «−٦»

---

٦ أوجد قيمتي أ ، ن إذا كانت $\underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} \frac{٤أس^ن - ٤س + ٥}{٣ - ٩س + ٨س^٢} = ٣$ «٦ ، ٢»

---

٧ أوجد قيمة أ إذا كانت $\underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} \frac{\sqrt[٣]{أس^٣ + ٣}}{\sqrt{٤س^٢ + ٧}} = -١$ «−٨»

---

٨ إذا كانت $\underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} \left(\sqrt{أس^٢ + ٣بس + ٥} - ٢س \right) = ٣$

أوجد قيمة كل من : أ ، ب «٤ ، ٤»

---

٩ أوجد قيمتي أ ، ب إذا كانت $\underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}}$ د (س) = ٥ ، $\underset{س \to -٢}{\text{نهـــا}}$ د (س) = ٢

حيث د (س) = $\frac{٢ - أس^٢}{٣ - بس + س^٢}$ «−٥ ، ٢»

---

١٠ إذا كانت : $\underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} \left(\frac{س^٢ + ١}{س + ١} - أس - ب \right) = ٢$ أوجد قيمتي : أ ، ب «١ ، −٢»

---

١١ أوجد قيمتي أ ، ب إذا كانت $\underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} \frac{س^٢ + ٢س + ١}{(أ + ١)س^٤ + (٧ - ب)س^٣ + س^٢} = \infty$ «−١ ، ٧»

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

أوجد كلاً مما يأتي :

① $\underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} \frac{س^{-٢} + س^{-٤}}{(٢س + ٣)^{-٢}}$ «٤»

② $\underset{ن \to \infty}{\text{نهـــا}} ن \left[\left(أ + \frac{١}{ن} \right)^٤ - أ^٤ \right]$ «٤أ^٣»

③ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} س \left[\left(٣ + \frac{١}{س} \right)^٥ - ٢٤٣ \right]$ «٤٠٥»

④ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} \left(\sqrt{س^٢ + ٢} - س \right) \sqrt{٢س^٢ + ١}$ «$\sqrt{٢}$»

⑤ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} \left(٢س^{-١} - س^{-٢} \right) \sqrt{٤س^٢ + ١}$ «٤»

⑥ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} \frac{٥س\sqrt{س} + ١٦س - ٣\sqrt{س^٣ - ١}}{س + \sqrt{٤س^٢ + ١}}$ «$\frac{٥}{٣}$»



$$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = ١$$

نظرية

إذا كانت س قياس الزاوية بالتقدير الدائرى فإن :

١ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = ١$ **٢** $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{طا س}}{\text{س}} = ١$

* عند دراسة قيم الدالة د : د (س) = $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ عندما س ← ٠

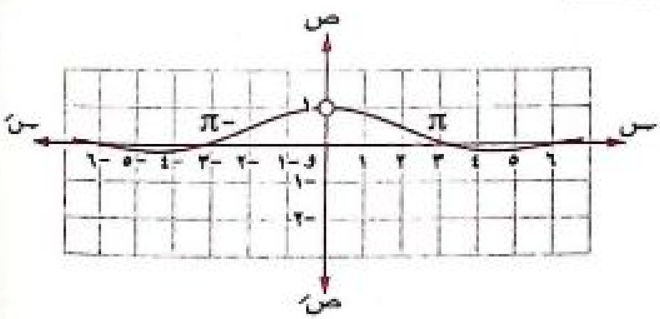
حيث س قياس الزاوية بالتقدير الدائرى نكون الجدول الآتى :

س	± ١	± ٠,١	± ٠,٠١	صفر
$\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$	٠,٨٤١٥	٠,٩٩٨٣	←------	١

ونلاحظ أنه

«كلما اقتربت س من الصفر كلما اقتربت النسبة $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ من الواحد الصحيح»

والشكل المقابل يوضح ذلك بيانيًا.



أى أن $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = ١$

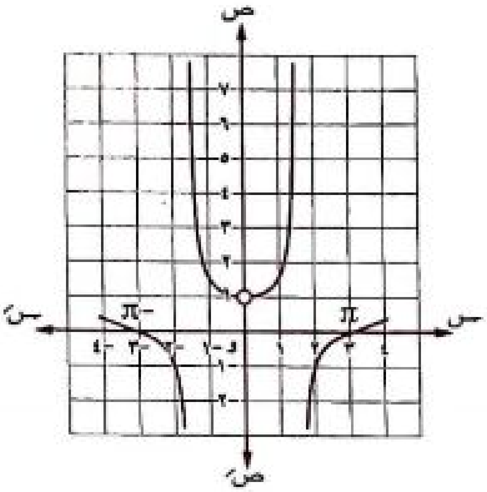
* بالمثل عند دراسة قيم الدالة د : د (س) = $\frac{\text{طا س}}{\text{س}}$ عندما س ← ٠

حيث س قياس الزاوية بالتقدير الدائرى نكون الجدول الآتى :

س	± ١	± ٠,١	± ٠,٠١	صفر
$\frac{\text{طا س}}{\text{س}}$	١,٥٥٧٤	١,٠٠٣٣	←------	١

ونلاحظ أنه

• كلما اقتربت س من الصفر كلما اقتربت النسبة $\frac{طا س}{س}$ من الواحد الصحيح» والشكل المقابل يوضح ذلك بيانيًا.



أى أن $\lim_{س \to 0} \frac{طا س}{س} = 1$

ملاحظتان

1. $\lim_{س \to 0} \frac{س}{جا س} = 1$
2. $\lim_{س \to 0} \frac{س}{طا س} = 1$ حيث س بالتقدير الدائرى.

نتيجة ①

إذا كانت س قياس زاوية بالتقدير الدائرى فإن :

1. $\lim_{س \to 0} \frac{جا أ س}{س} = أ$ ومنها $\lim_{س \to 0} \frac{جا أ س}{ب س} = \frac{أ}{ب}$ ، $\lim_{س \to 0} \frac{ب س}{جا أ س} = \frac{ب}{أ}$
2. $\lim_{س \to 0} \frac{طا أ س}{س} = أ$ ومنها $\lim_{س \to 0} \frac{طا أ س}{ب س} = \frac{أ}{ب}$ ، $\lim_{س \to 0} \frac{ب س}{طا أ س} = \frac{ب}{أ}$

فمثلًا : * $\lim_{س \to 0} \frac{جا ٣ س}{س} = 3$ * $\lim_{س \to 0} \frac{طا ٢ س}{س} = 2$ * $\lim_{س \to 0} \frac{-٥ س}{جا ٣ س} = \frac{-5}{3}$

* $\lim_{س \to 0} \frac{جا ٢ س}{٥ س} = \frac{2}{5}$ * $\lim_{س \to 0} \frac{طا ٤ س}{٣ س} = \frac{4}{3}$ * $\lim_{س \to 0} \frac{س}{طا ٧ س} = \frac{1}{7}$

ملاحظتان

1. جا س ، جتا س معرفتان لجميع قيم س ∈ ح أما طا س فهى معرفة لجميع قيم س عدا عند $س = \frac{٢ن + ١}{٢} \pi$ ، ن ∈ ص لذلك فإن :

* $\lim_{س \to أ} جا س = جا أ$ ، أ ∈ ح * $\lim_{س \to أ} جتا س = جتا أ$ ، أ ∈ ح

* $\lim_{س \to أ} طا س = طا أ$ ، $أ \neq \frac{٢ن + ١}{٢} \pi$ ، ن ∈ ص

2. لاحظ الفرق بين : $\lim_{س \to 0} \frac{جا أ س^2}{س^2}$ ، $\lim_{س \to 0} \frac{جا^2 أ س}{س^2}$

حيث : $\lim_{س \to 0} \frac{جا أ س^2}{س^2} = أ$ بينما $\lim_{س \to 0} \frac{جا^2 أ س}{س^2} = \lim_{س \to 0} \left(\frac{جا أ س}{س}\right)^2 = أ^2$

فمثلًا : $\lim_{س \to 0} \frac{جا ٣ س^2}{س^2} = 3$ بينما $\lim_{س \to 0} \frac{جا^2 ٣ س}{س^2} = \lim_{س \to 0} \left(\frac{جا ٣ س}{س}\right)^2 = 3^2 = 9$

مثال ١

أوجد كلاً مما يأتي :

١ $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{جا ٢ س}}{\text{٣ س}}$

٢ $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{٤ س}}{\text{جا ٥ س}}$

٣ $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{جا ٥ س}}{\text{٢ جا ٣ س}}$

٤ $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ظاس}}{\text{جا ٢ س}}$

الحل

١ $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{جا ٢ س}}{\text{٣ س}} = \frac{\text{٢}}{\text{٣}}$

٢ $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{٤ س}}{\text{جا ٥ س}} = \frac{\text{٤}}{\text{٥}}$

٣ $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{جا ٥ س}}{\text{٢ جا ٣ س}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\ \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\frac{\text{جا ٥ س}}{\text{س}}}{\frac{\text{جا ٣ س}}{\text{س}}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \frac{\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{جا ٥ س}}{\text{س}}}{\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{جا ٣ س}}{\text{س}}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \frac{\text{٥}}{\text{٣}} = \frac{\text{٥}}{\text{٦}}$

٤ $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ظاس}}{\text{جا ٢ س}} = \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\frac{\text{ظاس}}{\text{س}}}{\frac{\text{جا ٢ س}}{\text{س}}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$

مثال ٢

أوجد كلاً مما يأتي :

١ $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ظا}^{\text{٢}}\text{ ٢ س}}{\text{٣ س}^{\text{٢}}}$

٢ $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{جا ٣ س}^{\text{٢}}\text{ جتا س}^{\text{٢}}}{\text{٥ س}^{\text{٢}}}$

الحل

١ $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ظا}^{\text{٢}}\text{ ٢ س}}{\text{٣ س}^{\text{٢}}} = \frac{\text{١}}{\text{٣}}\ \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \left(\frac{\text{ظا ٢ س}}{\text{س}}\right)^{\text{٢}} = \frac{\text{١}}{\text{٣}} \times \text{٢}^{\text{٢}} = \frac{\text{٤}}{\text{٣}}$

٢ $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{جا ٣ س}^{\text{٢}}\text{ جتا س}^{\text{٢}}}{\text{٥ س}^{\text{٢}}} = \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{جا ٣ س}^{\text{٢}}}{\text{٥ س}^{\text{٢}}} \times \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \text{جتا س}^{\text{٢}} = \frac{\text{٣}}{\text{٥}} \times \text{١} = \frac{\text{٣}}{\text{٥}}$

مثال ٣

أوجد كلاً مما يأتي :

١ $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{٢ س} - \text{٣ جا س}}{\text{٣ س} + \text{ظا س}}$

٢ $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٥ ظا}^{\text{٢}}\text{ ٣ س}}{\text{٤ س}^{\text{٢}} - \text{جا ٢ س}^{\text{٢}}}$

الحل

١ بقسمة كل من البسط والمقام على س

$\therefore \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{٢ س} - \text{٣ جا س}}{\text{٣ س} + \text{ظا س}} = \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{٢} - \text{٣}\ \frac{\text{جا س}}{\text{س}}}{\text{٣} + \frac{\text{ظا س}}{\text{س}}} = \frac{\text{٢} - \text{٣}}{\text{٣} + \text{١}} = -\frac{\text{١}}{\text{٤}}$

٢ بقسمة كل من البسط والمقام على س^2

$$\therefore \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{س}^2 + ٥ \text{ طا}^2 \, ٣\text{س}}{٤\text{س}^2 - \text{جا } ٢\text{س}^2} = \lim_{\text{س} \to 0} \frac{١ + ٥\left(\frac{\text{طا } ٣\text{س}}{\text{س}}\right)^2}{٤ - \frac{\text{جا } ٢\text{س}^2}{\text{س}^2}}$$

$$= \frac{١ + ٥(٣)^2}{٤ - ٢} = \frac{٤٦}{٢} = ٢٣$$

نتيجة ٢

$$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{١ - \text{جتا س}}{\text{س}} = \text{صفر}$$

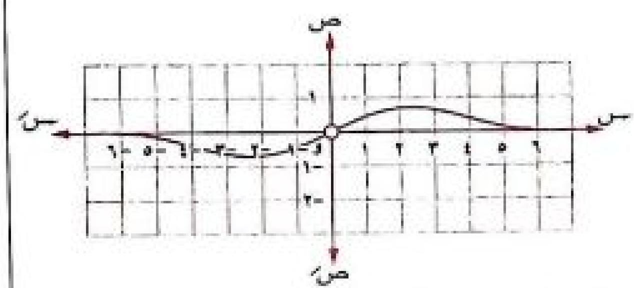
إثبات نتيجة ٢

$$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{١ - \text{جتا س}}{\text{س}} = \lim_{\text{س} \to 0} \frac{١ - \text{جتا س}}{\text{س}} \times \frac{١ + \text{جتا س}}{١ + \text{جتا س}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 0} \frac{١ - \text{جتا}^2 \text{س}}{\text{س}(١ + \text{جتا س})} = \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا}^2 \text{س}}{\text{س}(١ + \text{جتا س})}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} \times \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا س}}{١ + \text{جتا س}}$$

$$= ١ \times \text{صفر} = \text{صفر}$$



* الشكل المقابل يمثل الدالة د : د (س) $= \frac{١ - \text{جتا س}}{\text{س}}$ ونلاحظ فى الشكل أنه كلما اقتربت س من الصفر كلما اقتربت النسبة $\frac{١ - \text{جتا س}}{\text{س}}$ من الصفر أيضًا حيث س بالتقدير الدائرى.

أى أن $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{١ - \text{جتا س}}{\text{س}} = \text{صفر}$

مثال ٤

أوجد كلاً مما يأتى : ١ $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{١ - \text{جتا س}}{\text{جا س}}$ ٢ $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{١ - \text{جتا س}}{\text{س}^2}$

الحل

١ $$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{١ - \text{جتا س}}{\text{جا س}} = \lim_{\text{س} \to 0} \left(\frac{١ - \text{جتا س}}{\text{س}} \times \frac{\text{س}}{\text{جا س}}\right) = \lim_{\text{س} \to 0} \frac{١ - \text{جتا س}}{\text{س}} \times \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{س}}{\text{جا س}}$$

$$= \text{صفر} \times ١ = \text{صفر}$$

[٢] $\underset{س \to 0}{\text{نهـا}} \frac{1 - \text{جتا} س}{س^2} = \underset{س \to 0}{\text{نهـا}} \left(\frac{1 - \text{جتا} س}{س^2} \times \frac{1 + \text{جتا} س}{1 + \text{جتا} س}\right)$

$= \underset{س \to 0}{\text{نهـا}} \left(\frac{1 - \text{جتا}^2 س}{س^2} \times \frac{1}{1 + \text{جتا} س}\right)$

$= \underset{س \to 0}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{جا}^2 س}{س^2} \times \frac{1}{1 + \text{جتا} س}\right)$

$= \underset{س \to 0}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{جا} س}{س}\right)^2 \times \underset{س \to 0}{\text{نهـا}} \left(\frac{1}{1 + \text{جتا} س}\right) = (1)^2 \times \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$

تذكران

- $\text{جا}^2 س + \text{جتا}^2 س = 1$
- $1 + \text{ظا}^2 س = \text{قا}^2 س$
- $1 + \text{ظتا}^2 س = \text{قتا}^2 س$

مثال ٥

أوجد كلاً مما يأتي :

[١] $\underset{س \to 4}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(3س - 12)}{س - 4}$

[٢] $\underset{س \to \frac{\pi}{2}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا} س}{2س - \pi}$

[٣] $\underset{س \to \pi}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا} س}{\pi - س}$

[٤] $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} س \text{ جا} س^{-1}$

الحـل

[١] $\underset{س \to 4}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(3س - 12)}{س - 4} = \underset{(س - 4) \to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}[3(س - 4)]}{س - 4} = 3$

[٢] $\underset{س \to \frac{\pi}{2}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا} س}{2س - \pi} = \underset{(\frac{\pi}{2} - س) \to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - س)}{-2(\frac{\pi}{2} - س)} = -\frac{1}{2}$

[٣] $\underset{س \to \pi}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا} س}{\pi - س} = \underset{(\pi - س) \to 0}{\text{نهـا}} \frac{-\text{ظا}(\pi - س)}{\pi - س} = -1$

[٤] $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} س \text{ جا} س^{-1} = \underset{\frac{1}{س} \to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا} \frac{1}{س}}{\frac{1}{س}} = 1$

مثال ٦

أوجد كلاً مما يأتي :

[١] $\underset{س \to 0}{\text{نهـا}} 4س \text{ قتا } 5س$

[٢] $\underset{س \to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا}(\frac{\pi}{2} - س)}{س}$

[٣] $\underset{س \to \frac{\pi}{2}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا} س}{س - \frac{\pi}{2}}$

الحـل

[١] $\underset{س \to 0}{\text{نهـا}} 4س \text{ قتا } 5س = \underset{س \to 0}{\text{نهـا}} \frac{4س}{\text{جا } 5س} = \frac{4}{5}$

[٢] $\underset{س \to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا}(\frac{\pi}{2} - س)}{س} = \underset{س \to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا} س}{س} = 1$

[٣] $\underset{س \to \frac{\pi}{2}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا} س}{س - \frac{\pi}{2}} = \underset{(\frac{\pi}{2} - س) \to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - س)}{-(\frac{\pi}{2} - س)} = -1$

معلومة

إذا كانت س قياس الزاوية بالتقدير الستينى فإن :

[١] $\underset{س \to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا} س}{س} = \frac{\pi}{180}$

[٢] $\underset{س \to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا} س}{س} = \frac{\pi}{180}$

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\lim_{س \to 0}$ طا س = ...

(أ) صفر (ب) -1 (جـ) $\frac{\pi}{2}$ (د) π

② $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}}$ جا ٢ س = ...

(أ) صفر (ب) -1 (جـ) ١ (د) $\frac{\pi}{2}$

③ $\lim_{س \to 0} \frac{٢ س}{جا ٣ س}$ = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) ٦ (د) ليس لها وجود.

④ $\lim_{س \to 0} \frac{طا \pi س}{٦ س}$ = ...

(أ) π (ب) $\frac{\pi}{٦}$ (جـ) $\frac{١}{٦}$ (د) غير موجودة.

⑤ $\lim_{س \to 0} \frac{جا \frac{٣}{٥} \sqrt[٤]{س}}{\sqrt[٤]{س}}$ = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{٣}{٥}$ (جـ) $\frac{٥}{٣}$ (د) $\sqrt[٤]{\frac{٣}{٥}}$

⑥ $\lim_{(٢س - ٣) \to 0} \frac{طا (٢ س - ٣)}{٢ س - ٣}$ = ...

(أ) صفر (ب) -1 (جـ) ١ (د) غير موجودة.

⑦ $\lim_{هـ \to 0} \frac{جا ٣ هـ^٢}{٤ هـ^٢}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) $\frac{٤}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

⑧ $\lim_{س \to 0} \frac{٣ س^٥}{طا ٤ س^٥}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) ١ (د) صفر

⑨ $\lim_{س \to 0} \frac{١ - جتا س}{٣ س}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) -1 (د) غير موجودة.

(١٠) $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \frac{٤ + ٥ س}{\text{جتا } ٣ س} = ...$

(أ) −٤ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) −٣

(١١) $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا } \frac{س}{٣}}{٢ س} = ...$

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٦}$ (د) $\frac{١}{١٢}$

(١٢) 📖 $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \frac{٢ س + \text{جا } ٣ س}{\text{ظا } ٥ س} = ...$

(أ) ٥ (ب) $\frac{٦}{٥}$ (جـ) ١ (د) صفر

(١٣) $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا } ٢ س + ٥ \text{ جا } ٣ س}{س} = ...$

(أ) ٧ (ب) ٥ (جـ) ١٧ (د) ١٠

(١٤) $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \frac{٢ س + \text{جا } ٣ س}{٥ س + \text{ظا } ٢ س} = ...$

(أ) ١ (ب) $\frac{٥}{٧}$ (جـ) $\frac{٧}{٥}$ (د) −١

(١٥) $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا } ٣ س}{٥ س^{٢} - ٤ س} = ...$

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{-٣}{٤}$ (جـ) ٣ (د) $\frac{٣}{٥}$

(١٦) $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \frac{س \text{ جا } ٢ س}{س^{٢}} = ...$

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

(١٧) $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا } ٢ س \text{ جتا } ٣ س}{٦ س} = ...$

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) صفر

(١٨) $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا } ٣ س}{\text{ظا } \frac{١}{٣} س} = ...$

(أ) ٩ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) ٣ (د) ١

(١٩) 📖 $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا } \frac{١}{٢} س}{\text{جا } \frac{٣}{٤} س} = ...$

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) $\frac{٣}{٨}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

(٢٠) 📖 $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{ظا}^{٢} ٢ س}{س \text{ جا } ٣ س} = ...$

(أ) $\frac{٤}{٩}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

(٢١) $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^{\text{٢}} + \text{جا}^{\text{٢}}\ \text{٢س}}{\text{س ظا ٢س}}$ = ...

(أ) $\frac{\text{٢}}{\text{٥}}$ (ب) $\frac{\text{٥}}{\text{٢}}$ (جـ) ١ (د) ٥

(٢٢) $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهـــا}} \left(\frac{\text{جا ٢س}}{\text{٣س}} + \frac{\text{س جاس}^{\text{٢}}}{\text{جاس}^{\text{٢}}}\right)$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$ (جـ) $\frac{\text{٤}}{\text{٣}}$ (د) $\frac{\text{٥}}{\text{٣}}$

(٢٣) $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{جا}^{\text{٢}}\ \text{٩س} + \text{ظا ١٦س}^{\text{٢}}}{\text{٤س}^{\text{٢}}}$ = ...

(أ) $\frac{\text{٩٧}}{\text{٤}}$ (ب) $\frac{\text{٩٧}}{\text{١٦}}$ (جـ) $\frac{\text{٩}}{\text{٤}}$ (د) ٤

(٢٤) 📖 $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهـــا}}\ \text{٣س قتا ٢س}$ = ...

(أ) ٦ (ب) $\frac{\text{٣}}{\text{٢}}$ (جـ) $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$ (د) غير موجودة.

(٢٥) 📖 $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{جا ٢س ظا ٣س}}{\text{٤س}^{\text{٢}}}$ = ...

(أ) $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ (ب) $\frac{\text{٣}}{\text{٤}}$ (جـ) $\frac{\text{٣}}{\text{٢}}$ (د) ٦

(٢٦) $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{١} - \text{ظاس}}{\text{جاس} - \text{جتاس}}$ = ...

(أ) ١ (ب) − ١ (جـ) صفر (د) ليس لها وجود.

(٢٧) $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{١٢} - \text{١٢ جتاس}}{\text{س}}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١٢ (جـ) ١ (د) ٢٤

(٢٨) $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{جاس} - \text{جاس جتاس}}{\text{س}^{\text{٢}}}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٢٩) $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{جتاس} + \text{٢س} - \text{١}}{\text{٣س}}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$ (جـ) $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ (د) صفر

(٣٠) $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{١} - \text{جتاس} + \text{جا ٣س}}{\text{١} - \text{جتاس} + \text{ظا ٢س}}$ = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{\text{٣}}{\text{٢}}$ (جـ) ١ (د) $\frac{\text{٤}}{\text{٣}}$

(٣١) $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{١} - \text{قاس}}{\text{جتاس} - \text{١}}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) صفر (د) −١

(٣٢) إذا كان : $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{(أ + ٣)\,س}{\text{جا}\,أ\,س} = \frac{٢}{٥}$ فإن : أ = ...

(أ) −٥ (ب) −٣ (جـ) −١ (د) ٣

(٣٣) إذا كانت : $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^٢\,أ\,س - \text{طا}\,٢\,أ\,س^٢}{س^٢} = -١$ فإن : أ = ...

(أ) −١ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) ٤

(٣٤) إذا كان : $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,أ\,س}{ب\,س} = \frac{١}{٣}$ ، $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{طا}\,ب\,س}{حـ\,س} = \frac{٤}{٣}$ فإن : $\frac{أ}{حـ}$ = ...

(أ) ٤ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{٤}{٩}$ (د) $\frac{١}{١٢}$

(٣٥) إذا كان : $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,أ\,س}{\text{جا}\,ب\,س} = \frac{٣}{٥}$ فإن : $\frac{أ + ب}{أ - ب}$ = ...

(أ) −٤ (ب) ٨ (جـ) ٢ (د) ٤

(٣٦) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{(\text{جا}\,س + \text{جتا}\,س)^٢ - ١}{٢\,س}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) صفر

(٣٧) $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جا}^٢\,س}{\text{جتا}^٢\,س}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}\pi$ (د) صفر

(٣٨) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{\text{طا}\,(س - ١)}{(\sqrt{س} - ١)}$ = ...

(أ) ٢ (ب) صفر (جـ) −٢ (د) $\frac{١}{٢}$

(٣٩) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,(س - ١)}{س^٢ - ١}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) −١ (د) صفر

(٤٠) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{طا}\,(س - ٣)}{س^٢ - س - ٦}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{٨}{٣}$ (جـ) ٣ (د) −٣

(٤١) $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نها}} \frac{٣\,\text{جتا}\,س}{\pi - ٢\,س}$ = ...

(أ) ٣ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{-٣}{٢}$ (د) −٣

(٤٢) 📖 $\underset{س \to \pi}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,س}{\pi - س}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\pi^٢$ (جـ) π (د) $-\pi$

(٤٣) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١ - \text{جتا } س}{س^{٢}} = \text{.............}$

(أ) ١ (ب) ليس لها وجود. (جـ) صفر (د) $\frac{١}{٢}$

(٤٤) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}(\text{جا } س)}{٣ س} = \text{.............}$

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) ٣

(٤٥) 📖 $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا } س}{س} = \text{.............}$ حيث س بالتقدير الستينى.

(أ) ١ (ب) $\frac{\pi}{١٨٠}$ (جـ) $\frac{١٨٠}{\pi}$ (د) π

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد كلاً مما يأتى :

(١) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا } ٢ س}{\text{ظا } ٥ س}$ «$\frac{٢}{٥}$»

(٢) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا } \frac{س}{٥}}{\text{ظا } \frac{٢ س}{٣}}$ «$\frac{٣}{١٠}$»

(٣) 📖 $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا } ٣ س - \text{جا } ٢ س}{٥ س}$ «$\frac{١}{٥}$»

(٤) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا } س + \text{ظا } س}{\text{جا } س}$ «٢»

(٥) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{س \text{ جتا } ٣ س}{\text{ظا } ٢ س}$ «$\frac{١}{٢}$»

(٦) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{٥ س}{\text{جا } س} - \dfrac{\text{ظا } ٢ س}{س}\right)$ «٣»

(٧) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٣ س + \text{جا } س}{٢ س + \text{ظا } ٣ س}$ «$\frac{٤}{٥}$»

(٨) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٢ \text{ جا } س + ٤ \text{ ظا } ٢ س}{٢ س + \text{جا } ٣ س}$ «٢»

(٩) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا } س - ٣ \text{ ظا } س}{٥ س \text{ جتا } س}$ «$\frac{-٢}{٥}$»

(١٠) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٣ س}{٥ \text{ ظا } س - ٢ \text{ جا } ٢ س}$ «٣»

(١١) 📖 $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{س + س \text{ جتا } س}{\text{جا } س \text{ جتا } س}$ «٢»

(١٢) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا } ٣ س - \text{جا } ٤ س}{س^{٢} + ٢ س}$ «$-\frac{١}{٢}$»

(١٣) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٢} + \text{جا } ٣ س}{٥ س \text{ جتا } ٢ س}$ «$\frac{٣}{٥}$»

(١٤) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا } ٢ س + ٢ س \text{ جتا } س}{\text{جا } ٣ س}$ «$\frac{٤}{٣}$»

(١٥) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٢}{س} \text{ جا } \dfrac{س}{٧}$ «$\frac{٢}{٧}$»

(١٦) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{س} \left(\text{جا } \dfrac{س}{٥} + \text{ظا } \dfrac{س}{٥}\right)$ «$\frac{٢}{٥}$»

(١٧) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{٣}{٥ س} + ٤\right) \text{جا } ٤ س$ «$\frac{١٢}{٥}$»

(١٨) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}(٣ س - ٩)}{٢ س - ٦}$ «$\frac{٣}{٢}$»

(١٩) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا } ٢٤ س \times \text{جتا } ٦ س}{\text{ظا } ٦ س \times \text{جتا } ٢٤ س}$ «٤»

(٢٠) 📖 $\underset{س \to -\frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{س \text{ جتا}(-٢ س + ١)}{س^{٢} + س}$ «$\frac{٢}{٣}$»

(٢١) 📖 $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}^{٢} س}{س}$ «صفر»

٢ أوجد كلاً مما يأتي :

① $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^2 3\text{س}}{5\text{س}^2}$ «$\frac{9}{5}$»

② $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^2 3\text{س}}{\text{ظا}^2 2\text{س}}$ «$\frac{9}{4}$»

③ $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^2 \frac{\text{س}}{2}}{\text{س ظا } 2\text{س}}$ «$\frac{1}{8}$»

④ $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{س جا } 2\text{س}}{\text{جا س ظا } 3\text{س}}$ «$\frac{2}{3}$»

⑤ $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}^2 2\text{س}}{4\text{س}^2}$ «2»

⑥ $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^2 \text{ظا } 2\text{س}}{\text{جا}^4 2\text{س}}$ «$\frac{1}{8}$»

⑦ $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا } 4\text{س ظا}^2 5\text{س}}{\text{س}^2 \text{جا س}}$ «100»

⑧ $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{س ظا } 2\text{س}}{\text{س}^2 + \text{جا}^2 3\text{س}}$ «$\frac{1}{5}$»

⑨ $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^2 + \text{ظا}^2 2\text{س}}{2\text{س}^2 + \text{جا}^2 3\text{س}}$ «$\frac{5}{11}$»

⑩ $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{س ظا س}}{4\text{س}^2 - \text{جا}^2 3\text{س}}$ «$\frac{-1}{5}$»

⑪ $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{2\text{س}^3 + \text{س جا } 5\text{س}}{\text{س}^2 - \text{ظا}^2 3\text{س}}$ «$\frac{-5}{8}$»

⑫ $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{2\text{س} + 5\text{ ظا س} + 3\text{ جا س}}{\text{جا } 2\text{س جتا } 2\text{س}}$ «5»

⑬ $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{س جا } 2\text{س} + \text{جا}^2 2\text{س}}{\text{ظا}^2 3\text{س} + \text{س}^2}$ «$\frac{3}{5}$»

⑭ $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا } 3\text{س}^2 + \text{جا}^2 5\text{س}}{\text{س}^2}$ «28»

⑮ $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا } 5\text{س}^3 + \text{جا}^3 5\text{س}}{2\text{س}^3}$ «65»

⑯ $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \left(\frac{2\text{س}^2 + \text{جا } 3\text{س}}{2\text{س}^2 + \text{ظا } 6\text{س}}\right)^4$ «$\frac{1}{16}$»

⑰ $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}^2 \text{س} + \text{ظا}^2 3\text{س} + \text{ظا}^2 5\text{س}}{\text{س}^2}$ «35»

⑱ $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا س} \times \text{جا}^2 2\text{س} \times \text{جا}^3 4\text{س}}{\text{س}^6}$ «256»

⑲ $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا } 6\text{س} - \text{جا}(-3\text{س})}{\text{س}(\text{جتا } 5\text{س} + \text{جتا } 2\text{س})}$ «$\frac{9}{2}$»

⑳ $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا س}}{\sqrt{\text{س}+2} - \sqrt{2}}$ «$2\sqrt{2}$»

㉑ $\underset{\text{س}\to 3}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}(\text{س} - 3)}{\text{س}^3 - 27}$ «$\frac{1}{27}$»

㉒ $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(\text{س} - 1)}{\text{س}^2 + \text{س} - 2}$ «$\frac{1}{3}$»

٣ أوجد كلاً مما يأتي :

① $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{3(1 - \text{جتا س})}{\text{س}}$ «0»

② $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا س} - 1}{\text{جا س}}$ «0»

③ $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{1 - \text{جتا س} + \text{جا س}}{1 - \text{جتا س} - \text{جا س}}$ «-1»

④ $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{2 - \text{جتا } 3\text{س} - \text{جتا } 4\text{س}}{\text{س}}$ «0»

⑤ $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا س}(1 - \text{جتا س})}{\text{س}^2}$ «0»

⑥ $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{س} - \text{س جتا س}}{\text{جا}^2 3\text{س}}$ «0»

⑦ $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{1 - \text{جتا}^2 3\text{س}}{4\text{س}^2}$ «$\frac{9}{4}$»

⑧ $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{4\text{س}^2}{1 - \text{جتا}^2 \frac{1}{2}\text{س}}$ «16»

⑨ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٣ - ٣ \text{ جتا}^٢ \text{ ٤ س}}{\text{٨ س}^٢}$ «٦»

⑩ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{قا}^٢ \text{ س} - ١}{\text{س}^٢}$ «١»

⑪ 📖 $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتا س}}{\text{س}^٢}$ «$\frac{١}{٢}$»

⑫ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٤ - ٤ \text{ جتا س}}{\text{جا}^٢ \text{ ٣ س}}$ «$\frac{٢}{٩}$»

⑬ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتا ٢ س}}{\text{س ظا ٢ س}}$ «١»

⑭ 📖 $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتا ٣ س}}{\text{جتا}^٢ \text{ ٢ س} - ١}$ «$-\frac{٩}{٨}$»

④ أوجد كلاً مما يأتى :

① $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \text{ ظتا ٣ س جا ٥ س}$ «$\frac{٥}{٣}$»

② 📖 $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \text{ س (قتا ٢ س} - \text{ظتا ٣ س)}$ «$\frac{١}{٦}$»

③ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \text{ ٣ س ظا ٢ س قتا}^٢ \text{ ٣ س}$ «$\frac{٢}{٣}$»

④ 📖 $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \text{ ٦ س}^٢ \text{ قتا ٢ س ظتا س}$ «٣»

⑤ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \text{ قتا ٤ س جتا} \left(\frac{\pi}{٢} - \text{س}\right)$ «$\frac{١}{٤}$»

⑥ 📖 $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}}{\text{جتا} \left(\frac{\pi}{٢} - \text{س}\right)}$ «١»

⑦ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س ظتا}^٢ \text{ ٢ س}}{\text{قتا ٣ س}}$ «$\frac{٣}{٤}$»

⑧ $\underset{س \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا} \left(\text{٢ س} - \frac{\pi}{٢}\right)}{\text{٨ س} - ٢\pi}$ «$\frac{١}{٤}$»

⑨ $\underset{س \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا} \left(\text{٢ س} - \frac{\pi}{٢}\right)}{\text{ظا (٤ س} - \pi)}$ «$\frac{١}{٢}$»

⑩ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا} \left(\frac{\pi}{٢} - \text{س}\right)}{\text{ظتا} \left(\frac{\pi}{٢} - \text{٢ س}\right)}$ «$\frac{١}{٢}$»

⑪ $\underset{(\text{س} - \pi) \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا س}}{\text{س} - \pi}$ «−١»

⑫ $\underset{س \to -\pi}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا س}}{\text{س} + \pi}$ «١»

⑬ 📖 $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{٢ س} - \pi}{\text{جتا س}}$ «−٢»

⑭ $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظتا س}}{\pi - \text{٢ س}}$ «$\frac{١}{٢}$»

⑮ 📖 $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا } \pi \text{ س}}{١ - \text{س}}$ «π»

⑯ $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{١ + \text{س}}{\text{جتا } \frac{\pi}{٢} \text{ س}}$ «$\frac{٢}{\pi}$»

⑰ $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} (١ - \text{س}) \text{ ظا } \frac{\pi \text{ س}}{٢}$ «$\frac{٢}{\pi}$»

⑤ إذا كانت : $د(\text{س}) = \frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ أوجد :

① $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \text{ د (س)}$ «١»

② $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \text{ د (س)}$ «$\frac{٢}{\pi}$»

③ $\underset{س \to \pi}{\text{نهـا}} \text{ د (س)}$ «صفر»

⑥ أوجد كلاً مما يأتى :

① $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا (س} - ٥)}{\text{س}^٢ - ٢٥}$ «$\frac{١}{١٠}$»

② $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^٢ \text{ (س} - ٥)}{(\text{س} - ٥)^٢}$ «١»

③ $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا (س} - ٥)^٢}{(\text{س} - ٥)}$ «صفر»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا س} - \text{جتا}^{\text{أ}}\text{ س}}{\text{س}^٢} = ١$ فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) ٣

② $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \text{ س قتا}\left(\dfrac{٢\text{س} + \pi}{٢}\right) =$ ....

(أ) $\dfrac{\pi}{٢}$ (ب) صفر (جـ) −١ (د) $\dfrac{١}{٢}$

③ $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \dfrac{١ - \text{ظا س}}{\text{جتا س} - \text{جا س}} =$ ....

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ٢ (د) $\sqrt{٢}$

④ $\underset{\text{س} \to \sqrt{٥}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}(\text{س}^٢ - ٥)}{\text{ظا } \pi \text{ س}^٢} =$ ....

(أ) $\dfrac{٥}{\pi}$ (ب) $\dfrac{٢}{\pi}$ (جـ) $\dfrac{١}{\pi}$ (د) $\dfrac{-٥}{\pi}$

⑤ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا س} + \text{جا ٢س} + \text{جا ٣س} + \cdots + \text{جا ١٠ س}}{\text{ظا س} + \text{ظا ٢س} + \text{ظا ٣س} + \cdots + \text{ظا ١٠ س}} =$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ١٠ (د) ٥٥

---

٢ أوجد كلاً مما يأتى :

① $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{٣\text{ ظا}^٢\text{ س} - ٤\text{ ظا س} + ٧}{٥ + ٢\text{ ظا}^٢\text{ س}}$ « $\dfrac{٣}{٢}$ »

② $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}(\text{س}^٢ - \text{س} - ٢)}{\text{س} + ١}$ « −٣ »

③ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \text{ س}\left(\text{ظا}\dfrac{٤}{\text{س}} + \text{جا}\dfrac{٣}{\text{س}}\right)$ « ٧ »

④ 📖 $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}(\text{جا س})}{٥\text{ جا س}}$ « $\dfrac{١}{٥}$ »

⑤ 📖 $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}(١ - \text{جتا س})}{١ - \text{جتا س}}$ « ١ »

⑥ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا}(\text{ظا ٥ س})}{٤\text{ س}}$ « $\dfrac{٥}{٤}$ »

⑦ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{\text{س}}\left(\dfrac{٢\text{ ظا س}}{١ + \text{ظا}^٢\text{ س}}\right)$ « ٢ »

⑧ $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا}(\text{جتا س})}{٢\text{ س} - \pi}$ « $\dfrac{-١}{٢}$ »

⑨ $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{١ - \text{جا س}}{٢\text{ س} - \pi}$ « صفر »

⑩ $\underset{٢\text{س} \to \pi}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{\pi}{٢} - \text{س}\right) \text{ظتا}(\pi - ٢\text{ س})$ « $\dfrac{١}{٢}$ »

⑪ $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا س}}{\text{جتا ٣ س}}$ « $\dfrac{-١}{٣}$ »

الدرس 6

بحث وجود نهاية للدالة مجزأة المجال



نلاحظ أن الدالة د : د (س) = { ٢ س + ١ ، س < ٢ ؛ ٣ − س^٢ ، س ≥ ٢ } مجزأة المجال

أى أن د (س) = ٢ س + ١ لقيم س ∈]−∞ ، ٢[

د (س) = ٣ − س^٢ لقيم س ∈ [٢ ، ∞[

فمثلًا : د (−٣) = ٢ (−٣) + ١ = −٥ ، د (٤) = ٣ − (٤)^٢ = −١٣

وقد سبق وشرحنا كيفية إيجاد قيمة النهاية اليمنى واليسرى لمثل هذه الدوال بيانيًا ولكننا الآن نشرح كيفية تحقيق ذلك جبريًا (إن أمكن)

تعريف

الدالة د : د (س) تؤول للنهاية ل عندما س ← أ إذا وفقط إذا كانت نهايتاها اليمنى واليسرى عند أ موجودتين وكل منهما تساوى ل

أى أن نها (س ← أ) د (س) = ل ⟺ د (أ^+) = د (أ^−) = ل

ملاحظات

١) عند إيجاد نها (س ← أ) د (س) ليس من الضرورى أن تكون الدالة معرفة عند س = أ ، فقط يجب أن تكون معرفة فى فترة على يسار أ وفترة أخرى على يمين أ

٢) عند إيجاد نها (س ← أ) د (س) يراعى بحث كل من النهاية اليمنى والنهاية اليسرى للدالة ثم المقارنة بين النهايتين (إن وجدتا) كما يلى :

* إذا كان : د (أ^+) = د (أ^−) = ل فإن : نها (س ← أ) د (س) = ل
* إذا كان : د (أ^+) ≠ د (أ^−) فإن : نها (س ← أ) د (س) غير موجودة

٣) أما إذا كانت قاعدة الدالة واحدة على يمين ويسار أ مباشرة فيمكن بحث نهاية الدالة مباشرة دون بحث النهاية اليمنى واليسرى.

مثال ١

إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} ٣س + ١ & ، س < ١ \\ ٥ - س & ، س > ١ \end{cases}$ فأوجد كلًا من :

[١] $\lim_{س \to -٢} د(س)$ [٢] $\lim_{س \to ٢} د(س)$ [٣] $\lim_{س \to ١} د(س)$

الحـــل

[١] ∵ الدالة لها نفس القاعدة على يمين ويسار س = -٢ مباشرة وهى $د(س) = ٣س + ١$

∴ $\lim_{س \to -٢} د(س) = \lim_{س \to -٢} (٣س + ١) = ٣(-٢) + ١ = -٥$

[٢] ∵ الدالة لها نفس القاعدة على يمين ويسار س = ٢ مباشرة وهى : $د(س) = ٥ - س$

∴ $\lim_{س \to ٢} د(س) = \lim_{س \to ٢} (٥ - س) = ٥ - ٢ = ٣$

[٣] ∵ قاعدة الدالة على يسار ١ تختلف عن قاعدتها على يمين ١ لذلك يجب بحث كل من النهاية اليمنى واليسرى للدالة عند س = ١

∵ $د(١^-) = \lim_{س \to ١^-} (٣س + ١) = ٣ \times ١ + ١ = ٤$

، $د(١^+) = \lim_{س \to ١^+} (٥ - س) = ٥ - ١ = ٤$

∴ $د(١^-) = د(١^+) = ٤$

∴ $\lim_{س \to ١} د(س) = ٤$

> **لاحظ أن**
> الدالة د قاعدتها على يسار س = ١
> هى : $د(س) = ٣س + ١$
> وقاعدتها على يمين س = ١
> هى : $د(س) = ٥ - س$

مثال ٢

إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} س^٢ + ٢ & ، س \leq -٢ \\ ٢س + ٣ & ، س > -٢ \end{cases}$ فابحث وجود : $\lim_{س \to -٢} د(س)$

الحـــل

∵ $د(-٢^-) = \lim_{س \to -٢^-} (س^٢ + ٢) = (-٢)^٢ + ٢ = ٦$

، $د(-٢^+) = \lim_{س \to -٢^+} (٢س + ٣) = ٢(-٢) + ٣ = -١$

∵ $د(-٢^-) \neq د(-٢^+)$

∴ $\lim_{س \to -٢} د(س)$ غير موجودة.

> **لاحظ أنه**
> رغم أن الدالة معرفة عند س = -٢
> حيث $د(-٢) = ٦$ إلا أن ذلك
> لا دخل له فى وجود أو عدم
> وجود نهاية للدالة عند س = -٢

مثال ٣

إذا كانت : د (س) = $\frac{|س - ٣|}{س - ٣}$ ابحث وجود : $\lim_{س \to ٣}$ د (س)

الحل

∵ |س − ٣| = $\begin{cases} س - ٣ & ، س \geq ٣ \\ -(س - ٣) & ، س < ٣ \end{cases}$

∴ د (س) = $\begin{cases} \frac{س - ٣}{س - ٣} & ، س > ٣ \\ \frac{-(س - ٣)}{س - ٣} & ، س < ٣ \end{cases}$ = $\begin{cases} ١ & ، س > ٣ \\ -١ & ، س < ٣ \end{cases}$

∴ د (٣^+) = ١ ، د (٣^-) = −١ ∴ د (٣^+) ≠ د (٣^-)

∴ $\lim_{س \to ٣}$ د (س) غير موجودة.

مثال ٤

إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} س|س| - ١ & ، س < ٠ \\ \frac{|س|}{س} - ٢ & ، س > ٠ \end{cases}$ فأوجد : $\lim_{س \to ٠}$ د (س)

الحل

∵ |س| = $\begin{cases} س & ، س \geq ٠ \\ -س & ، س < ٠ \end{cases}$

∴ د (س) = $\begin{cases} س(-س) - ١ & ، س < ٠ \\ \frac{س}{س} - ٢ & ، س > ٠ \end{cases}$ = $\begin{cases} -س^٢ - ١ & ، س < ٠ \\ -١ & ، س > ٠ \end{cases}$

∵ د (٠^-) = $\lim_{س \to ٠^-}$ ($-س^٢ - ١$) = −١ ، د (٠^+) = $\lim_{س \to ٠^+}$ (−١) = −١

∴ د (٠^-) = د (٠^+) = −١ ∴ $\lim_{س \to ٠}$ د (س) = −١

ملاحظة

إذا كانت : ص = |د (س)| حيث د دالة كثيرة حدود فإن : $\lim_{س \to أ}$ ص = |د (أ)|

وذلك باستخدام التعويض المباشر (ولا داعي لإعادة تعريف المقياس).

فمثلاً : إذا كانت : د (س) = |$س^٢$ − ٤ س + ٣| فإن : $\lim_{س \to ٣}$ د (س) = صفر

، إذا كانت : د (س) = |س + ١| − |س − ٣| فإن : $\lim_{س \to ٢}$ د (س) = ٤

مثال ٥

إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} ٢ س + ٤ & ، س < -٣ \\ ٣ س + ٧ & ، -٣ < س < ٥ \\ ٥ - س & ، س > ٥ \end{cases}$

فابحث وجود : [١] $\lim_{س \to -٣}$ د (س) [٢] $\lim_{س \to ٥}$ د (س)

الحل

[١] د (-٣^-) = $\lim_{س \to -٣^-}$ (٢ س + ٤) = -٦ + ٤ = -٢

، د (-٣^+) = $\lim_{س \to -٣^+}$ (٣ س + ٧) = ٣ (-٣) + ٧ = -٢

∴ د (-٣^-) = د (-٣^+) = -٢ ∴ $\lim_{س \to -٣}$ د (س) = -٢

[٢] د (٥^-) = $\lim_{س \to ٥^-}$ (٣ س + ٧) = ١٥ + ٧ = ٢٢

، د (٥^+) = $\lim_{س \to ٥^+}$ (٥ - س) = ٥ - ٥ = صفر

∵ د (٥^-) ≠ د (٥^+) ∴ $\lim_{س \to ٥}$ د (س) غير موجودة.

مثال ٦

إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{جا (س - ٤)}{(س - ٤)} & ، س < ٤ \\ ظا \frac{\pi}{١٦} س & ، ٤ < س < ٨ \end{cases}$ أوجد : $\lim_{س \to ٤}$ د (س)

الحل

د (٤^-) = $\lim_{س \to ٤^-} \frac{جا (س - ٤)}{(س - ٤)} = \lim_{(س - ٤) \to ٠} \frac{جا (س - ٤)}{(س - ٤)} = ١$

، د (٤^+) = $\lim_{س \to ٤^+}$ ظا $\frac{\pi}{١٦}$ س = ظا $\frac{\pi}{٤}$ = ١

∴ د (٤^-) = د (٤^+) = ١ ∴ $\lim_{س \to ٤}$ د (س) = ١

نهاية الدالة المعرفة على فترة عند أحد طرفيها

إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة المفتوحة]أ ، ب[أو المغلقة [أ ، ب] فإننا نلاحظ أن :

[١] الدالة ليست معرفة على يسار النقطة أ فإننا نبحث النهاية اليمنى فقط [د $(أ^+)$]

وتكون فى هذه الحالة : $\lim_{س \to أ^-}$ د (س) ، $\lim_{س \to أ}$ د (س) غير موجودتين.

٢ الدالة ليست معرفة على يمين النقطة ب فإننا نبحث النهاية اليسرى فقط [د (ب^-)]

وتكون فى هذه الحالة : $\lim\limits_{\text{س} \to \text{ب}^+} \text{د}(\text{س})$ ، $\lim\limits_{\text{س} \to \text{ب}} \text{د}(\text{س})$ غير موجودتين.

أى أن : نهاية الدالة عند النقطة الطرفية غير موجودة ويكون للدالة عند هذه النقطة نهاية من جهة واحدة فقط [يمنى أو يسرى]

مثال ٧

إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{٢\,\text{س}}{\text{جا}\,\text{س}} & ، \quad \dfrac{-\pi}{٢} < \text{س} < ٠ \\ ٢\,\text{جتا}\,\dfrac{٤}{٣}\,\text{س} & ، \quad ٠ < \text{س} < \dfrac{\pi}{٢} \end{cases}$

ابحث وجود : ١ د $\left(-\dfrac{\pi}{٢}^+\right)$ ، د $\left(-\dfrac{\pi}{٢}^-\right)$ ، $\lim\limits_{\text{س} \to -\frac{\pi}{٢}} \text{د}(\text{س})$

٢ $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \text{د}(\text{س})$ ٣ $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}} \text{د}(\text{س})$

الحـــل



مجال الدالة د هو $\left]-\dfrac{\pi}{٢} ، \dfrac{\pi}{٢}\right[- \{٠\}$

١ د $\left(-\dfrac{\pi}{٢}^+\right) = \lim\limits_{\text{س} \to -\frac{\pi}{٢}^+} \text{د}(\text{س}) = \lim\limits_{\text{س} \to -\frac{\pi}{٢}^+} \dfrac{٢\,\text{س}}{\text{جا}\,\text{س}} = \dfrac{-\pi}{\text{جا}\,\frac{-\pi}{٢}} = \dfrac{-\pi}{-١} = \pi$

، د $\left(-\dfrac{\pi}{٢}^-\right)$ غير موجودة.

$\therefore \lim\limits_{\text{س} \to -\frac{\pi}{٢}} \text{د}(\text{س})$ غير موجودة [لأن الدالة غير معرفة على يسار س $= \dfrac{-\pi}{٢}$]

٢ $\because$ د معرفة على يسار ويمين س = ٠ بقاعدتين مختلفتين

$\therefore$ د $(٠^-) = \lim\limits_{\text{س} \to ٠^-} \dfrac{٢\,\text{س}}{\text{جا}\,\text{س}} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠^-} \dfrac{٢ \times ١}{\frac{\text{جا}\,\text{س}}{\text{س}}} = ٢ \times ١ = ٢$

، د $(٠^+) = \lim\limits_{\text{س} \to ٠^+} ٢\,\text{جتا}\,\dfrac{٤\,\text{س}}{٣} = ٢\,\text{جتا}\,٠ = ٢ \times ١ = ٢$

$\because$ د $(٠^-) =$ د $(٠^+) = ٢$ $\therefore \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \text{د}(\text{س}) = ٢$

٣ $\because$ د معرفة فقط على يسار س $= \dfrac{\pi}{٢}$

$\therefore \lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}} \text{د}(\text{س})$ غير موجودة.

مثال ٨

ابحث وجود نهاية للدالة د : د (س) = $\sqrt{\text{س} - ٣}$ عندما س ← ٣

الحـــل



مجال الدالة هو [٣ ، ∞[

∴ الدالة د معرفة فقط على يمين س = ٣

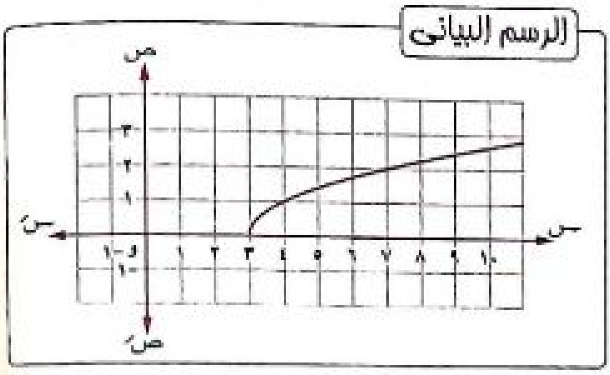
∴ $\lim\limits_{\text{س} \to ٣^+} \text{د (س)} = \lim\limits_{\text{س} \to ٣^+} \sqrt{\text{س} - ٣}$

= صفر

، $\lim\limits_{\text{س} \to ٣^-}$ د (س) غير موجودة

[لأن الدالة غير معرفة على يسار ٣]

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to ٣}$ د (س) غير موجودة.



مثال ٩

إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \dfrac{(\text{س} + ٢)^2 - ٤}{\text{س}^2 + \text{س}} & \text{، س} > ٠ \\ \dfrac{١ - \text{حتا}^2\, ٢\,\text{س}}{\text{س}^2} & \text{، س} < ٠ \end{cases}$ أوجد : $\lim\limits_{\text{س} \to ٠}$ د (س)

الحـــل

∵ د $(٠^+) = \lim\limits_{\text{س} \to ٠^+} \dfrac{(\text{س} + ٢)^2 - ٤}{\text{س}^2 + \text{س}} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠^+} \dfrac{\text{س}^2 + ٤\,\text{س} + \cancel{٤} - \cancel{٤}}{\text{س}\,(\text{س} + ١)}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to ٠^+} \dfrac{\text{س}\,(\text{س} + ٤)}{\text{س}\,(\text{س} + ١)} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠^+} \dfrac{\text{س} + ٤}{\text{س} + ١} = ٤$

، د $(٠^-) = \lim\limits_{\text{س} \to ٠^-} \dfrac{١ - \text{حتا}^2\, ٢\,\text{س}}{\text{س}^2} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠^-} \dfrac{\text{حا}^2\, ٢\,\text{س}}{\text{س}^2} = ٢^2 = ٤$

∴ د (٠^+) = د (٠^-) = ٤ ∴ $\lim\limits_{\text{س} \to ٠}$ د (س) = ٤

مثال ١٠

إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \text{ظا } ٤\,\text{س قتا } ٩\,\text{س} & \text{، } -\dfrac{\pi}{٩} < \text{س} < ٠ \\ \dfrac{١}{٩}\,(\text{أ}^2 + ٢) & \text{، س} > ٠ \end{cases}$ لها نهاية عند س = ٠ .

أوجد قيمة : أ

الحـــل

$د(\cdot^-) = \lim_{س \to \cdot^-} طا ٤ س \, قتا ٩ س = \lim_{س \to \cdot^-} \frac{طا ٤ س}{طا ٩ س} = \lim_{س \to \cdot^-} \frac{\frac{طا ٤ س}{س}}{\frac{طا ٩ س}{س}} = \frac{٤}{٩}$

، $د(\cdot^+) = \frac{١}{٩} (أ^٢ + ٢)$

، ∵ الدالة لها نهاية عند س = ٠ ∴ $د(\cdot^-) = د(\cdot^+)$ ∴ $\frac{١}{٩}(أ^٢ + ٢) = \frac{٤}{٩}$

∴ $أ^٢ + ٢ = ٤$ ∴ $أ^٢ = ٢$ ∴ $أ = \pm \sqrt{٢}$

مثال ⓫

إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} س & ، \quad س \geq ٠ \\ \frac{١}{س} & ، \quad س < ٠ \end{cases}$

أوجد : [١] $\lim_{س \to \cdot^+} د(س)$ [٢] $\lim_{س \to \cdot^-} د(س)$ [٣] $\lim_{س \to ٠} د(س)$

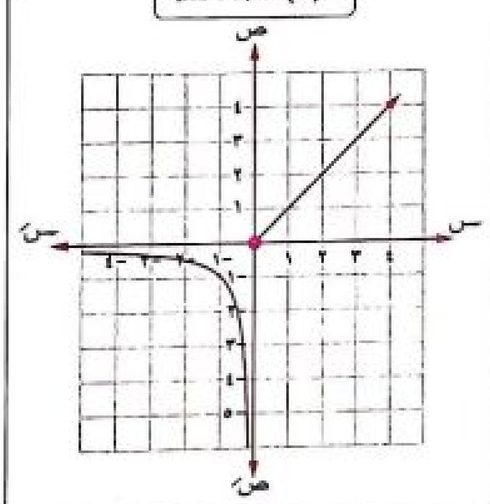
الحـــل

[١] $\lim_{س \to \cdot^+} د(س) = \lim_{س \to \cdot^+} س = $ صفر

[٢] $\lim_{س \to \cdot^-} د(س) = \lim_{س \to \cdot^-} \frac{١}{س} = -\infty$

[٣] $\lim_{س \to ٠} د(س)$ غير موجودة.

الرسم للاطلاع فقط



مثال ⓬

ابحث وجود : $\lim_{س \to ٠} \frac{طا |س|}{س}$

الحـــل

∵ $|س| = \begin{cases} س & ، \quad س \geq ٠ \\ -س & ، \quad س < ٠ \end{cases}$ ∴ $\lim_{س \to \cdot^+} \frac{طا (س)}{س} = ١$

، $\lim_{س \to \cdot^-} \frac{طا (-س)}{س} = -١$ ∴ النهاية اليمنى ≠ النهاية اليسرى

∴ $\lim_{س \to ٠} \frac{طا |س|}{س}$ غير موجودة.

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} -٢ & ، س < ٠ \\ ١ & ، س > ٠ \end{cases}$ فإن :

أولًا : $\underset{س \leftarrow -٢}{نهـا} د(س) = ...$

(أ) −٢ (ب) ١ (جـ) −١ (د) غير موجودة.

ثانيًا : $\underset{س \leftarrow ٤}{نهـا} د(س) = ...$

(أ) −٢ (ب) ١ (جـ) −١ (د) غير موجودة.

ثالثًا : $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} د(س) = ...$

(أ) −٢ (ب) ١ (جـ) −١ (د) غير موجودة.

② إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} س^٢ - ١ & ، س < ٢ \\ ٣س + ١ & ، س \geq ٢ \end{cases}$ فإن : $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} د(س) = ...$

(أ) ليس لها وجود. (ب) ٣ (جـ) ٨ (د) ٧

③ $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{|س - ٢|}{س - ٢} = ...$ ، $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} \frac{|س - ٢|}{س - ٢} = ...$

(أ) غير موجودة ، صفر (ب) غير موجودتين. (جـ) غير موجودة ، −١ (د) ١ ، −١

④ إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} ٣س - ١ & ، س \neq ٢ \\ ٦ & ، س = ٢ \end{cases}$ فإن : $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} د(س) = ...$

(أ) −٥ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ليس لها وجود.

⑤ إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} ٣ - س & ، س < ١ \\ ٤ & ، س = ١ \\ س^٢ + ١ & ، س > ١ \end{cases}$ فإن : $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} د(س) = ...$

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) غير موجودة.

⑥ إذا كانت د (س) = $\begin{cases} \frac{\text{جاس}}{\text{س}} & ، -\frac{\pi}{2} < \text{س} < 0 \\ \text{جتاس} & ، 0 < \text{س} < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ فإن : $\underset{\text{س} \leftarrow \text{صفر}}{\text{نهـا}}$ د (س) = ...

(أ) $\frac{2}{\pi}$ (ب) $\frac{\pi}{2}$ (جـ) ١ (د) صفر

⑦ إذا كانت د (س) = $\begin{cases} \frac{\text{س}^2 - 4}{\text{س} - 2} & ، \text{س} \neq 2 \\ \text{طا} \frac{\pi}{2}\text{س} & ، \text{س} = 2 \end{cases}$ فإن : $\underset{\text{س} \leftarrow 2}{\text{نهـا}}$ د (س) = ...

(أ) ١ (ب) $\sqrt{2}$ (جـ) ٤ (د) غير موجودة.

⑧ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{2\ \text{جاس}}{\pi - \text{س}} & ، \text{س} < \pi \\ 1 - \text{جتاس} & ، \text{س} > \pi \end{cases}$ فإن : $\underset{\text{س} \leftarrow \pi}{\text{نهـا}}$ د (س) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) غير موجودة. (د) صفر

⑨ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{\text{جا}(\text{س} - 1)}{(\text{س} - 1)} & ، \text{س} < 1 \\ \text{طا} \frac{\pi \text{س}}{4} & ، 1 < \text{س} < 2 \end{cases}$ فإن : $\underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{نهـا}}$ د (س) = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{1}{4}$ (جـ) $\frac{\pi}{4}$ (د) غير موجودة.

⑩ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{2\text{س} + \text{جاس}}{\text{طا}2\text{س} + 4\text{س}} & ، 0 < \text{س} < \frac{\pi}{4} \\ 5\text{س} + \frac{1}{2} & ، \text{س} < 0 \end{cases}$ فإن : $\underset{\text{س} \leftarrow 0}{\text{نهـا}}$ د (س) = ...

(أ) $\frac{3}{5}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) غير موجودة.

⑪ د (س) = $\begin{cases} \text{س} + 1 & \text{عندما س} < \text{أ} \\ 3\text{س} - 1 & \text{عندما س} > \text{أ} \end{cases}$ ، $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}}$ د (س) موجودة فإن : أ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

⑫ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \text{جا}4\text{س}\ \text{طتا}9\text{س} & ، \frac{-\pi}{18} < \text{س} < 0 \\ 4\text{س} + \text{أ}^2 & ، \text{س} > 0 \end{cases}$ وكانت : $\underset{\text{س} \leftarrow 0}{\text{نهـا}}$ د (س) موجودة

فإن : أ = ...

(أ) $\frac{4}{9}$ (ب) $\frac{2}{3}$ (جـ) $\pm\frac{2}{3}$ (د) $\pm\frac{4}{9}$

⑬ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \text{أ} + \text{جتاس} & ، \text{س} < 0 \\ \frac{\text{طا}2\text{س}}{\text{أس}} & ، 0 < \text{س} < \frac{\pi}{4} \end{cases}$ وكانت $\underset{\text{س} \leftarrow 0}{\text{نهـا}}$ د (س) موجودة

فإن : أ = ...

(أ) صفر أ، ١ (ب) ١ أ، −٢ (جـ) ٢ أ، ٣ (د) ١ أ، ٢

(١٤) إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{ظا } ٢\text{س}}{\text{لو}_٢ ٨^{\text{س}}} & ، \ -\dfrac{\pi}{٤} < \text{س} < ٠ \\ \text{س} + \dfrac{٢}{٣} & ، \ \text{س} > ٠ \end{cases}$ فإن : $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \text{د}(\text{س}) = $ ....

(أ) ٢ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) غير موجودة.

(١٥) 📖 إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{ظا س}}{\pi - ٢\text{س}} & ، \ ٠ < \text{س} < \dfrac{\pi}{٢} \\ \text{جا}(\pi - \text{س}) & ، \ \text{س} > \dfrac{\pi}{٢} \end{cases}$

فإن : $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}} \text{د}(\text{س}) = $ ....

(أ) ٢ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) π (د) غير موجودة.

(١٦) إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{جا}^٢ ٢\text{س}}{\text{س}^٢} & ، \ \text{س} < ٠ \\ ٢\text{أ} + ٣ \text{ جتا س} & ، \ \text{س} > ٠ \end{cases}$ وكانت $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \text{د}(\text{س})$ موجودة.

فإن : أ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) $-\frac{١}{٢}$

(١٧) إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{٢\text{س} - |\text{س}^٢|}{\text{س}} & ، \ \text{س} < ٠ \\ ٣\text{أ} + ٤\text{س} & ، \ \text{س} > ٠ \end{cases}$ وكانت : $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \text{د}(\text{س})$ موجودة.

فإن : أ = ...

(أ) صفر (ب) $-\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{٤}{٣}$ (د) ١

(١٨) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\sqrt{١ - \text{جتا}^٢ \text{س}}}{\text{س}} = $ ....

(أ) ١ (ب) ١− (جـ) ٢ (د) صفر

(١٩) إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{٢\text{س} - ٦}{|\text{س} - ٣|}$ فإن : $\left(\text{د}(٣^+)\right)^٢ + \left(\text{د}(٣^-)\right)^٢ = $ ....

(أ) ٨ (ب) صفر (جـ) ٤ (د) ٤−

(٢٠) إذا كان : $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \dfrac{\text{س}^٢ - \text{أ}^٢}{\text{س} - \text{أ}} = \lim\limits_{\text{س} \to -٢} (|\text{س}| + ٨)$ فإن : أ = ...

(أ) ٥ (ب) ٥− (جـ) ٤ (د) ١٠

(٢١) إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^٦ - ٦٤}{\text{س}^٤ - ١٦} & ، \ \text{س} < ٢ \\ \text{أس} & ، \ \text{س} > ٢ \end{cases}$ حيث $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \text{د}(\text{س})$ لها وجود

فإن : قيمة أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٦

(٢٢) إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} أ\,جتا\,س + \frac{١٥\,جا\,س}{س} & ،\ س > ٠ \\ \frac{س^٦ - ٦٤}{س^٣ - ٨} & ،\ س < ٠ \end{cases}$ وكانت د (س) لها نهاية عندما س = ٠

فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) −٥ (جـ) −٧ (د) ٧

(٢٣) إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} ٣س^٢ + أس - ٢ & ،\ س > ٣ \\ ٢س + ب & ،\ س < ٣ \end{cases}$ لها نهاية عند س = ٣ وتساوى ١٦

فإن : أ + ب = ...

(أ) ٤ (ب) ١٠ (جـ) −١٣ (د) ٧

(٢٤) إذا كانت الدالة د نهايتها موجودة عندما س ← −٣ حيث

$د(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ + ٢س - ٣}{س + ٣} & \text{عندما } س > -٣ \\ س + أ & \text{عندما } س < -٣ \end{cases}$ فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) −١

(٢٥) إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} ٣س - ٢ & ،\ س < -١ \\ أس + ب & ،\ -١ < س < ٣ \\ ٦ - س & ،\ س > ٣ \end{cases}$ لها نهاية عند س = −١ ، س = ٣

فإن : أ + ب = ...

(أ) ٢ (ب) −٣ (جـ) −١ (د) صفر

(٢٦) إذا كانت الدالة د : $د(س) = \begin{cases} \frac{أس}{\sqrt{س + ٤} - ٢} & ،\ س > ٠ \\ \frac{جا\,٢س}{أس} & ،\ س < ٠ \end{cases}$ لها نهاية عند س = ٠

فإن : أ = ...

(أ) $\pm \frac{١}{٢}$ (ب) $\pm \frac{١}{\sqrt{٢}}$ (جـ) $\pm \frac{١}{\sqrt{٢}}$ (د) $\frac{١}{٤}$

ثانيًا / الأسئلة المقالية

١ إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ & ،\ س < ٢ \\ ٢س + ١ & ،\ س \geq ٢ \end{cases}$ أوجد : $\lim_{س \to ٢} د(س)$ «١٠٠»

---

٢ إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - ٧س + ١٢}{س - ٣} & ،\ س > ٣ \\ ٢س - ٧ & ،\ س < ٣ \end{cases}$ ابحث وجود : $\lim_{س \to ٣} د(س)$ «١-٠»

3 إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{3\text{س}}{\text{جا س}} & ، -\pi < \text{س} < 0 \\ \text{جتا } 2\text{س} & ، \text{س} > 0 \end{cases}$ ابحث وجود : $\lim_{\text{س} \to 0}$ د (س) «غير موجودة»

4 إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{5\text{س} + \text{ظا } 2\text{س}}{6\text{س} + \text{جا س}} & ، 0 < \text{س} < \frac{\pi}{4} \\ \text{جتا س} & ، \text{س} < 0 \end{cases}$ ابحث وجود : $\lim_{\text{س} \to 0}$ د (س) «1»

5 إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \text{س} - 2 & ، \text{س} < 0 \\ \text{س}^2 & ، 0 \le \text{س} \le 2 \\ 2\text{س} & ، \text{س} > 2 \end{cases}$ فابحث وجود كل مما يأتي :

(1) $\lim_{\text{س} \to 0}$ د (س) (2) $\lim_{\text{س} \to 1}$ د (س) (3) $\lim_{\text{س} \to 2}$ د (س) «غير موجودة ، 1 ، 4»

6 إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} |\text{س} - 3| & ، \text{س} \ne 3 \\ 2 & ، \text{س} = 3 \end{cases}$ ابحث وجود : $\lim_{\text{س} \to 3}$ د (س) «صفر»

7 إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س} + 1} - 1} & ، \text{س} > 0 \\ \frac{2\text{س}}{\text{جا س}} & ، -\pi < \text{س} < 0 \end{cases}$ أوجد : $\lim_{\text{س} \to 0}$ د (س) «2»

8 إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{(\text{س} - 3)^2 - 1}{\text{س} - 4} & ، \text{س} > 4 \\ \text{س} + 2 & ، \text{س} < 4 \end{cases}$ أوجد : $\lim_{\text{س} \to 4}$ د (س) «6»

9 أوجد قيمة كل من : م ، ك إذا كانت :

$\lim_{\text{س} \to 2}$ د (س) = 7 ، د (س) = $\begin{cases} \text{س}^2 + 3\text{م} & ، \text{س} < 2 \\ 5\text{س} + \text{ك} & ، \text{س} > 2 \end{cases}$ «1 ، -3»

10 إذا كانت : $\lim_{\text{س} \to 0}$ د (س) = 2 حيث د (س) = $\begin{cases} \frac{\text{جا } 2\text{س}}{\text{س}} & ، \text{س} > 0 \\ \text{أ جتا } 2\text{س} & ، \text{س} < 0 \end{cases}$

فأوجد قيمة : أ «2»

11 إذا كانت : $\lim_{\text{س} \to \text{أ}}$ | 3س + 2 | = 14 فما قيمة : (أ) ؟ «4 ، $\frac{-16}{3}$»

12 ابحث وجود نهاية للدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{3\text{س}}{\text{ظا س}} & ، -\frac{\pi}{2} < \text{س} < 0 \\ 3\text{ جتا س} & ، 0 < \text{س} < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

(1) عندما س ← $\frac{-\pi}{2}$ (2) س ← $\frac{\pi}{2}$

(3) س ← 0 «غير موجودة ، غير موجودة ، 3»

١٣ إذا كانت : د (س) = $س^2 + \frac{\sqrt{س^2 - ٦س + ٩}}{س - ٣}$ ابحث وجود : $\lim_{س \to ٣}$ د (س) «غير موجودة»

١٤ إذا كانت : د (س) = $\frac{س^2 + ٢\sqrt{س^2}}{س}$ ابحث وجود : $\lim_{س \to ٠}$ د (س) «غير موجودة»

١٥ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} س\,|س| + ٢ & ، س < ٠ \\ \frac{|س|}{س} + ١ & ، س > ٠ \end{cases}$ أوجد : $\lim_{س \to ٠}$ د (س) «٢»

١٦ أوجد قيمة م حتى تكون د (س) لها نهاية عندما س ← ١ حيث :

$$د (س) = \begin{cases} \frac{(س - ١)^2}{|س - ١|} & ، س < ١ \\ ٦س - ٣م & ، س > ١ \end{cases}$$ «٢»

١٧ ابحث وجود $\lim_{س \to ١}$ [(د + ر) (س)] حيث :

$$د (س) = \begin{cases} س^2 + ٣ & ، س \geq ١ \\ ٤ - ٢س & ، س < ١ \end{cases} \quad ، \quad ر (س) = \begin{cases} -٣س & ، س \geq ١ \\ ٢س^2 - ٣س & ، س < ١ \end{cases}$$ «١»

١٨ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{أس}{\sqrt{س + ٤} - ٢} & ، س > ٠ \\ \frac{١}{أس قتا ٣س} & ، -\pi < س < ٠ \end{cases}$ لها نهاية عند س = ٠

أوجد قيمة : أ «$\pm \frac{\sqrt{٣}}{٢}$»

١٩ أوجد قيمة النهاية اليمنى واليسرى ثم استنتج قيمة النهاية إن وجدت لكل من الدوال الآتية عند النقطة المبينة :

① د (س) = $\sqrt{س - ٥}$ عند س = ٥

② د (س) = $\sqrt{٣ - س}$ عند س = ٣

③ د (س) = $\sqrt{س^2 - ١}$ عند س = -١ ، س = ١

④ د (س) = $\sqrt{٤ - س^2}$ عند س = -٢ ، س = ٢

٢٠ ابحث وجود نهاية كل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين عند النقطة المبينة :

① د (س) = $\begin{cases} \frac{(س + ٢)^6 - ٦٤}{س^2 + ٣٢س} & ، -٥ < س < ٠ \\ \frac{-١٢س}{١ - (جاس + جتاس)^2} & ، ٠ < س < \frac{\pi}{٢} \end{cases}$ عند س = ٠ «٦»

② د (س) = $\begin{cases} \frac{١ - جتاس}{جا^2 ٣س} & ، \frac{-\pi}{٢} < س < ٠ \\ -\frac{١}{٢} س^2 جتا ٦س (١ - قتا^2 ٣س) & ، ٠ < س < \frac{\pi}{٣} \end{cases}$ عند س = ٠ «$\frac{١}{١٨}$»

٢١ ابحث وجود كل مما يأتى :

① $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \dfrac{جا|س|}{س}$

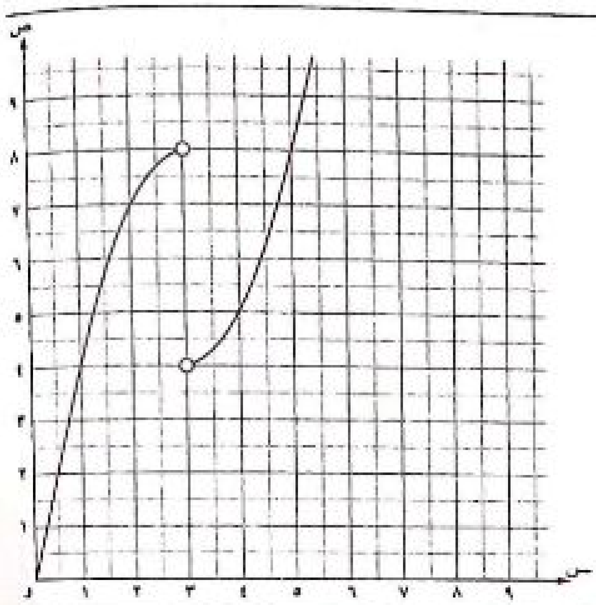
② $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \dfrac{ظا|س|}{س + ١}$ حيث س بالتقدير الدائرى. «غير موجودة ، ١»

---

٢٢ ابحث وجود : $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \dfrac{\sqrt{قا^{٢} س - ١}}{س}$ «غير موجودة»

---

٢٣ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة هـ (س)



وكان :

$$ع(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & ، س < ٣ \\ ٤ س + ٢ & ، س > ٣ \end{cases}$$

أوجد : $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \left(ع(س) + هـ(س) \right)$ «١٨»

---

٢٤ أوجد قيمة النهاية اليمنى واليسرى ثم استنتج قيمة النهاية لكل من الدوال الآتية عند النقطة المبينة :

① 📖 $د(س) = \dfrac{١}{س - ٢}$ عند $س = ٢$

② $د(س) = \dfrac{١}{|س - ٣|}$ عند $س = ٣$

③ $د(س) = \begin{cases} س - ٢ & ، س > ١ \\ \dfrac{١}{س - ١} & ، س < ١ \end{cases}$ عند $س = ١$

---

٢٥ إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} ١ + \dfrac{س^{٢} + ٢ س}{|س + ٢|} & ، س \in]-٣ ، ٠[- \{-٢\} \\ ٢ س + ١ & ، س \in]٠ ، ٢[\end{cases}$

أوجد :

① $\underset{س \leftarrow -٢}{نهـا} د(س)$

② $\underset{س \leftarrow -٢}{نهـا} د(س)$

③ $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} د(س)$

④ $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} د(س)$

---

٢٦ إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[٣]{٢ س - ٣} - ١}{\sqrt[٥]{٣ س - ٥} - ١} & ، س > ٢ \\ ك س & ، س < ٢ \end{cases}$ لها نهاية عند $س = ٢$ أوجد قيمة : ك «$\frac{٥}{٩}$»

٢٧ إذا كانت : د (س) = { (س^٢ + أ س + ب) / (س^٢ − ٤ س + ٣) ، س < ٣ ؛ ٤ س ، س > ٣ } لها نهاية عند س = ٣

أوجد قيمتي : أ ، ب

١٨ ، −٦٣

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : د (س) = س^٢ فإن : نهـــا (س ← ٢) د (د (س)) = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ١٦ (د) ٣٢

(٢) إذا كانت : د دالة فردية وكان نهـــا (س ← ٢) د (س) = ٧ أى الجمل الآتية صحيحة ؟

(أ) نهـــا (س ← −٢) د (س) = ٧
(ب) نهـــا (س ← −٢) د (س) = −٧
(جـ) نهـــا (س ← −٢) د (س) = −٢
(د) نهـــا (س ← −٢) د (س) = صفر

(٣) إذا كانت : د دالة زوجية وكان نهـــا (س ← ٢) د (س) = ٥ أى الجمل الآتية صحيحة ؟

(أ) نهـــا (س ← −٢) د (س) = ٥
(ب) نهـــا (س ← −٢) د (س) = −٥
(جـ) نهـــا (س ← −٢) د (س) = صفر
(د) نهـــا (س ← −٢) د (س) = −٢

(٤) إذا كانت د دالة أحادية كثيرة حدود وكانت : نهـــا (س ← ٢) د (س) = ٣

فإن : نهـــا (س ← ٢) د^{−١} (س) = ...

(أ) −٢ (ب) −٣ (جـ) ٢ (د) ٣

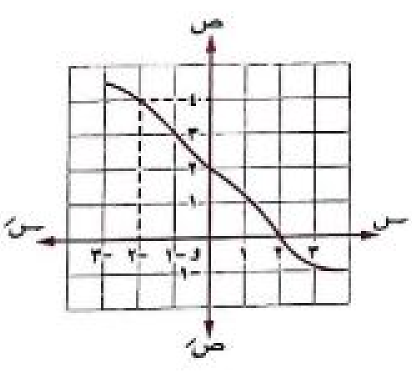
(٥) إذا كانت : نهـــا (س ← ١) د (س) = ٣ ، نهـــا (س ← ٢) د (س) = ٥

فإن : نهـــا (س ← ١) د (س + ١) = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٦) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن : نهـــا (س ← −٢) ([د (س)]^٢ − ٦٤) / (د (س) − ٤) = ...



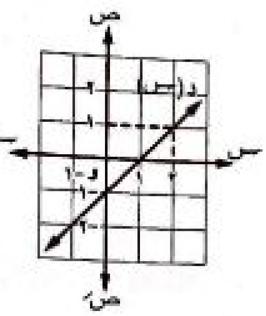
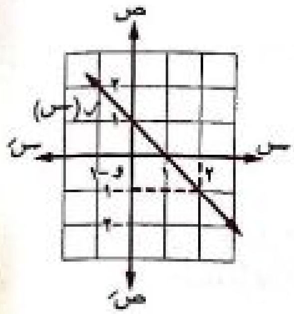
(أ) صفر

(ب) ١٦

(جـ) ٣٢

(د) ٤٨

⑦ الشكلان المقابلان يمثلان منحنيي الدالتين د ، ر

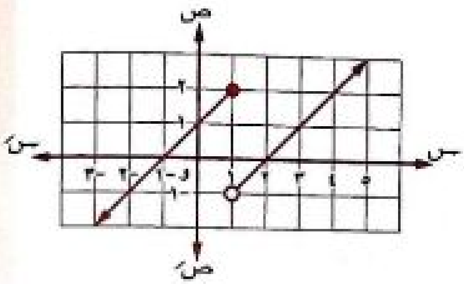



فإن : $\lim_{س \to ١} \frac{د(س)}{ر(س)} = ...$

(أ) ١ (ب) −١

(جـ) صفر (د) غير موجودة.

⑧ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة هـ



، $ر(س) = \begin{cases} س & ، س > ١ \\ س - ٢ & ، س < ١ \end{cases}$

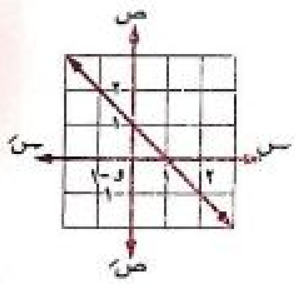
، د (س) = هـ (س) + ر (س)

فإن : $\lim_{س \to ١}$ د (س) = ...

(أ) ليس لها وجود. (ب) ٢

(جـ) −١ (د) صفر

⑨ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

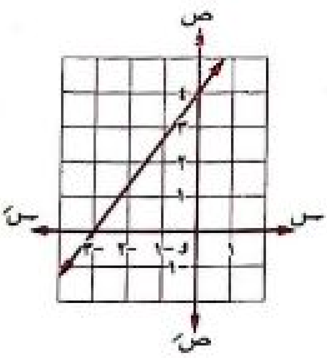


فإن : $\lim_{س \to ٢} |د(س)| = ...$

(أ) −١ (ب) صفر.

(جـ) ١ (د) غير موجودة.

⑩ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د



فإن : $\lim_{س \to \infty} \frac{د(س)}{د^{-١}(س)} = ...$

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) $\frac{-٤}{٣}$

(جـ) $\frac{-١٦}{٩}$ (د) $\frac{١٦}{٩}$

الدرس 7

الاتصـــال



أولًا / اتصال دالة عند نقطة

تعريف

تكون الدالة د متصلة عند س = أ إذا تحققت الشروط الثلاثة الآتية مجتمعة :

١ الدالة معرفة عند س = أ أى د (أ) لها وجود

٢ $\lim_{س \to أ}$ د (س) لها وجود

٣ $\lim_{س \to أ}$ د (س) = د (أ)

* إذا كانت الدالة د مجزأة المجال فإن د تكون متصلة عند س = أ

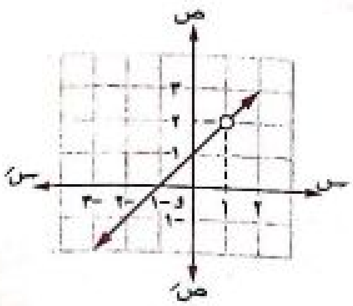
إذا كان : د $(أ^+)$ = د $(أ^-)$ = د (أ)

* يكفى عدم تحقق شرط واحد من الشروط الثلاثة السابقة للحكم على عدم اتصال الدالة عند النقطة س = أ

فمثلًا إذا كانت الدالة غير معرفة عند س = أ فهى بالقطع غير متصلة عندها ولا داعى لأن نبحث النهاية عندها ، وهكذا ...

* من الناحية الهندسية نقول إن دالة متصلة فى فترة ما إذا أمكن أن نرسم منحنى الدالة فى هذه الفترة دون أن نرفع سن القلم عن الورقة التى نرسم عليها ، أى يكون منحنى الدالة فى هذه الحالة خاليًا من الثغرات أو القفزات ، أما المنحنيات التى بها ثغرات أو قفزات تكون لدوال غير متصلة (منفصلة)

فمثلًا :

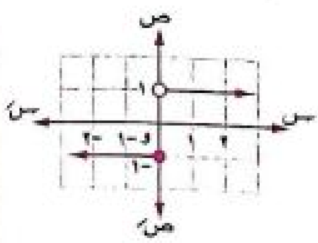


١ د (س) = $\frac{س^٢ - ١}{س - ١}$ ، س ≠ ١

* د (١) غير موجودة لأن الدالة غير معرفة عند س = ١
* منحنى الدالة به ثغرة عند س = ١ لأن الدالة غير معرفة عند س = ١

وبالتالى تكون الدالة د غير متصلة عند س = ١

على الرغم من وجود نهاية للدالة [د (١^+) = د (١^-) = ٢]

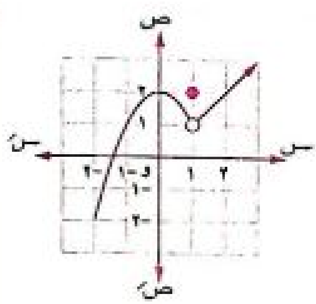


٢ د (س) = { -١ ، س ≤ ٠ ؛ ١ ، س > ٠ }

* د (٠) = -١ (موجودة)
* د (٠^+) = ١ ، د (٠^-) = -١ ∴ د (٠^+) ≠ د (٠^-)

∴ الدالة ليس لها نهاية عند س = ٠

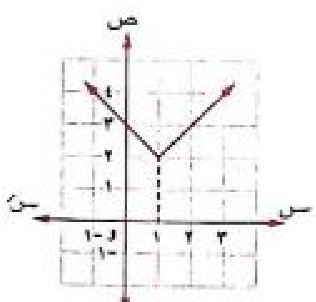
* منحنى الدالة به قفزة عند س = ٠ وبالتالى تكون الدالة د غير متصلة عند س = ٠



٣ د (س) = { ٢ - $س^٢$ ، س < ١ ؛ ٢ ، س = ١ ؛ س ، س > ١ }

* د (١) = ٢ (موجودة)
* د (١^+) = د (١^-) = ١ (موجودة) ∴ نهـا (س ← ١) د (س) = ١
* منحنى الدالة به ثقب عند س = ١ لأن نهـا (س ← ١) د (س) ≠ د (١)

∴ الدالة د غير متصلة عند س = ١



٤ د (س) = { س + ١ ، س ≥ ١ ؛ ٣ - س ، س < ١ }

* د (١) = ٢ (موجودة)
* د (١^+) = د (١^-) = ٢ (موجودة) ∴ نهـا (س ← ١) د (س) = د (١)
* منحنى الدالة ليس به ثقوب أو قفزات ، نهـا (س ← ١) د (س) = د (١)

∴ الدالة د متصلة عند س = ١

مثال ١

ابحث اتصال الدالة د : د (س) = { ٢س + ٣ ، س > ٢ ؛ ٥س - ٣ ، س < ٢ } عند س = ٢

الحل

∵ الدالة غير معرفة عند س = ٢ أى أن د (٢) غير موجودة.

∴ د ليست متصلة عند س = ٢

مثال ٢

ابحث اتصال الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٥س - ٦ & ، س \geq ٣ \\ ٣س + ٤ & ، س < ٣ \end{cases}$ عند س = ٣

الحل

∵ د (٣) = ٥ × ٣ − ٦ = ٩ ، د (٣^+) = نهـــا د (س) عندما س ← ٣^+ = نهـــا (٥س − ٦) عندما س ← ٣^+ = ٩

، د (٣^-) = نهـــا د (س) عندما س ← ٣^- = نهـــا (٣س + ٤) عندما س ← ٣^- = ١٣

∴ د (٣^+) ≠ د (٣^-) ∴ الدالة ليس لها نهاية عند س = ٣

∴ د ليست متصلة عند س = ٣

مثال ٣

ابحث اتصال الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{س^٧ - ١٢٨}{س^٤ - ١٦} & ، س \neq ٢ \\ ١٤ & ، س = ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

الحل

∵ د (٢) = ١٤

، نهـــا د (س) عندما س ← ٢ = نهـــا $\frac{س^٧ - ١٢٨}{س^٤ - ١٦}$ عندما س ← ٢ = نهـــا $\frac{س^٧ - ٢^٧}{س^٤ - ٢^٤}$ عندما س ← ٢ = $\frac{٧}{٤}(٢)^٣$ = ١٤

∴ نهـــا د (س) عندما س ← ٢ = د (٢) ∴ د متصلة عند س = ٢

مثال ٤

ابحث اتصال الدالة د : د (س) = |س − ١| + ٢ عند س = ١

الحل

نهـــا د (س) عندما س ← ١ = نهـــا (|س − ١| + ٢) عندما س ← ١ = ٢ ، د (١) = |١ − ١| + ٢ = ٢

∴ نهـــا د (س) عندما س ← ١ = د (١) ∴ د متصلة عند س = ١

ملاحظة

إذا كانت نهـــا د (س) عندما س ← أ موجودة ولكن الدالة د غير متصلة عند س = أ

بسبب أن : د (أ) غير معرفة أو نهـــا د (س) عندما س ← أ ≠ د (أ)

فإنه يمكن إعادة تعريف الدالة د لتصبح متصلة عند أ

أما إذا كانت نهـــا د (س) عندما س ← أ غير موجودة فإنه لا يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند أ

فمثلًا : أعد تعريف كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية لكى تصبح متصلة عند س = ٢ إن أمكن

قاعدة الدالة	د (س) = $\begin{cases} س + ٢ ، & س \neq ٢ \\ ١ ، & س = ٢ \end{cases}$	د (س) = $\frac{س^٢ + ٤ س - ١٢}{س - ٢}$	د (س) = $\begin{cases} ١ ، & س > ٢ \\ صفر ، & س = ٢ \\ -١ ، & س < ٢ \end{cases}$
د (٢)	١	غير معرفة	صفر
$\lim_{س \to ٢}$ د (س)	٤	٨	غير موجودة
سبب عدم الاتصال عند س = ٢	د (٢) $\neq \lim_{س \to ٢}$ د (س)	الدالة غير معرفة عند س = ٢	$\lim_{س \to ٢}$ د (س) ليس لها وجود
إعادة التعريف لتصبح د متصلة عند س = ٢	د (س) = $\begin{cases} س + ٢ ، & س \neq ٢ \\ ٤ ، & س = ٢ \end{cases}$	د (س) = $\begin{cases} س + ٦ ، & س \neq ٢ \\ ٨ ، & س = ٢ \end{cases}$	لايمكن إعادة تعريفها لكى تصبح متصلة عند س = ٢

مثال ٥

ابحث اتصال الدالة د : د (س) = $\frac{٢ س^٢ - ٧ س - ٤}{س - ٤}$ عند س = ٤

، إذا كانت د غير متصلة فهل يمكن إعادة تعريف الدالة د بحيث تكون متصلة عند س = ٤

الحـــل

$\because$ د غير معرفة عند س = ٤ $\quad \therefore$ د غير متصلة عند س = ٤

، $\because \lim_{س \to ٤}$ د (س) = $\lim_{س \to ٤} \frac{٢ س^٢ - ٧ س - ٤}{س - ٤}$

= $\lim_{س \to ٤} \frac{(س - ٤)(٢ س + ١)}{(س - ٤)}$ = $\lim_{س \to ٤}$ (٢ س + ١) = ٩

ولكى تكون الدالة متصلة عند س = ٤ لابد أن تكون د (٤) = $\lim_{س \to ٤}$ د (س) = ٩

$\therefore$ يمكن إعادة تعريف الدالة كما يلى د (س) = $\begin{cases} \frac{٢ س^٢ - ٧ س - ٤}{س - ٤} ، & س \neq ٤ \\ ٩ ، & س = ٤ \end{cases}$

مثال ٦

هل يمكن إعادة تعريف الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{|س - ٢|}{س - ٢} ، & س \neq ٢ \\ صفر ، & س = ٢ \end{cases}$ لكى تكون متصلة عند س = ٢

الحـــل

$\because$ | س - ٢ | = $\begin{cases} (س - ٢) ، & س \geq ٢ \\ -(س - ٢) ، & س < ٢ \end{cases}$ $\quad \therefore$ د (س) = $\begin{cases} \frac{س - ٢}{س - ٢} ، & س > ٢ \\ صفر ، & س = ٢ \\ \frac{-(س - ٢)}{س - ٢} ، & س < ٢ \end{cases}$

∴ د (س) = $\begin{cases} ١ & ، \quad س > ٢ \\ \text{صفر} & ، \quad س = ٢ \\ -١ & ، \quad س < ٢ \end{cases}$ ∴ د (٢) = صفر ، د (٢^{+}) = ١ ، د (٢^{-}) = −١

∴ د (٢^{+}) ≠ د (٢^{-}) ∴ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}$ د (س) ليس لها وجود

∴ لا يمكن إعادة تعريف الدالة عند س = ٢ لتصبح متصلة

مثال ٧

إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \dfrac{س \ \text{جتا} \ ٥ س}{\text{جا} \ ٣ س + \text{ظا} \ ٤ س} & ، \quad ٠ < س < \dfrac{\pi}{٨} \\ ٢ ب & ، \quad س = ٠ \\ ٢ أ - \dfrac{٢}{٧} \ \text{جتا} س & ، \quad س < ٠ \end{cases}$ متصلة عند س = ٠

أوجد قيمة كل من : أ ، ب

الحـل

∵ د (٠^{+}) = $\underset{س \to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \dfrac{س \ \text{جتا} \ ٥ س}{\text{جا} \ ٣ س + \text{ظا} \ ٤ س}$ = $\underset{س \to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا} \ ٥ س}{\dfrac{\text{جا} \ ٣ س}{س} + \dfrac{\text{ظا} \ ٤ س}{س}}$ = $\dfrac{١}{٣ + ٤}$ = $\dfrac{١}{٧}$

، د (٠^{-}) = $\underset{س \to ٠^{-}}{\text{نهـا}}$ (٢ أ − $\dfrac{٢}{٧}$ جتا س) = ٢ أ − $\dfrac{٢}{٧}$ ، د (٠) = ٢ ب

، ∵ د متصلة عند س = ٠ ∴ د (٠^{+}) = د (٠^{-}) = د (٠) ∴ ٢ أ − $\dfrac{٢}{٧}$ = $\dfrac{١}{٧}$

∴ ٢ أ = $\dfrac{٣}{٧}$ ∴ أ = $\dfrac{١}{٧}$ ، ٢ ب = $\dfrac{١}{٧}$ ∴ ب = $\dfrac{١}{١٤}$

مثال ٨

إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} س^{٢} + أ س - ٢ & ، \quad س > ٢ \\ ٤ & ، \quad س = ٢ \\ ٥ أ + ب س & ، \quad س < ٢ \end{cases}$ متصلة عند س = ٢ **أوجد قيمة : ب**

الحـل

∵ د (٢) = ٤ ، ∵ د (٢^{+}) = $\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نهـا}}$ ($س^{٢}$ + أ س − ٢) = ٢ + ٢ أ

، ∵ د (٢^{-}) = $\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهـا}}$ (٥ أ + ب س) = ٥ أ + ٢ ب ، ∵ د متصلة عند س = ٢

∴ د (٢^{+}) = د (٢^{-}) = د (٢) ∴ ٢ + ٢ أ = ٤ ∴ أ = ١ ، ٥ أ + ٢ ب = ٤

∴ ٥ + ٢ ب = ٤ ∴ ٢ ب = −١ ∴ ب = −$\dfrac{١}{٢}$

مثال ٩

إذا كانت د : د (س) = $\begin{cases} س^{٢} - ٢ س + ٢ & ، \quad س \leq ٢ \\ |س - ٣| & ، \quad س > ٢ \end{cases}$ ابحث اتصال د عند س = ٢ ، س = ٣

الحـل

عندما ٢ < س < ٣ يكون |س − ٣| = ٣ − س ، وعندما س ≥ ٣ يكون |س − ٣| = س − ٣

∴ د (س) = $\begin{cases} س^{٢} - ٢ س + ٢ & ، \quad س \leq ٢ \\ ٣ - س & ، \quad ٢ < س < ٣ \\ س - ٣ & ، \quad س \geq ٣ \end{cases}$

* عند س = ٢ :

د (٢) = ٢^{٢} − ٢ (٢) + ٢ = ٢ ، د (٢$^{-}$) = $\lim_{س \to ٢^{-}}$ (س^{٢} − ٢ س + ٢) = ٢

، د (٢$^{+}$) = $\lim_{س \to ٢^{+}}$ (٣ − س) = ١ ∴ د (٢$^{+}$) ≠ د (٢$^{-}$)

∴ $\lim_{س \to ٢}$ د (س) ليس لها وجود. ∴ د غير متصلة عند س = ٢

* عند س = ٣ :

د (٣) = ٣ − ٣ = صفر ، د (٣$^{-}$) = $\lim_{س \to ٣^{-}}$ (٣ − س) = صفر ، د (٣$^{+}$) = $\lim_{س \to ٣^{+}}$ (س − ٣) = صفر

∴ د (٣$^{+}$) = د (٣$^{-}$) = د (٣) ∴ د متصلة عند س = ٣

مثال ١٠

أعد تعريف الدالة د : د (س) = $\frac{٤ \text{ حتا } س}{\pi - ٢ س}$ لكى تصبح متصلة عند س = $\frac{\pi}{٢}$

الحل

∵ الدالة د غير معرفة عند س = $\frac{\pi}{٢}$

، $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}}$ د (س) = $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}}$ $\frac{٤ \text{ حتا } س}{\pi - ٢ س}$ = $\lim_{(\frac{\pi}{٢} - س) \to ٠}$ $\frac{٤ \text{ حا } (\frac{\pi}{٢} - س)}{٢ (\frac{\pi}{٢} - س)}$ = $\frac{٤}{٢}$ = ٢

ولكن تكون الدالة متصلة عند س = $\frac{\pi}{٢}$ لابد أن يكون د $(\frac{\pi}{٢})$ = $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}}$ د (س) = ٢

∴ يمكن إعادة تعريف الدالة كما يلى د : د (س) = $\begin{cases} \frac{٤ \text{ حتا } س}{\pi - ٢ س} & ، س \neq \frac{\pi}{٢} \\ ٢ & ، س = \frac{\pi}{٢} \end{cases}$

ثانيًا اتصال دالة على فترة

تعريف

١ إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة المفتوحة ف =]أ ، ب[

فإن د تكون متصلة على ف إذا كانت متصلة عند كل نقطة تنتمى لهذه الفترة.

٢ إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة المغلقة ف = [أ ، ب]

فإن الدالة د تكون متصلة على ف إذا كان :

* د متصلة على]أ ، ب[

* د متصلة من اليمين عند أ **أى أن** د (أ) = $\lim_{س \to أ^{+}}$ د (س)

* د متصلة من اليسار عند ب **أى أن** د (ب) = $\lim_{س \to ب^{-}}$ د (س)

بعض أنماط الدوال المتصلة

من معرفتنا للأشكال البيانية للدوال الجبرية أمكن استنتاج أنماط لبعض الدوال المتصلة مثل :

١ الدالة كثيرة الحدود : د (س) = أ٠ + أ١ س + أ٢ س٢ + ... + أن سن

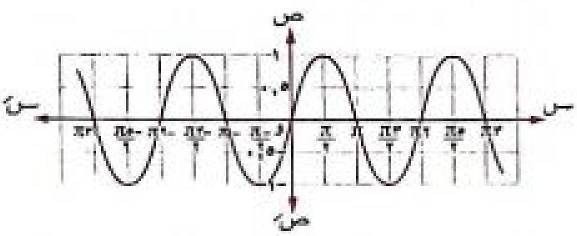
متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح

٢ الدالة الكسرية : د (س) = $\frac{\text{أ}_0 + \text{أ}_1 \text{س} + \text{أ}_2 \text{س}^2 + ... + \text{أ}_\text{ن} \text{س}^\text{ن}}{\text{ب}_0 + \text{ب}_1 \text{س} + \text{ب}_2 \text{س}^2 + ... + \text{ب}_\text{ن} \text{س}^\text{ن}}$

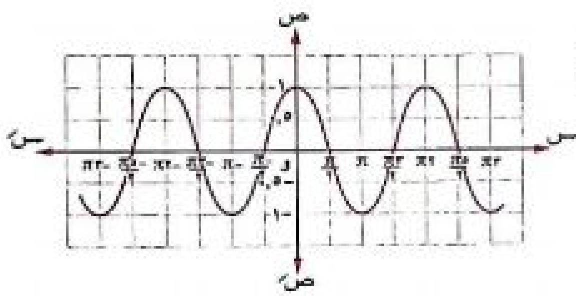
متصلة على ح − {أصفار المقام} أو أى فترة جزئية من ح عدا أصفار المقام

٣ الدالة المثلثية :

(أ) دالة الجيب : د (س) = جاس متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح ويتضح ذلك من التمثيل البيانى فى الشكل التالى :



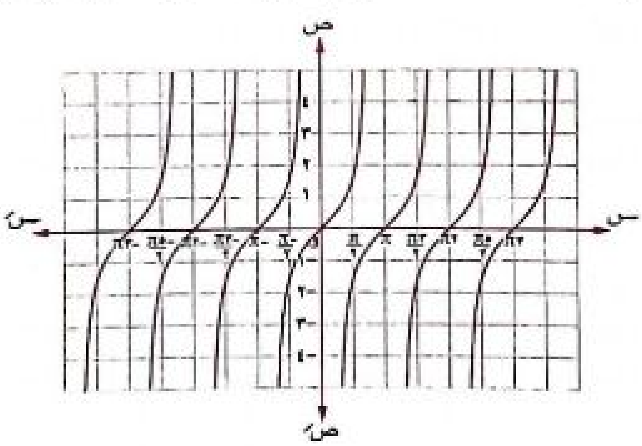
(ب) دالة جيب التمام : د (س) = جتاس متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح ويتضح ذلك من التمثيل البيانى فى الشكل التالى :



(جـ) دالة الظل : د (س) = ظاس متصلة على ح ما عدا النقط :

..... ، $\frac{5\pi}{2}$ ، $\frac{3\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{-\pi}{2}$ ، $\frac{-3\pi}{2}$ ، $\frac{-5\pi}{2}$ ، ..... أى أن الدالة متصلة على

ح − {س : س = $\frac{\pi}{2}$ + ن π ، ن ∈ ص} ويتضح ذلك من التمثيل البيانى فى الشكل التالى :



معلومة إثرائية

كل من الدوال الآتية تكون متصلة على أى فترة مفتوحة جزئية من مجالها :

[١] الدالة د : د (س) = | ه (س) | حيث ه (س) كثيرة حدود مجالها = ح

[٢] الدالة د : د (س) = $\sqrt[ن]{ه(س)}$ حيث ن ∈ ص+ وأكبر من ١ ، ه (س) كثيرة حدود

* مجالها = ح إذا كان ن عددًا فرديًا أكبر من ١
* مجالها الفترة التى تحقق ه (س) ≥ ٠ إذا كان ن عددًا زوجيًا

مثال ١١

ابحث اتصال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية على ح :

[١] د (س) = س^٢ + ٤ س − ٥

[٢] د (س) = ٣

[٣] د (س) = $\frac{س - ٤}{س^٢ - ٥ س + ٦}$

[٤] د (س) = $\frac{س}{س^٢ + ٢٥}$

الحـــل

[١] د (س) = س^٢ + ٤ س − ٥ (دالة كثيرة حدود) ∴ د متصلة على ح

[٢] د (س) = ٣ (دالة كثيرة حدود) ∴ د متصلة على ح

[٣] د (س) = $\frac{س - ٤}{س^٢ - ٥ س + ٦}$ (دالة كسرية)

∵ س^٢ − ٥ س + ٦ = ٠ عندما (س − ٢) (س − ٣) = ٠ أى عندما س = ٢ أ، س = ٣

∴ د متصلة على ح − {٢ ، ٣}

[٤] د (س) = $\frac{س}{س^٢ + ٢٥}$ (دالة كسرية)

∵ س^٢ + ٢٥ > ٠ لجميع قيم س ∈ ح ∴ لا توجد أصفار للمقام.

∴ د متصلة على ح

ملاحظــة

إذا كانت الدالتان د$_١$ ، د$_٢$ معرفتين على الفترة ف =]أ ، ب[وكانتا متصلتين على الفترة ف ، فإن كلًا من الدوال الآتية تكون متصلة على الفترة ف :

[١] د$_١$ ± د$_٢$ [٢] د$_١$ · د$_٢$ [٣] $\frac{د_١}{د_٢}$ بشرط د$_٢$ (س) ≠ صفر

مثال ١٢

ابحث اتصال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية :

١ د (س) = (س + ٢) جا س

٢ د (س) = $(س + ١)^٢$ − جا س

٣ د (س) = $\frac{جتا س + جا س}{س + ٣}$

٤ د (س) = $س^٣ + ٥ + ٣ س^{-٢}$

٥ د (س) = $\frac{ظا س}{س^٢ - ١}$

الحل

١ ∵ كل من (س + ٢) ، جا س متصلة على ح ∴ د متصلة على ح

٢ ∵ كل من $(س + ١)^٢$ ، جا س متصلة على ح ∴ د متصلة على ح

٣ ∵ كل من جتا س ، جا س ، (س + ٣) متصلة على ح

∴ د متصلة على ح − {أصفار المقام} ∴ د متصلة على ح − {−٣}

٤ ∵ د (س) = $س^٢ + ٥ + \frac{٣}{س^٢}$ ∴ د متصلة على ح − {٠}

٥ ∵ ظا س متصلة على ح − {س : س = $\frac{\pi}{٢}$ + ن π ، ن ∈ ص}

، $(س^٢ - ١)$ متصلة على ح ، ∵ $س^٢ - ١ = ٠$ عند س = ± ١

∴ الدالة د متصلة على ح − {١ ، −١ ، $\frac{\pi}{٢}$ + ن π} حيث ن ∈ ص

مثال ١٣

ابحث اتصال الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٣ س + ٢ & ، −٣ \le س < ٢ \\ س^٢ + ٤ & ، ٢ \le س \le ٥ \end{cases}$

الحل

∵ د معرفة على الفترة [−٣ ، ٥]

ولكي نبحث اتصالها على هذه الفترة نبحث :

١ اتصالها في كل من الفترتين]−٣ ، ٢[،]٢ ، ٥[

٢ اتصالها عند النقطة س = ٢ التي تتغير عندها قاعدة الدالة.

٣ اتصالها من اليمين عند س = −٣ ، اتصالها من اليسار عند س = ٥

أولاً : * لكل س ∈]−٣ ، ٢[

∴ د (س) = ٣ س + ٢ (كثيرة حدود) ∴ د متصلة على]−٣ ، ٢[

* لكل س ∈]٢ ، ٥[

∴ د (س) = $س^٢ + ٤$ (كثيرة حدود) ∴ د متصلة على]٢ ، ٥[

ثانيًا : ∵ د (٢) = ٢^٢ + ٤ = ٨

، د (٢^-) = نهـــا_(س ← ٢^-) (٣ س + ٢) = ٨ ، د (٢^+) = نهـــا_(س ← ٢^+) (س^٢ + ٤) = ٨

∴ د (٢^-) = د (٢^+) = د (٢) ∴ د متصلة عند س = ٢

ثالثًا : ∵ د (-٣) = ٣ (-٣) + ٢ = -٧ ، د (-٣^+) = نهـــا_(س ← -٣^+) (٣ س + ٢) = -٧

∴ د (-٣^+) = د (-٣)

∴ د متصلة من اليمين عند س = -٣ وكذلك ∵ د (٥) = ٥^٢ + ٤ = ٢٩

، د (٥^-) = نهـــا_(س ← ٥^-) (س^٢ + ٤) = ٢٩

∴ د (٥^-) = د (٥) ∴ د متصلة من اليسار عند س = ٥

من أولًا وثانيًا وثالثًا نستنتج أن د متصلة على [-٣ ، ٥]

مثال ١٤

ابحث اتصال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية على مجالها :

١ د (س) = √(س + ٢) ٢ د (س) = ∛(٢ - س^٢) ٣ د (س) = ١ / ∛(س^٢ - ٢٥)

الحـــل

١ ∵ د (س) = √(س + ٢) [دليل الجذر = ٢ (زوجى)]

∴ د معرفة إذا كان س + ٢ ≥ ٠ أى س ≥ -٢ ∴ مجال د = [-٢ ، ∞[

نفرض أن أ ∈]-٢ ، ∞[

، ∵ نهـــا_(س ← أ) د (س) = نهـــا_(س ← أ) √(س + ٢) = √(أ + ٢) = د (أ)

∴ الدالة د متصلة لجميع قيم أ ∴ د متصلة على الفترة]-٢ ، ∞[

، ∵ د (-٢) = ٠ ، د (-٢^+) = نهـــا_(س ← -٢^+) (√(س + ٢)) = ٠

∴ د (-٢^+) = د (-٢) ∴ د متصلة من اليمين عند س = -٢

∴ د متصلة على [-٢ ، ∞[

٢ ∵ د (س) = ∛(٢ - س^٢) [دليل الجذر = ٣ (فردى)] ∴ د متصلة على ح

٣ ∵ د (س) = ١ / ∛(س^٢ - ٢٥) [دليل الجذر = ٣ (فردى)] ∴ د متصلة على ح - {أصفار المقام}

، ∵ س^٢ - ٢٥ = ٠ عندما س = ± ٥ ∴ د متصلة على ح - {٥ ، -٥}

مثال ١٥

ابحث اتصال الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \text{جا س} - \text{جتا س} ، & \cdot \leq \text{س} \leq \pi \\ ٢ \text{ جتا}^٢ \text{ س} - ١ ، & \text{س} > \pi \end{cases}$

الحل

∵ كل من جا س ، جتا س متصلة فى الفترة] ٠ ، π[

∴ د (س) = جا س − جتا س متصلة فى الفترة] ٠ ، π[

وبالمثل د (س) = ٢ جتا² س − ١ متصلة في الفترة]π ، ∞[(١)

، ∵ د (π) = جا π − جتا π = ١ ، د (π^-) = $\lim_{\text{س} \to \pi^-}$ (جا س − جتا س) = جا π − جتا π = ١

، د (π^+) = $\lim_{\text{س} \to \pi^+}$ (٢ جتا² س − ١) = ٢ جتا² π − ١ = ١

∴ د (π^-) = د (π^+) = د (π) ∴ د متصلة عند س = π (٢)

، ∵ د (٠) = جا ٠ − جتا ٠ = −١ ، د (٠^+) = $\lim_{\text{س} \to ٠^+}$ (جا س − جتا س) = −١

∴ د (٠^+) = د (٠) ∴ د متصلة من اليمين عند س = ٠ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) نستنتج أن د متصلة على [٠ ، ∞[

مثال ١٦

ابحث اتصال كل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين على ح :

[١] د (س) = $\frac{\text{س} - ١}{\text{جتا س}}$ [٢] د (س) = $\frac{\text{س}^٢ + ٣}{١ + \text{جا س}}$

الحل

[١] ∵ كل من (س − ١) ، جتا س متصلة على ح

، ∵ جتا س = ٠ عندما س = $\frac{\pi}{٢}$ + ن π

∴ د متصلة على

ح − {س : س = $\frac{\pi}{٢}$ + ن π ، ن ∈ ص}

[٢] ∵ كل من (س² + ٣) ، (١ + جا س)

متصلة على ح

، ∵ ١ + جا س = ٠

أى جا س = −١ عندما س = $\frac{٣\pi}{٢}$ + ٢ ن π

∴ د متصلة على ح − {س : س = $\frac{٣\pi}{٢}$ + ٢ ن π ، ن ∈ ص}

تذكر أن !

المعادلة	الحل العام
• جا س = ٠	س = ن π
• جا س = ١	س = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ ن π
• جا س = −١	س = $\frac{٣\pi}{٢}$ + ٢ ن π
• جتا س = ٠	س = $\frac{\pi}{٢}$ + ن π
• جتا س = ١	س = ٢ ن π
• جتا س = −١	س = π + ٢ ن π

مثال ١٧

إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٣س - ٢ & ، س \le -٢ \\ أس + ب & ، -٢ < س < ٥ \\ س^٢ - ١٢ & ، س \ge ٥ \end{cases}$ متصلة على ح

أوجد : أ ، ب

الحـــل

∵ د متصلة على ح ∴ د متصلة عند س = -٢

∴ د (-٢^-) = د (-٢^+) = د (٢)

∵ نهـــا (أس + ب) = ٣ (-٢) -٢ (س ← -٢⁺) ∴ -٢ أ + ب = -٨ (١)

، د متصلة عند س = ٥ ∴ د (٥^-) = د (٥^+) = د (٥)

∵ نهـــا (أس + ب) = $(٥)^٢$ - ١٢ (س ← ٥⁻) ∴ ٥ أ + ب = ١٣ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ أ = ٣ ، ب = -٢

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت د : د (س) دالة فإنها تكون متصلة عند س = أ إذا كان ....

(أ) د (أ) موجودة.

(ب) د (أ) = د ($أ^+$) = د ($أ^-$)

(جـ) د (س) لها نهاية عند س ← أ

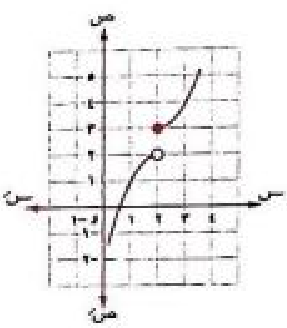
(د) أ ، جـ معًا.

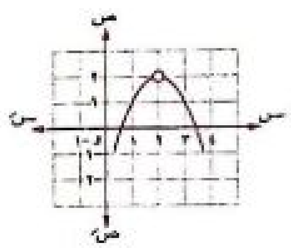
② إذا كانت : $\lim_{س \to أ^+}$ د (س) = ل ، $\lim_{س \to أ}$ د (س) = م وكانت الدالة متصلة عند س = أ

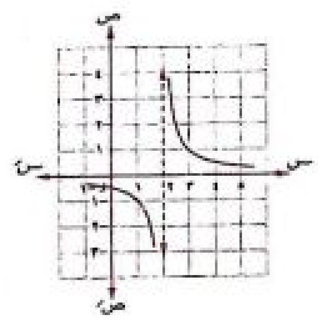
فإن : $ل^2 + م^2 - 2$ ل م = ...

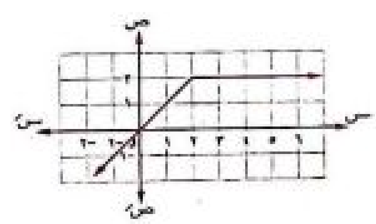
(أ) صفر (ب) ١ (جـ) -١ (د) ٢

③ الشكل الذى يبين الدالة المتصلة عندما س = ٢ هو الشكل ....

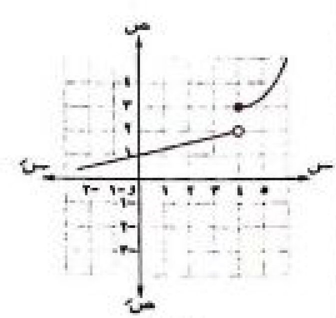

(أ)

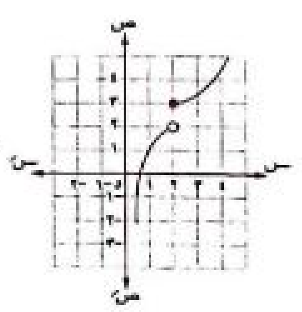

(ب)

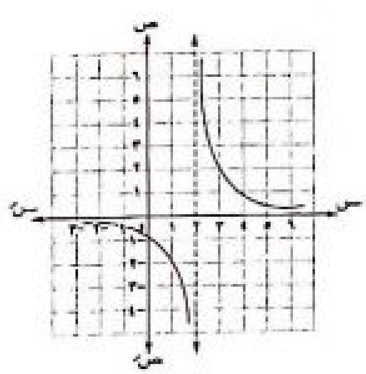

(جـ)


(د)

④ أى من الأشكال الآتية يكون متصلًا عند س = ٢ ؟

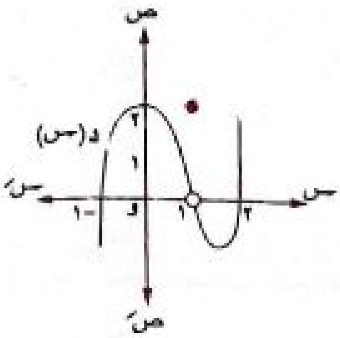

(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

⑤ في الشكل المقابل :



جميع العبارات التالية صحيحة ما عدا ....

(أ) نهـــا د (س) = ٠ عندما س ← ١

(ب) الدالة ليست متصلة عند س = ١

(جـ) د (١) = ٢

(د) لا يمكن إعادة تعريف الدالة لكى تصبح متصلة.

⑥ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{س^{٢} - ١}{س - ١} & ، س \neq ١ \\ ٢ أ & ، س = ١ \end{cases}$ متصلة عند س = ١

فإن : أ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

⑦ إذا كانت د دالة حيث : د (س) = $\begin{cases} ٢ س & ، س \leq ١ \\ ٣ س - أ & ، س > ١ \end{cases}$ متصلة عند س = ١

فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) -١ (د) -٢

⑧ إذا كانت د : د (س) = $\begin{cases} أ س^{٢} - ٢ & ، س \neq ٢ \\ ٢ أ & ، س = ٢ \end{cases}$ متصلة عند س = ٢ فإن : أ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) ٦

⑨ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} س^{٢} - ٢ س & \text{عندما } س \leq ١ \\ ك س - ٣ & \text{عندما } س > ١ \end{cases}$ متصلة عند س = ١ فإن : ك = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

⑩ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} أ - س^{٢} & ، س \leq -٢ \\ س & ، س > -٢ \end{cases}$ متصلة عند س = -٢ فإن : أ = ...

(أ) -٢ (ب) -٤ (جـ) ٢ (د) ٤

⑪ إذا كانت الدالة د متصلة عند س = ٢ حيث : د (س) = $\begin{cases} أ س^{٢} + ٥ & \text{عندما } س \leq ٢ \\ ٩ - ب س & \text{عندما } س > ٢ \end{cases}$

فإن : ٢ أ + ب = ...

(أ) ٧ (ب) ١٤ (جـ) ٢ (د) -٢

⑫ إذا كانت د : $د(س) = \begin{cases} س^2 + ب س + 3 & ، س < 1 \\ أ س + ب & ، س \geq 1 \end{cases}$ متصلة عند س = ١ ، د (١) = ٧

فإن : $\frac{أ}{ب}$ = ...

(أ) $\frac{7}{2}$ (ب) $\frac{4}{3}$ (جـ) $\frac{3}{4}$ (د) ٧

⑬ إذا كانت الدالة د حيث : $د(س) = \begin{cases} \frac{(س + 2)^6 - 64}{2 س} & س \neq 0 \\ ك & س = 0 \end{cases}$ متصلة عند س = ٠

فإن : ك = ...

(أ) ٩٦ (ب) ١٩٢ (جـ) ٣٨٤ (د) ٩٢

⑭ إذا كانت د دالة حيث : $د(س) = \begin{cases} \frac{\sqrt{س + 3} - 2}{س - 1} & ، س \neq 1 \\ أ & ، س = 1 \end{cases}$ متصلة عند س = ١

فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) $\frac{1}{4}$ (د) ٢

⑮ إذا كانت د : $د(س) = \begin{cases} \frac{\sqrt{س - أ} - 1}{\sqrt{س} - 3} & ، س \neq 9 \\ س - ب & ، س = 9 \end{cases}$ متصلة على ح

فإن : $\frac{أ}{ب}$ = ...

(أ) $\frac{8}{3}$ (ب) $\frac{1}{4}$ (جـ) $\frac{3}{4}$ (د) ١٤

⑯ إذا كانت الدالة د : $د(س) = \begin{cases} \frac{|س|}{س} + 6 & ، س < 0 \\ أ^2 + جا 3 س & ، س \geq 0 \end{cases}$ متصلة عند س = ٠

فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) $\pm\sqrt{6}$ (جـ) ± 2 (د) $\pm\sqrt{5}$

⑰ إذا كانت د : $د(س) = \begin{cases} \frac{ظا (س - 2)}{س - 2} & ، س > 2 \\ جا \left(\frac{1}{4} \pi س\right) & ، س < 2 \end{cases}$ فإن : ....

(أ) الدالة متصلة عند س = ٢

(ب) الدالة ليس لها نهاية عند س ← ٤

(جـ) الدالة لها نهاية عند س ← ٢

(د) $د(2^+) \neq د(2^-)$

(١٨) إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{جا } ٢ \text{ س} + \text{ظا س}}{١ + \text{جا } ٤ \text{ س}} & \text{، س} \in \left]\text{صفر ، } \dfrac{\pi}{٢}\right[- \left\{\dfrac{\pi}{٤}\right\} \\ \text{ك} & \text{، س} = \dfrac{\pi}{٤} \end{cases}$

متصلة عند س = $\dfrac{\pi}{٤}$ فإن : ك = ...

(أ) $\dfrac{١}{٢}$ (ب) $\dfrac{٢}{٥}$ (جـ) ٣ (د) ٢

(١٩) إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \text{جا } ٩ \text{ س ظتا } ٤ \text{ س} & \text{، س} \in \left]\dfrac{-\pi}{٨} \text{ ، } \dfrac{\pi}{٨}\right[- \{٠\} \\ \text{ك}^٢ & \text{، س} = ٠ \end{cases}$

متصلة عند س = ٠ فإن : ك = ...

(أ) $\dfrac{٩}{٤}$ (ب) $\dfrac{٣}{٢}$ (جـ) ± $\dfrac{٣}{٢}$ (د) ± $\dfrac{٢}{٣}$

(٢٠) الدالة الزوجية المتصلة عند النقطة (أ ، ب) تكون متصلة أيضا عند النقطة ....

(أ) (– أ ، ب) (ب) (– أ ، – ب) (جـ) (أ ، – ب) (د) غير ذلك.

(٢١) إذا كانت : د (س) = $\dfrac{\text{س}^٢ - ٢٥}{\text{س} - ٥}$ حيث س ≠ ٥

فإن قيمة د (٥) التى تجعل الدالة متصلة عند هذا الموضع تساوى ....

(أ) ١٠ (ب) صفر (جـ) ٢٥ (د) غير معرفة.

(٢٢) إذا كانت : د (س) = $\dfrac{\text{س}^٨ - \text{أ}^٨}{\text{س}^٥ - \text{أ}^٥}$ عند س ≠ أ ، د (أ) = ٢٠٠ متصلة عند س = أ

فإن : أ = ...

(أ) ٥ (ب) $\dfrac{٨}{٥}$ (جـ) ١٢٥ (د) $\dfrac{١}{٥}$

(٢٣) إذا كانت : د (س) = $\dfrac{\text{س}^٢ - ٥ \text{ س} + ٦}{\text{س}^٢ - ٩}$ حيث س ≠ ± ٣

فإن قيمة د (٣) التى تجعل الدالة متصلة عند هذا الموضع تساوى ....

(أ) $\dfrac{١}{٦}$ (ب) صفر (جـ) $\dfrac{١}{٩}$ (د) غير معرفة.

(٢٤) الدالة د : د (س) = ٤ $\text{س}^{-٢}$ + $\dfrac{\text{س}}{\text{س}^٢ - ٩}$ متصلة لكل س ∈ ....

(أ) ح (ب) ح – {٠}

(جـ) ح – {٣ ، –٣} (د) ح – {٣ ، –٣ ، ٠}

(٢٥) إذا كانت الدالة د : د (س) = $\dfrac{\text{س} + ١}{\text{س}^٢ + \text{أ}}$ متصلة على ح فإن : أ ∈ ....

(أ) ح (ب) ح^+ (جـ) ح^- (د) ح^- ∪ {٠}

(٢٦) الدالة د : د (س) = $\frac{1}{\sqrt[3]{س + 2}}$ متصلة لكل س ∈ ....

(أ) ح　　(ب) ح − {−٢}　　(جـ) [−٢ ، ∞[　　(د)]−٢ ، ∞[

(٢٧) الدالة د : د (س) = $\frac{س}{|س - 1| - 2}$ متصلة على ....

(أ) ح − {٢}　　(ب) ح − {−٣ ، ٢}　　(جـ) ح − {−٢ ، ٤}　　(د) ح

(٢٨) الدالة د : د (س) = $\sqrt[3]{4 - س^2}$ متصلة على ....

(أ) [−٢ ، ٢]　　(ب) ح −]−٢ ، ٢[　　(جـ)]٤ ، ∞[　　(د) ح

(٢٩) الدالة د : د (س) = $\sqrt[3]{2س - 5} + \sqrt[4]{س^2 + 4}$ متصلة لكل س ∈ ....

(أ) ح　　(ب) $ح^+$　　(جـ) [$\frac{5}{2}$ ، ∞[　　(د) [−٤ ، $\frac{5}{2}$]

(٣٠) الدالة د : د (س) = $\sqrt{س - 1}$ متصلة فى ....

(أ) [١ ، ∞[　　(ب) [−١ ، ∞[　　(جـ)]−∞ ، ١]　　(د)]−∞ ، −١]

(٣١) الدالة د : د (س) = ٤ س $\sqrt{-س}$ متصلة لكل س ∈ ....

(أ) ح　　(ب)]−∞ ، ٤]　　(جـ)]−∞ ، ٠]　　(د) [٠ ، ∞[

(٣٢) الدالة د : د (س) = $\frac{س + 2}{\sqrt{س} - 2}$ متصلة لكل س ∈ ....

(أ) [٤ ، ∞[　　(ب) [٠ ، ∞[　　(جـ) [٠ ، ∞[− {٤}　　(د)]−∞ ، ٢]

(٣٣) الدوال الآتية متصلة على ح ماعدا ....

(أ) د (س) = جا س　　(ب) د (س) = $س^2 - 2$

(جـ) د (س) = ظا س　　(د) د (س) = $\frac{5س + 3}{س^2 + 4}$

(٣٤) الدالة د : د (س) = ظا ٢ س متصلة لكل س ∈ ....

(أ) ح − {س : س = $\frac{\pi}{2} + ن\pi$ ، ن ∈ ص}

(ب) ح − {س : س = $\frac{\pi}{4} + \frac{ن\pi}{2}$ ، ن ∈ ص}

(جـ) ح − {س : س = $\frac{\pi}{4} + ن\pi$ ، ن ∈ ص}

(د) ح − {س : س = $\frac{\pi}{2} + 2ن\pi$ ، ن ∈ ص}

(٣٥) إذا كانت د : د(س) = $\begin{cases} \frac{\text{جا أ س}}{\text{٢ س}} & \text{، س} \neq ٠ \\ ٥ & \text{، س} = ٠ \end{cases}$ متصلة على ح فإن : أ = ...

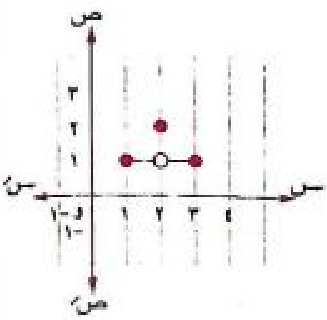
(أ) ٥ (ب) ١٠ (ج) ٢ (د) صفر

(٣٦) إذا كانت د : د(س) = $\begin{cases} \text{س} + ١ & \text{، } ١ < \text{س} < ٢ \\ \text{س}^٢ + \text{ب س} + \text{جـ} & \text{، س} \in \text{ح} -]١ ، ٢[\end{cases}$ متصلة على ح

فإن : ب − جـ = ...

(أ) −٣ (ب) ١ (ج) ٤ (د) −٧

∴ (٣٧) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د أى الجمل الآتية صحيحة ؟



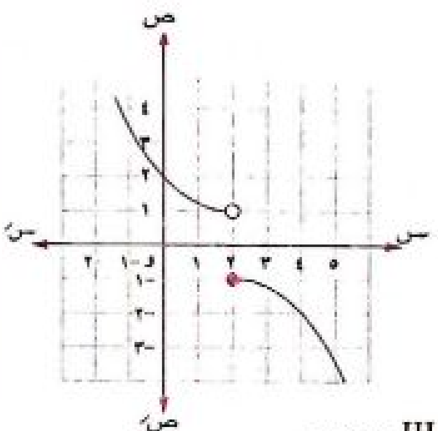
(أ) د متصلة على الفترة [١ ، ٣]

(ب) د متصلة على الفترة]١ ، ٣[

(ج) نهـا (س ← أ) د(س) موجودة حيث أ ∈ [١ ، ٣]

(د) نهـا (س ← أ) د(س) موجودة حيث أ ∈]١ ، ٣[

∴ (٣٨) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د



، ر(س) = | د(س) |

فإن : (I) ر(س) متصلة على ح

(II) نهـا (س ← ٢) د(س) = ± ١

(III) نهـا (س ← ٢) ر(س) = ١

(أ) I ، II صحيح. (ب) I ، III صحيح.

(ج) I ، II ، III صحيح. (د) II صحيح.

ثانيًا الأسئلة المقالية

تمارين على الاتصال عند نقطة

١ ابحث اتصال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية عند النقط المبينة :

(١) د(س) = $\text{س}^٢$ + س − ٣ عند س = −١

(٢) د(س) = $\sqrt[٣]{\text{س} - ١}$ عند س = ٩

(٣) د(س) = $\frac{\text{س}^٢ - ٤}{\text{س} - ٢}$ عند س = ١ ، س = ٢

④ 📖 د(س) = ٥ − |س − ٣| عند س = ٣

⑤ د(س) = |س − ٤| + |س + ٢| عند س = ٤ ، س = −٢

⑥ $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{٤س}^{\text{٢}} + \text{٣} & \text{، س} \le \frac{\text{١}}{\text{٢}} \\ \text{٥} - \text{٢س} & \text{، س} > \frac{\text{١}}{\text{٢}} \end{cases}$ عند س = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$

⑦ $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{٢س} & \text{، س} < \text{١} \\ \text{٤} - \text{٢س} & \text{، س} > \text{١} \end{cases}$ عند س = −١ ، س = ١

⑧ 📖 $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س} + \text{٤} & \text{، س} < -\text{٢} \\ \text{١} & \text{،} -\text{٢} \le \text{س} < -\text{١} \\ \text{٢س} + \text{٣} & \text{، س} \ge -\text{١} \end{cases}$ عند س = −٢ ، س = −١

⑨ 📖 $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س}^{\text{٢}} + \text{٣} & \text{، س} \ge \text{١} \\ \frac{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٢س} - \text{٣}}{\text{س} - \text{١}} & \text{، س} < \text{١} \end{cases}$ عند س = ١

⑩ $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س}|\text{س}| & \text{، س} \ne \text{٠} \\ \text{٢} & \text{، س} = \text{٠} \end{cases}$ عند س = ٠

⑪ $\text{د(س)} = \begin{cases} \frac{|\text{س} - \text{٣}|}{\text{س} - \text{٣}} & \text{، س} \ne \text{٣} \\ \text{٢} & \text{، س} = \text{٣} \end{cases}$ عند س = ٣

⑫ $\text{د(س)} = \begin{cases} \frac{\text{س}|\text{س} - \text{٢}| - \text{س} + \text{٢}}{|\text{س} - \text{٢}|} & \text{، س} < \text{٢} \\ \text{٢} & \text{، س} \ge \text{٢} \end{cases}$ عند س = ٢

⑬ $\text{د(س)} = \begin{cases} \frac{\text{س}^{\text{٧}} - \text{١٢٨}}{\text{س}^{\text{٤}} - \text{١٦}} & \text{، س} \ne \text{٢} \\ \text{٣س}^{\text{٢}} + \text{٢} & \text{، س} = \text{٢} \end{cases}$ عند س = ٢

⑭ 📖 $\text{د(س)} = \begin{cases} \frac{\text{١} - \text{جتا س}}{\text{س}} & \text{، س} > \text{٠} \\ \text{٢ جا س} & \text{، س} \le \text{٠} \end{cases}$ عند س = ٠

⑮ 📖 $\text{د(س)} = \begin{cases} \frac{\text{جا(س} - \text{٢)}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٤}} & \text{، س} \in]-\infty \text{ ، ٢}[- \{-\text{٢}\} \\ \text{١} - \frac{\text{٣}}{\text{س}^{\text{٢}}} & \text{، س} \in [\text{٢ ، } \infty[\end{cases}$ عند س = ٢

⑯ $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س}|\text{س}| + \text{٤} & \text{، س} \le \text{٠} \\ \frac{|\text{س}|}{\text{س}} + \text{٣} & \text{، س} > \text{٠} \end{cases}$ عند س = ٠

⑰ $د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^٢ + ٢س - ٣}{|س + ٣|} & ، س \neq -٣ \\ ٢ & ، س = -٣ \end{cases}$ عند $س = -٣$ ، عند $س = ١$

⑱ $د(س) = \begin{cases} |س + ٣| & ، س \leq ٢ \\ ١١ - ٣س & ، س > ٢ \end{cases}$ عند $س = -٣$ ، $س = ٢$

⑲ $د(س) = \begin{cases} \dfrac{٥س^٢ + جا^٢ ٢س}{س ظا ٣س} & ، \dfrac{-\pi}{٦} < س < ٠ \\ \dfrac{س + ٣}{س + ١} & ، س \geq ٠ \end{cases}$ عند $س = ٠$

⑳ $د(س) = \begin{cases} \dfrac{جا س}{\pi - س} & ، س \neq \pi \\ ١ & ، س = \pi \end{cases}$ عند $س = \pi$

---

٢ أوجد قيم ك ، أ ، ب ، جـ التي تجعل كلًا من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية متصلة عند النقطة المبينة أمام كل منها :

① $د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^٢ + ٢س - ٣}{س + ٣} & ، س \neq -٣ \\ س + أ & ، س = -٣ \end{cases}$ عند $س = -٣$ «-١»

② $د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^٢ - ٥س + ٦}{س^٣ - ٨} & ، س \neq ٢ \\ \dfrac{-٢}{|أ|} & ، س = ٢ \end{cases}$ عند $س = ٢$ «± ٢٤»

③ $د(س) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{س + ٣} - ٢}{س^٢ - ١} & ، س \neq ١ \\ ك & ، س = ١ \end{cases}$ عند $س = ١$ «$\dfrac{١}{٨}$»

④ $د(س) = \begin{cases} \dfrac{جا^٢ ٢س}{س ظا ٣س} & ، س \in \left]\dfrac{-\pi}{٦} ، \dfrac{\pi}{٦}\right[- \{٠\} \\ أ + ١ & ، س = ٠ \end{cases}$ عند $س = ٠$ «$\dfrac{١}{٢}$»

⑤ $د(س) = \begin{cases} ٢س - ٢ & ، س \leq -٢ \\ أس + ب & ، -٢ < س < ٥ \\ س^٢ - ١٢ & ، س \geq ٥ \end{cases}$ عند $س = -٢$ ، $س = ٥$ «٣ ، -٢»

⑥ $د(س) = \begin{cases} أ + ب س & ، س > ٢ \\ ٣ & ، س = ٢ \\ ب - أس^٢ & ، س < ٢ \end{cases}$ عند $س = ٢$ «$-\dfrac{١}{٢}$ ، $\dfrac{٥}{٢}$»

⑦ $د(س) = \begin{cases} \dfrac{جتا ٢س - ١}{س^٢} & ، س \neq ٠ \\ ك & ، س = ٠ \end{cases}$ عند $س = ٠$ «-٢»

⑧ 📖 د(س) = { ٢ − س^{٢} ، س ≥ حـ ؛ س ، س < حـ }   عند س = حـ   «١ أ ، −٢»

⑨ د(س) = { $\frac{١ - \text{جتا س}}{\text{ظا س}}$ ، س ≠ ٠ ؛ جا س ، س = ٠ }   عند س = ٠   «ح − {٠}»

---

٣ أعد تعريف كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية عند النقط المبينة بحيث تصبح متصلة عند هذه النقط (إن أمكن) :

① 📖 د(س) = $\frac{س^{٢} - س - ٦}{س - ٣}$ عند س = ٣

② د(س) = $\frac{س^{٢} - ١}{س^{٢} - ٣ س + ٢}$ عند س = ١

③ 📖 د(س) = { س^{٣} + ٢ س ، س > ١ ؛ ٥ س − ١ ، س < ١ }   عند س = ١

④ 📖 د(س) = { س^{٢} + ١ ، س ≥ ٢ ؛ $\frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$ ، س < ٢ }   عند س = ٢

⑤ 📖 د(س) = { $\frac{٣ س + ١ - \text{جتا س}}{٥ س}$ ، س > ٠ ؛ $\frac{٣}{٥}$ جتا س ، س < ٠ }   عند س = ٠

⑥ د(س) = $\frac{|س - ٣|}{س - ٣}$ عند س = ٣

⑦ د(س) = $\frac{س^{٢} - ٦٤}{\sqrt[٣]{س} - ٢}$ عند س = ٨

⑧ د(س) = $\frac{|س| + س}{س}$ عند س = ٠

⑨ د(س) = $\frac{٢}{س - ٥} - \frac{١٢}{س^{٢} - ٤ س - ٥}$ عند س = ٥

⑩ د(س) = $\frac{\text{جا س}}{|س|}$ عند س = ٠

تمارين على الاتصال على فترة

٤ ابحث اتصال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية :

① 📖 $د(س) = ٧$

② 📖 $د(س) = س^٣ - ٢س^٢ + ١$

③ $د(س) = \frac{٣س - ٥}{س - ٣}$

④ 📖 $د(س) = \frac{س^٢ - ٩}{س^٢ - ٥س + ٦}$

⑤ $د(س) = \frac{س - ١}{س^٤ - ١٣س^٢ + ٣٦}$

⑥ $د(س) = \frac{س}{س^٢ + س + ١}$

⑦ $د(س) = \frac{٤س - ١}{س^٢ - س}$

⑧ $د(س) = |س - ٢| + |٥ + س|$

⑨ 📖 $د(س) = س^٣ جا٢س$

⑩ 📖 $د(س) = جاس - ٣ جتا(س + ١)$

⑪ $د(س) = (٣س + ٤)^٢ + جا٢س$

⑫ 📖 $د(س) = \frac{س}{|س| - ٢}$

⑬ $د(س) = \frac{٢س - ١}{|س| + ١}$

⑭ 📖 $د(س) = \frac{١}{\sqrt{س} - ٢}$

⑮ $د(س) = \frac{س^٢ + جا٢س}{س + ١}$

⑯ $د(س) = \frac{\sqrt{س - ٤}}{س - ٦}$

⑰ $د(س) = \frac{\sqrt{س - ٣}}{س^٢ - ٤}$

⑱ $د(س) = \frac{٢س + ٢}{س\sqrt{س + ٢}}$

⑲ $د(س) = \frac{س + ١}{\sqrt{س + ٢} - ١}$

⑳ $د(س) = \sqrt{س + ٢} + \sqrt{٣ - س}$

㉑ $د(س) = \frac{١}{\sqrt{٢٥ - س^٢}}$

㉒ $د(س) = \sqrt{٥ - |س|}$

㉓ 📖 $د(س) = \frac{س^٢ + ١}{جتاس}$

㉔ $د(س) = \frac{س + ٣}{جتاس}$

㉕ $د(س) = \frac{جا٢س + جتا٥س}{١ - جتاس}$

㉖ $د(س) = \frac{٢ + س}{١ + جاس}$

㉗ 📖 $د(س) = \frac{جا^٢س + جتاس}{س^٢ - ٩}$

㉘ 📖 $د(س) = ظا^٢س - ١$

㉙ 📖 $د(س) = \frac{ظاس}{س^٢ - ٩}$

٥ ابحث اتصال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية على مجالها :

① $د(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ & ، س \leq ١ \\ ٢س & ، س > ١ \end{cases}$

② $د(س) = \begin{cases} س^٢ & ، س < ٢ \\ ٥س - ٤ & ، س \geq ٢ \end{cases}$

③ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٢ & ، \text{س} \leq ٢ \\ ٢ & ، ٢ < \text{س} \leq ٤ \\ ٦ - \text{س}^{٢} & ، \text{س} > ٤ \end{cases}$

④ 📖 $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ١ + \text{جاس} & \text{حيث } ٠ \leq \text{س} \leq \frac{\pi}{٢} \\ ١ - \text{جتا } ٢\text{س} & \text{حيث } \text{س} > \frac{\pi}{٢} \end{cases}$

⑤ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{جاس} & ، -\frac{\pi}{٤} \leq \text{س} < \frac{٣\pi}{٤} \\ \text{جتاس} & ، \frac{٣\pi}{٤} \leq \text{س} \leq ٢\pi \end{cases}$

⑥ 📖 $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س ظاس} + \text{جا}^{٢}\, ٢\text{س}}{٥\text{س}^{٢}} & ، -\frac{\pi}{٤} < \text{س} < ٠ \\ ٢ \text{ جتا } ٢\text{س} & ، ٠ \leq \text{س} < \frac{\pi}{٤} \end{cases}$

⑦ 📖 $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{(\text{س} + ٣)^{٤} - ٨١}{\text{س}} & \text{عندما س} \neq ٠ \\ ١٠٨ & \text{عندما س} = ٠ \end{cases}$

⑧ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ٥ - \text{س}|\text{س}| & ، \text{س} \leq ٠ \\ \dfrac{|\text{س}|}{\text{س}} + ٤ & ، \text{س} > ٠ \end{cases}$

---

٦ إذا كانت الدالة د : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س} + \text{جا } ٢\text{س}}{\text{جا } \frac{١}{٢}\text{س}} & ، -\pi \leq \text{س} < ٠ \\ \text{س} + \text{ك} & ، ٠ \leq \text{س} \leq \pi \end{cases}$ متصلة في الفترة $[-\pi ، \pi]$

فأوجد قيمة : ك

«٦»

---

٧ 📖 إذا كانت الدالة د : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ٤\text{س} & ، \text{س} \leq -١ \\ \text{أس} + \text{ب} & ، -١ < \text{س} < ٣ \\ -٢\text{س} & ، \text{س} \geq ٣ \end{cases}$ متصلة على ح

فما قيمة كل من : أ ، ب ؟

«$-\frac{١}{٢}$ ، $-\frac{٩}{٢}$»

---

٨ إذا كانت د : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\text{س} - \text{أ}} - ١}{\sqrt{\text{س}} - ٣} & ، \text{س} \neq ٩ \\ \text{س} - \text{ب} & ، \text{س} = ٩ \end{cases}$ متصلة على ح

فما قيمة كل من : أ ، ب الحقيقية ؟

«٨ ، ٦»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ ابحث اتصال كل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين على مجالها :

① $د(س) = \begin{cases} |س - ١| + ٢س &، س \leq ٢ \\ ٤س - س^٢ &، س > ٢ \end{cases}$

② $د(س) = \begin{cases} \sqrt{٤ - س^٢} &، |س| \leq ٢ \\ س^٢ + ٢س &، |س| > ٢ \end{cases}$

---

٢ أوجد قيمة أ التي تجعل الدالة د : $د(س) = \frac{س + ٣}{س^٢ + أس + ٩}$ متصلة على ح [$أ \in]-٦ ، ٦[$]

---

٣ أوجد قيمة أ التي تجعل الدالة د : $د(س) = \frac{٢س + ١}{س^٢ + ٦س + أ}$ متصلة على ح [$أ \in]٩ ، \infty[$]

---

٤ إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} -س &، س < ٠ \\ ١ &، س \geq ٠ \end{cases}$ ، $ر(س) = \begin{cases} ١ &، س < ٠ \\ س &، س \geq ٠ \end{cases}$

أثبت أن : د ، ر غير متصلة عند س = ٠ بينما الضرب (د . ر) متصلة عند س = صفر

---

٥ إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} -١ &، س \neq ٤ \\ ١ &، س = ٤ \end{cases}$ ، $ر(س) = \begin{cases} ٤س - ١٠ &، س \neq ٤ \\ -٦ &، س = ٤ \end{cases}$

فابحث اتصال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية عند س = ٤

① د (س) ② ر (س)

③ د (س) . ر (س) ④ | د (س) |

⑤ ر (س) - ٦ د (س) ⑥ ر (د (س))

الوحدة الرابعة

حساب المثلثات

دروس الوحدة

مراجعة على أهم القوانين التى سبقت دراستها.

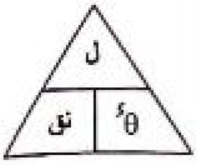
الدرس 1 قانون الجيب «قاعدة الجيب».

الدرس 2 قانون جيب التمام «قاعدة جيب التمام».

الدرس 3 حل المثلث.

فى نهاية الوحـــدة : تطبيقات حياتيـة على الوحدة الرابعة.

القياس الدائرى والقياس الستينى لزاوية



لاحظ أن

π بالتقدير الدائرى تكافئ ١٨٠° بالتقدير الستينى.

- القياس الدائرى لزاوية مركزية فى دائرة

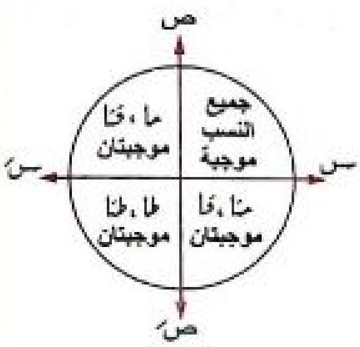
$$= \frac{\text{طول القوس الذى تحصره هذه الزاوية}}{\text{طول نصف قطر هذه الدائرة}}$$

أى أن $\theta^{ء} = \frac{ل}{نق}$ ومنها $ل = \theta^{ء}\, نق$ ، $نق = \frac{ل}{\theta^{ء}}$

- **التحويل بين القياس الدائرى والقياس الستينى :**

$\frac{س^{\circ}}{١٨٠^{\circ}} = \frac{\theta^{ء}}{\pi}$ ومنها $\theta^{ء} = س^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠^{\circ}}$ ، $س^{\circ} = \theta^{ء} \times \frac{١٨٠^{\circ}}{\pi}$

العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية



١ $جتا^{٢}\theta + جا^{٢}\theta = ١$

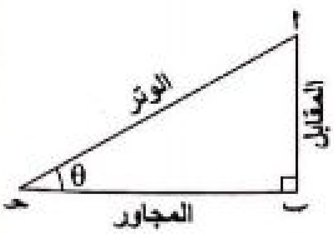
٢ $١ + ظا^{٢}\theta = قا^{٢}\theta$

٣ $١ + ظتا^{٢}\theta = قتا^{٢}\theta$

٤ $جا\theta\, قتا\theta = ١$ ، $جتا\theta\, قا\theta = ١$ ، $ظا\theta\, ظتا\theta = ١$

٥ $ظا\theta = \frac{جا\theta}{جتا\theta}$ ، $ظتا\theta = \frac{جتا\theta}{جا\theta}$

- ينبغى تذكر العلاقات الآتية :



١ $جا\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{أب}{أحـ}$

٢ $جتا\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{بحـ}{أحـ}$

٣ $ظا\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{أب}{بحـ}$

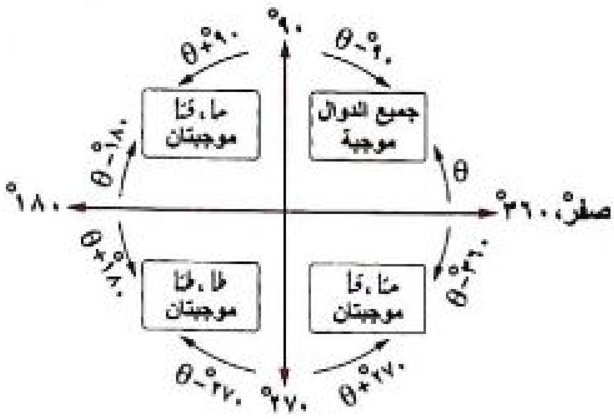
٤ إذا كان الضلع النهائى للزاوية الموجهة التى قياسها θ فى وضعها القياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة (س ، ص)

فإن : $س = جتا\theta$ ، $ص = جا\theta$ ، $س^{٢} + ص^{٢} = ١$

٥ العلاقات بين الدوال المثلثية للزوايا المنتسبة

هى متطابقات ويمكن أن نتذكرها

من الشكل المقابل



فمثلًا :

جا (٩٠° + θ) = جتا θ

، ظا (٣٦٠° − θ) = − ظا θ

، ..... كل منهما متطابقة مثلثية.

مساحات بعض الأشكال الهندسية

* مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ أَ بَ جا جـ = $\frac{1}{2}$ بَ جـَ جا أ = $\frac{1}{2}$ أَ جـَ جا ب

* مساحة المثلث أ ب جـ = $\sqrt{ع(ع - أ)(ع - ب)(ع - جـ)}$ حيث ع = $\frac{أ + ب + جـ}{2}$

* مساحة الشكل الرباعى = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى قطريه × جيب الزاوية المحصورة بينهما

* مساحة المضلع المنتظم الذى عدد أضلاعه ن وطول ضلعه س سم = $\frac{ن}{4}$ س^2 ظتا $\frac{\pi}{ن}$

* مساحة الدائرة = π نق^2 ، محيط الدائرة = ٢ π نق

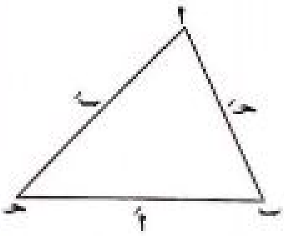
* مساحة القطاع الدائرى = $\frac{1}{2}$ ل نق = $\frac{1}{2}$ θ^{ء} نق^2 ، محيط القطاع = ٢ نق + ل

* مساحة القطعة الدائرية = $\frac{1}{2}$ نق^2 (θ^{ء} − جا θ)

الدرس 1

قانون الجيب (قاعدة الجيب)





«فى أى مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها».

أى أنه فى أى مثلث أ ب ج يكون : $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{جا ج}}$

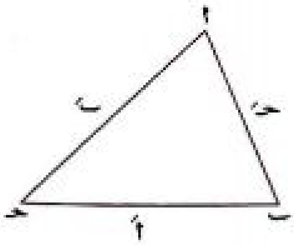
حيث إن الرموز أ ، ب ، ج تعبر عن قياسات زوايا Δ أ ب ج

كما أن الرموز أ ، ب ، ج تعبر عن أطوال الأضلاع $\overline{\text{ب ج}}$ ، $\overline{\text{أ ج}}$ ، $\overline{\text{أ ب}}$ على الترتيب.

البرهـان

∵ مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى ضلعين فيه

× جيب الزاوية المحصورة بينهما.



∴ مساحة Δ أ ب ج = $\frac{1}{2}$ أ ج جا ب (١)

= $\frac{1}{2}$ ج ب جا أ (٢)

= $\frac{1}{2}$ أ ب جا ج (٣)

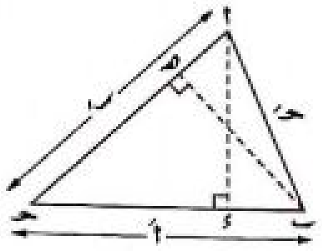
من (١) ، (٢) ، (٣) : ∴ ج ب جا أ = أ ج جا ب = أ ب جا ج

وبالقسمة على أ ب ج : ∴ $\frac{\text{جا أ}}{\text{أ}} = \frac{\text{جا ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{جا ج}}{\text{ج}}$

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{جا ج}}$ (وهو المطلوب)

برهان آخر

أولاً : إذا كان Δ أ ب ح حاد الزوايا :



نرسم $\overline{\text{أء}} \perp \overline{\text{ب ح}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}} \perp \overline{\text{أ ح}}$

في Δ أ ء ب : $\frac{\text{أء}}{\text{أب}}$ = حا ب   ∴ أء = أب حا ب = حَ حا ب

، في Δ أ ء ح : $\frac{\text{أء}}{\text{أح}}$ = حا ح   ∴ أء = أح حا ح = بَ حا ح

∴ حَ حا ب = بَ حا ح   ∴ $\boxed{\frac{\text{بَ}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{حَ}}{\text{حا ح}}}$ (١)

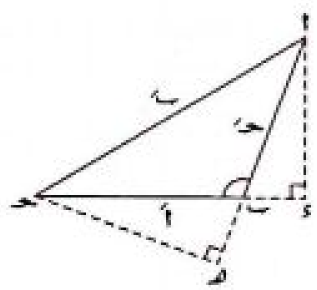
، وبالمثل في Δ ب هـ أ : $\frac{\text{ب هـ}}{\text{أب}}$ = حا أ   ∴ ب هـ = أب حا أ = حَ حا أ

، في Δ ب هـ ح : $\frac{\text{ب هـ}}{\text{ب ح}}$ = حا ح   ∴ ب هـ = ب ح حا ح = أَ حا ح

∴ حَ حا أ = أَ حا ح   ∴ $\boxed{\frac{\text{أَ}}{\text{حا أ}} = \frac{\text{حَ}}{\text{حا ح}}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{\text{أَ}}{\text{حا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{حَ}}{\text{حا ح}}$ (وهو المطلوب)

ثانيًا : إذا كان Δ أ ب ح منفرج الزاوية في ب :



نرسم $\overleftarrow{\text{أء}} \perp \overleftarrow{\text{ح ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ح هـ}} \perp \overleftarrow{\text{أ ب}}$

في Δ أ ء ب : $\frac{\text{أء}}{\text{أب}}$ = حا (∠ أ ب ء)

∴ أء = أب حا (١٨٠° − ب) = حَ حا ب

، في Δ أ ء ح : $\frac{\text{أء}}{\text{أح}}$ = حا ح   ∴ أء = أح حا ح = بَ حا ح

∴ حَ حا ب = بَ حا ح   ∴ $\boxed{\frac{\text{بَ}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{حَ}}{\text{حا ح}}}$ (١)

، في Δ ح هـ ب : $\frac{\text{ح هـ}}{\text{ب ح}}$ = حا (∠ ح ب هـ)

∴ ح هـ = ب ح حا (١٨٠° − ب) = أَ حا ب

، في Δ ح هـ أ : $\frac{\text{ح هـ}}{\text{أ ح}}$ = حا أ   ∴ ح هـ = بَ حا أ

∴ أَ حا ب = بَ حا أ   ∴ $\boxed{\frac{\text{أَ}}{\text{حا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{حا ب}}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{\text{أَ}}{\text{حا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{حَ}}{\text{حا ح}}$ (وهو المطلوب)

* لاحظ أن قانون الجيب صحيح أيضًا في حالة المثلث القائم الزاوية.

مثال ١

في Δ أ ب حـ إذا كان : أ = ١٠ سم ، ق(∠ أ) = ٣٠° ، ق(∠ ب) = ٤٥°
فأوجد مستخدمًا حاسبة الجيب كلاً من : بَ ، حـَ لرقم عشري واحد وكذلك مساحة Δ أ ب حـ لأقرب عدد صحيح.

الحل

∵ ق(∠ حـ) = ١٨٠° − (٣٠° + ٤٥°) = ١٠٥°

∴ $\frac{أ}{جا أ} = \frac{بَ}{جا ب} = \frac{حـَ}{جا حـ}$ ∴ $\frac{١٠}{جا ٣٠°} = \frac{بَ}{جا ٤٥°} = \frac{حـَ}{جا ١٠٥°}$

∴ بَ = $\frac{١٠ جا ٤٥°}{جا ٣٠°}$ ≈ ١٤,١ سم ، حـَ = $\frac{١٠ جا ١٠٥°}{جا ٣٠°}$ ≈ ١٩,٣ سم

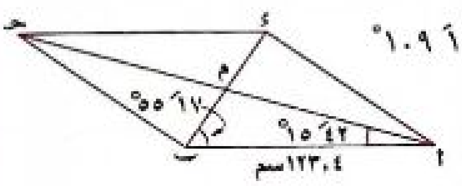
، مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ بَ حـَ جا أ = $\frac{١}{٢}$ × ١٤,١ × ١٩,٣ جا ٣٠° ≈ ٦٨ سم²

مثال ٢

أ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه : أ ب = ١٢٣,٤ سم ، القطران $\overline{أ حـ}$ ، $\overline{ب ء}$
يصنعان مع الضلع $\overline{أ ب}$ زاويتين قياساهما ١٥° ٤٢َ ، ٥٥° ١٧َ على الترتيب أوجد :

[١] طول كل من القطرين $\overline{ب ء}$ ، $\overline{أ حـ}$ [٢] مساحة متوازي الأضلاع أ ب حـ ء

الحل



نفرض أن : $\overline{أ حـ}$ ∩ $\overline{ب ء}$ = {م}

∴ في Δ م أ ب : ق(∠ أ م ب) = ١٨٠° − (١٥° ٤٢َ + ٥٥° ١٧َ) = ١٠٩° ١َ

∴ $\frac{١٢٣,٤}{جا ١٠٩° ١َ} = \frac{ب م}{جا ١٥° ٤٢َ} = \frac{أ م}{جا ٥٥° ١٧َ}$

∴ ب م = $\frac{١٢٣,٤ جا ١٥° ٤٢َ}{جا ١٠٩° ١َ}$ ≈ ٣٥,٣ سم ∴ ب ء = ٢ ب م = ٧٠,٦ سم

، أ م = $\frac{١٢٣,٤ جا ٥٥° ١٧َ}{جا ١٠٩° ١َ}$ ≈ ١٠٧,٣ سم ∴ أ حـ = ٢ أ م = ٢١٤,٦ سم

، مساحة ▱ أ ب حـ ء = ٤ مساحة Δ م أ ب = ٤ × $\frac{١}{٢}$ × ب م × أ م جا (∠ أ م ب)

= ٤ × $\frac{١}{٢}$ × ٣٥,٣ × ١٠٧,٣ جا ١َ ١٠٩° ≈ ٧١٦٢ سم²

مثال ٣

أ ب حـ مثلث فيه : ٣ جا أ = ٤ جا ب = ٢ جا حـ أوجد أطوال أضلاعه إذا علم أن محيطه = ٣٩ سم

الحل

∵ ٣ جا أ = ٤ جا ب = ٢ جا حـ وبالقسمة على ١٢ ∴ $\frac{جا أ}{٤} = \frac{جا ب}{٣} = \frac{جا حـ}{٦}$

∴ $\frac{٤}{جا أ} = \frac{٣}{جا ب} = \frac{٦}{جا حـ}$ ∴ أ : بَ : حـَ = ٤ : ٣ : ٦

بفرض أن : أ = ٤ ك ، بَ = ٣ ك ، حـَ = ٦ ك

، ∵ محيط المثلث = ٣٩ سم ∴ ٤ ك + ٣ ك + ٦ ك = ٣٩

∴ ١٣ ك = ٣٩ ∴ ك = ٣

∴ أ = ١٢ سم ، ب = ٩ سم ، حـ = ١٨ سم

مثال ٤

إذا كان محيط Δ أ ب حـ يساوى ٢٤ سم ، ق (∠ ب) = ٣٠° ، ق (∠ حـ) = ٤٨° أوجد : ب

الحـل

∵ ق (∠ أ) = ١٨٠° − (٣٠° + ٤٨°) = ١٠٢°

$$\therefore \frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}} \qquad \therefore \frac{\text{أ}}{\text{جا }102^\circ} = \frac{\text{ب}}{\text{جا }30^\circ} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا }48^\circ}$$

∵ $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالى}}$ = إحدى النسب

$$\therefore \frac{\text{أ} + \text{ب} + \text{حـ}}{\text{جا }102^\circ + \text{جا }30^\circ + \text{جا }48^\circ} = \frac{\text{ب}}{\text{جا }30^\circ}$$

$$\therefore \frac{24}{\text{جا }102^\circ + \text{جا }30^\circ + \text{جا }48^\circ} = \frac{\text{ب}}{\text{جا }30^\circ}$$

$$\therefore \text{ب} = \frac{24 \text{ جا }30^\circ}{\text{جا }102^\circ + \text{جا }30^\circ + \text{جا }48^\circ} \approx 5{,}4 \text{ سم}$$

تمريـن مشهـور

فى أى مثلث أ ب حـ يكون : $\boxed{\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}} = 2 \text{ نق}}$

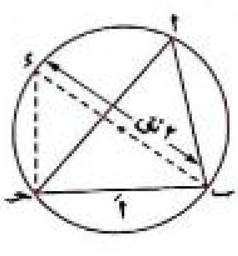
حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب حـ

البرهـان

نرسم الدائرة التى تمر برؤوس Δ أ ب حـ

ثم نرسم القطر $\overline{\text{ب ء}}$ والوتر $\overline{\text{حـ ء}}$

١ إذا كان Δ أ ب حـ حاد الزوايا :



فيكون ق (∠ ب حـ ء) = ٩٠° (محيطية مرسومة فى نصف دائرة)

، ق (∠ أ) = ق (∠ ء) (محيطيتان تحصران $\frown{\text{ب حـ}}$)

فى Δ ء ب حـ : جا ء = $\frac{\text{أ}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{أ}}{2 \text{ نق}}$

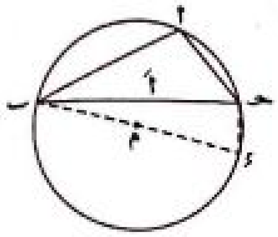
∴ جا أ = $\frac{\text{أ}}{2 \text{ نق}}$

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}}$ = ٢ نق وبطريقة مماثلة يمكن إثبات أن : $\frac{\text{ب}}{\text{جا ب}}$ = ٢ نق ، $\frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$ = ٢ نق

$$\therefore \frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}} = 2 \text{ نق}$$

(وهو المطلوب)

٢ إذا كان Δ أ ب حـ منفرج الزاوية :



فيكون : ق (∠ ب ء حـ) = ١٨٠° − ق (∠ أ)

∴ جا (١٨٠° − أ) = $\frac{\text{ب حـ}}{\text{ب ء}}$ ∴ جا أ = $\frac{\text{أ}}{\text{٢ نق}}$

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}}$ = ٢ نق

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$ = ٢ نق (وهو المطلوب)

مثال ٥

فى Δ أ ب حـ إذا كان : ب = ٧ سم ، ق (∠ ب) = ٣٠° ، حـ = ٩ سم

احسب طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب حـ واحسب أيضًا ق (∠ أ) لأقرب درجة.

الحل

∵ $\frac{\text{ب}}{\text{جا ب}}$ = ٢ نق ∴ $\frac{٧}{\text{جا ٣٠°}}$ = ٢ نق

∴ نق = $\frac{٧}{\text{٢ جا ٣٠°}}$ = ٧ سم

، ∵ $\frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$ = ٢ نق ∴ $\frac{٩}{\text{جا حـ}}$ = ١٤

∴ جا حـ = $\frac{٩}{١٤}$

∴ ق (∠ حـ) ≈ ٤٠° ∴ ق (∠ أ) = ١٨٠° − (٣٠° + ٤٠°) = ١١٠°

أ، ق (∠ حـ) ≈ ١٤٠° ∴ ق (∠ أ) = ١٨٠° − (٣٠° + ١٤٠°) = ١٠°

لاحظ أنه

يوجد مثلثان يحققان هذه المعطيات وهذه الحالة تعرف بالحالة المبهمة وسوف تدرسها بالتفصيل فى درس حل المثلث.

مثال ٦

فى أى مثلث أ ب حـ

أثبت أن : مساحة Δ أ ب حـ = ٢ نق^{٢} جا أ جا ب جا حـ

حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ

الحل

∵ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ جا أ حيث ب = ٢ نق جا ب ، حـ = ٢ نق جا حـ

∴ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ٢ نق جا ب × ٢ نق جا حـ × جا أ

= ٢ نق^{٢} جا أ جا ب جا حـ

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① فى أى مثلث س ص ع يكون : س ص : ص ع = ...

(أ) ما س : ما ص
(ب) ما ص : ما ع
(جـ) ما ع : ما س
(د) ما ع : ما ص

② فى Δ أ ب حـ إذا كان : ق (∠أ) = ٣٠° ، حـَ = ١٥ $\sqrt{٣}$ سم ، ق (∠حـ) = ٦٠°

فإن : أَ = ... سم

(أ) ٣٠
(ب) ٤٥
(جـ) ١٥
(د) ٦٠

③ فى المثلث ء هـ و الذى فيه : ق (∠ء) = ٨٠° ، ق (∠هـ) = ٦٠° إذا كان : وَ = ١٢ سم

فإن : ءَ = ... سم

(أ) $\frac{\text{١٢ ما ٨٠°}}{\text{ما ٤٠°}}$
(ب) $\frac{\text{١٢ ما ٨٠°}}{\text{ما ٦٠°}}$
(جـ) $\frac{\text{١٢ ما ٤٠°}}{\text{ما ٨٠°}}$
(د) $\frac{\text{١٢ حا ٨٠°}}{\text{حا ٤٠°}}$

④ فى Δ أ ب حـ : إذا كان : أَ = ٤ سم ، بَ = ٧ سم ، ق (∠حـ) = ١٢٠°

فإن مساحة المثلث = ... سم^{٢}

(أ) ٧ $\sqrt{٣}$
(ب) ١٤ $\sqrt{٣}$
(جـ) ٧
(د) ١٤

⑤ س ص ع مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٠ $\sqrt{٣}$ سم فإن طول قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث يساوى .... سم

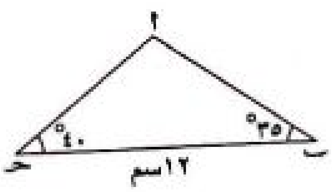
(أ) ٥
(ب) ١٠
(جـ) ١٥
(د) ٢٠

⑥ Δ س ص ع فيه : $\frac{\text{سَ}}{\text{ما س}}$ = ٦ فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه = ... وحدة طول.

(أ) ٦
(ب) ١٢
(جـ) ٣
(د) ٩

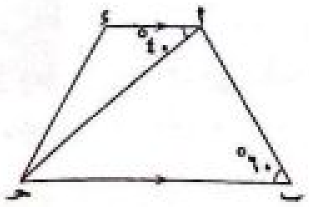
⑦ فى الشكل المقابل :

طول $\overline{\text{أ ب}}$ ≃ .... سم



(أ) ٦
(ب) ٧
(جـ) ٨
(د) ٩

⑧ فى الشكل المقابل :



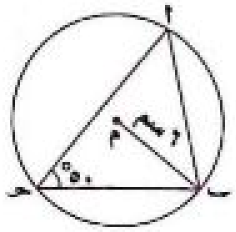
$\overline{أ ء}$ // $\overline{ب حـ}$ ، أ ب = ٤ سم

، ق (∠ ء أ حـ) = ٤٠° ، ق (∠ ب) = ٦٠°

فإن : طول $\overline{أ حـ}$ = ... سم

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ٤

⑨ فى الشكل المقابل دائرة مركزها م ، إذا كان : ب م = ٦ سم



فإن : أ ب = ... سم

(أ) ٦ جا ٥٠° (ب) ١٢ جا ٥٠°

(جـ) ٦ جتا ٥٠° (د) ١٢ جتا ٥٠°

⑩ دائرة طول قطرها ٢٠ سم ، تمر برؤوس Δ أ ب حـ الحاد الزوايا الذى فيه : ب حـ = ١٠ سم

فإن : ق (∠ أ) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٤٥° (د) ١٥٠°

⑪ أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ٤٥° وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ٦ سم

فإن : أً = ... سم

(أ) ١٣ (ب) ٦ $\sqrt{2}$ (جـ) ١٢ (د) $\sqrt{2}$

⑫ إذا كان طول ضلع ما فى أى مثلث = ١٢ سم ، وقياس الزاوية المقابلة لهذا الضلع = ٥٥°

فإن محيط الدائرة المارة برؤوس هذا المثلث ≃ .... سم

(أ) ٣٦ (ب) ٤٢ (جـ) ٤٦ (د) ٥٢

⑬ إذا كان محيط المثلث أ ب حـ يساوى ١٥ سم ، ق (∠ أ) = ٥٣° ، ق (∠ ب) = ٤٧°

فإن : طول $\overline{أ ب}$ ≃ .... سم

(أ) ٦ (ب) ٧ (جـ) ٥ (د) ٨

⑭ أ ب حـ مثلث فيه : أً = ٢٧ سم ، ق (∠ ب) = ٨٢° ، ق (∠ حـ) = ٥٦°

فإن مساحة سطحه ≃ .... سم^2

(أ) ٥٤٠ (ب) ٤٤٧ (جـ) ٣٥٠ (د) ٤٠٠

⑮ مثلث أ ب حـ فيه ق (∠ أ) : ق (∠ ب) : ق (∠ حـ) = ٢ : ٣ : ٤ ، أ ب = ١٢ سم

فإن : طول $\overline{أ حـ}$ ≃ .... سم

(أ) ١٠ (ب) ١١ (جـ) ١٦ (د) ١٨

(١٦) في المثلث أ ب حـ أي من العبارات التالية صحيحة ؟

(أ) جا أ + جتا ب = أ + ب (ب) أ جا ب = ب جا أ

(جـ) أ = ب جا حـ (د) $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{جا ب}}{\text{ب}}$

(١٧) في Δ س ص ع يكون المقدار : ٢ نق جا س = ... «حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة له»

(أ) عَ (ب) صَ

(جـ) سَ (د) مساحة Δ س ص ع

(١٨) 📖 إذا كان نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث س ص ع فإن : $\frac{\text{صَ}}{\text{٢ جا ص}}$ = ...

(أ) نق (ب) ٢ نق (جـ) $\frac{1}{2}$ نق (د) ٤ نق

(١٩) إذا كان المثلث أ ب حـ حاد الزوايا وكان ٢ أَ = $\frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}}$ فإن : ق(∠ أ) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٧٥°

(٢٠) إذا كان : أ ب حـ مثلث فيه : جا أ = ٢ جا حـ ، ب حـ = ٦ سم فإن : أ ب = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٦

(٢١) إذا كان طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ يساوي ٣ سم

وكان : جا أ + جا ب + جا حـ = ٢ فإن محيط المثلث أ ب حـ = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ٢٤

(٢٢) أ ب حـ مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٦ سم وكانت مساحة الدائرة المارة برؤوسه تساوي ك π سم²

فإن : ك = ...

(أ) ٢ √٣ (ب) ٨ √٣ (جـ) ١٢ (د) ٢٤

(٢٣) 📖 في أي مثلث أ ب حـ يكون $\frac{\text{جا (أ + ب)}}{\text{جا أ + جا ب}}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{\text{حَ}}{\text{أَ + بَ}}$ (جـ) $\frac{\text{أَ}}{\text{بَ + حَ}}$ (د) $\frac{\text{بَ}}{\text{أَ + حَ}}$

(٢٤) في Δ أ ب حـ يكون : $\frac{\text{أَ}}{\text{أَ + بَ}} = \frac{\text{جا أ}}{\text{.........}}$

(أ) جا ب (ب) جا حـ (جـ) جا أ + جا ب (د) جا أ + جا حـ

(٢٥) 📖 في Δ س ص ع : إذا كان ٣ جا س = ٤ جا ص = ٢ جا ع فإن سَ : صَ : عَ = ...

(أ) ٢ : ٣ : ٤ (ب) ٦ : ٤ : ٣ (جـ) ٢ : ٤ : ٦ (د) ٤ : ٣ : ٦

(٢٦) 📖 أ ب حـ مثلث فيه : $\frac{\text{جا أ}}{٣} = \frac{\text{٢ جا ب}}{٥} = \frac{\text{جا حـ}}{٤}$ فإن : أَ : بَ : حَ = ...

(أ) ٦ : ٥ : ٨ (ب) ٨ : ٥ : ٦ (جـ) ٧ : ٢ : ٤ (د) ٣ : ٥ : ٤

(٢٧) فى Δ أ ب حـ إذا كان : $\frac{\text{جا أ}}{٤} = \frac{\text{جا ب}}{٩} = \frac{\text{جا حـ}}{٧}$ فإن أكبر زاوية قياسًا تكون ....

(أ) ∠ أ (ب) ∠ ب (جـ) ∠ حـ (د) قائمة.

(٢٨) إذا كان أ ب حـ مثلث فيه ق (∠ أ) : ق (∠ ب) : ق (∠ حـ) = ٣ : ٥ : ٤

فإن : $\text{حـ}^٢ : \text{أ}^٢$ = ...

(أ) $\sqrt{٦}$: ٢ (ب) ٢ : ٣ (جـ) ٤ : ٣ (د) ٣ : ٢

(٢٩) فى أى مثلث أ ب حـ يكون : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{جا ب}}{\text{جا أ}}$ = ...

(أ) $\frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$ (ب) $\frac{\text{جا حـ}}{\text{حـ}}$ (جـ) ٤ نق^٢ (د) ١

(٣٠) فى Δ أ ب حـ إذا كان نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث = ٤ سم

فإن : $\frac{\text{أ} + \text{ب} + \text{حـ}}{\text{جا أ} + \text{جا ب} + \text{جا حـ}}$ = ...

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ٨ (د) ١٦

(٣١) إذا كان أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب وكان : ب = ١٠ سم فإن : $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} + \frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$ = ... سم

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٤٠ (د) ١٠٠

(٣٢) إذا كان نصف قطر الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ يساوى نق

فإن محيط المثلث = ... (جا أ + جا ب + جا حـ)

(أ) نق (ب) ٢ نق (جـ) ٤ نق^٢ (د) ٨ نق^٢

(٣٣) إذا كان أ ب حـ مثلث فيه : أ − ب = ٤ سم ، جا أ = $\frac{٣}{٢}$ جا ب فإن : أ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٢

(٣٤) إذا كان أ ب حـ مثلث محيطه ٢٤ سم وكان : جا أ + جا ب = ٣ جا حـ فإن : حـ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ٩

(٣٥) أ ب حـ مثلث فيه جا ب + جا حـ = ٤ جا أ وكان ب + حـ = ٢ أ + ١٠ سم

فإن : أ = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٣٦) أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، ق (∠ أ) − ق (∠ حـ) = °٩٠

فإن : ظا حـ = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

(٣٧) إذا كان نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث أ ب حـ وكان أ = نق

فإن : ق (∠ أ) = ...

(أ) °٣٠ فقط. (ب) °٣٠ أ، °١٢٠ (جـ) °١٥٠ فقط. (د) °٣٠ أ، °١٥٠

(٣٨) إذا كانت مساحة المثلث أ ب حـ هى Δ ، نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه

فإن : $\frac{\text{٤ نق } \Delta}{\text{أ ب حـ}}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) $\frac{١}{٢}$

(٣٩) 📖 فى Δ أ ب حـ يكون $\frac{\text{٢ ب}}{\text{جا ب}}$ = ... نق حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٨

(٤٠) أ ب حـ مثلث فيه ب = ١٢ سم ، نق هو طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث

فإن مساحة المثلث = ... سم^{٢}

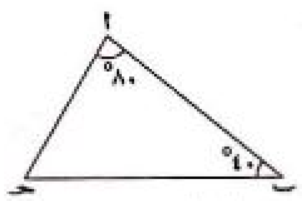
(أ) $\frac{\text{٢ أ حـ}}{\text{نق}}$ (ب) $\frac{\text{٣ أ حـ}}{\text{نق}}$ (جـ) $\frac{\text{٤ أ حـ}}{\text{نق}}$ (د) $\frac{\text{٦ أ حـ}}{\text{نق}}$

(٤١) إذا كان المثلث أ ب حـ قائم الزاوية ومتساوى الساقين ، نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه

فإن مساحة Δ أ ب حـ = ... (بدلالة نق)

(أ) $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} (ب) ٢ نق^{٢} (جـ) نق^{٢} (د) ٤ نق^{٢}

(٤٢) فى الشكل المقابل :



إذا كان محيط Δ أ ب حـ = ٢٠ سم

فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه ≃ .... سم

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(٤٣) إذا كان أ ب حـ مثلث فيه : جا (ب + حـ) = $\frac{٣}{٥}$ ، ب حـ = ٨ سم

فإن طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) ١٠

(٤٤) مثلث مساحته = $\frac{\text{أ}^{٢}\text{ جا ب جا حـ}}{\text{ك جا أ}}$ فإن : ك = ... ، ك ≠ ٠

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٤٥) إذا كان نق نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث أ ب حـ وكان : أ = $\frac{١}{٢}$ نق

فإن : ق (∠ أ) = ... حيث أ زاوية حادة.

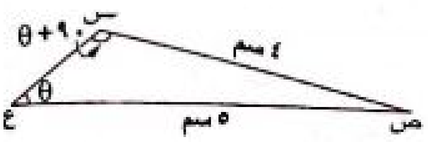
(أ) جا$^{-١}$ (١) (ب) جا$^{-١}$ (٢) (جـ) جا$^{-١}$ $\left(\frac{١}{٢}\right)$ (د) جا$^{-١}$ $\left(\frac{١}{٤}\right)$

(٤٦) إذا كانت Δ هى مساحة المثلث س ص ع ، ح هى نصف محيط المثلث س ص ع

فإن : $\frac{٢}{\text{ع جا س}}$ + $\frac{٢}{\text{س جا ص}}$ + $\frac{٢}{\text{ص جا ع}}$ = ...

(أ) $\frac{\text{ح}}{\Delta}$ (ب) $\frac{\text{٢ ح}}{\Delta}$ (جـ) $\frac{\text{٣ ح}}{\Delta}$ (د) $\frac{\text{٤ ح}}{\Delta}$

(٤٧) في الشكل المقابل :



ظا θ = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$

(جـ) $\frac{٥}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ س ص ع مثلث فيه : ق(∠س) = ٨٠° ، ق(∠ص) = ٦٠° ، عَ = ١٠ سم

أوجد كلًا من سَ ، صَ لأقرب سم «١٥ سم ، ١٣ سم»

٢ أ ب حـ مثلث فيه : حَ = ١٩ سم ، ق(∠أ) = ١١٢° ، ق(∠ب) = ٣٣° أوجد بَ ثم أوجد طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث أ ب حـ لأقرب رقمين عشريين. «١٨,٠٤ سم ، ١٦,٥٦سم»

٣ ل م ن مثلث فيه : مَ = ٦٨,٤ سم ، ق(∠م) = ١٠٠° ، ق(∠ن) = ٤٠°

أوجد : (١) لَ (٢) طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث ل م ن

(٣) مساحة المثلث ل م ن لأقرب سم² «٤٤,٦٤ سم ، ٣٤,٧٣ سم ، ٩٨١ سم²»

٤ ل م ن مثلث فيه : ق(∠ل) = ١٨° ٥٢َ ، ق(∠ن) = ٤٤° ١٧َ ، ن ل = ٣٥ سم

أوجد : (١) طول كل من : مـن ، لـم

(٢) مساحة الدائرة المارة برؤوس المثلث ل م ن «١٢,٧ سم ، ٢٧,٤ سم ، ١٢٠٨,٧ سم²»

٥ أ ب حـ مثلث فيه : بَ = ١٠ سم ، ق(∠أ) = ٤٠° ، ق(∠حـ) = ٨٠°

أوجد طول أكبر الأضلاع طولًا. «١١ سم»

٦ أ ب حـ مثلث فيه : حَ = ٤,٥ سم ، ق(∠أ) = ١٠٠° ، ق(∠ب) = ١٥°

أوجد طول أصغر الأضلاع طولًا. «١,٢ سم»

٧ أ ب حـ مثلث فيه : ق(∠أ) = ٦٠° ، أَ = ٧ $\sqrt{٣}$ سم أوجد مساحة ومحيط الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ $(\pi = \frac{٢٢}{٧})$ «١٥٤ سم² ، ٤٤ سم»

٨ أ ب حـ مثلث فيه : ق(∠أ) = ٦٠° ، ق(∠ب) = ٤٥°

أثبت أن : أَ : بَ : حَ = $\sqrt{٦}$: ٢ : $\sqrt{٣}$ + ١

٩ أ ب حـ مثلث فيه : أَ = ١٣ سم ، ق(∠أ) = ٥٣° ٨َ ، حَ = ١٥ سم

احسب طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ ، احسب ق(∠حـ)

«٨,١ سم ، ٦٧° ٢٣َ ٩ً أو ١١٢° ٣٦َ ٥١ً»

١٠ أ ب حـ مثلث فيه : ق(∠أ) = ٣٥° ، أ = ٨ سم ، ب = ٦ سم أوجد : ق(∠ب) «٢٥° ٢٨َ ٤٥ً»

١١ 📖 أوجد محيط المثلث أ ب حـ الذى فيه : حـ = ٨,٧ سم ، ق(∠أ) = ٥٧° ١٣َ
، ق(∠ب) = ٦٤° ١٨َ «٢٦,٥ سم»

١٢ أ ب حـ مثلث فيه : ق(∠ب) = ٤٥° ، ق(∠حـ) = ٦٠° ، وطول قطر الدائرة المارة برؤوسه = ٤٠ سم
احسب مساحة ومحيط هذا المثلث لأقرب عدد صحيح. «٤٧٣ سم^2 ، ١٠٢ سم»

١٣ أ ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه : ق(∠أ) = ١٢٠° ، وطول نصف قطر الدائرة المارة
برؤوسه يساوى ١٢ سم أوجد حـ ثم احسب مساحة Δ أ ب حـ «١٢ سم ، ٦٢,٤ سم^2»

١٤ أ ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه : أ = ب ، ق(∠أ) = ١٥° ، محيطه = ٢٥ سم
أوجد مساحة الدائرة المارة برؤوسه. «٤٧٤ سم^2»

١٥ 📖 إذا كان محيط Δ أ ب حـ = ٤٠ سم ، ق(∠أ) = ٤٤° ، ق(∠ب) = ٦٦°
فأوجد أطوال أضلاع المثلث أ ب حـ «١٠,٩ سم ، ١٤,٢ سم ، ١٤,٨ سم»

١٦ أ ب حـ مثلث فيه : حـ = ١٢ سم ، ق(∠ب) = ٢ ق(∠أ) = ٦٠°
أوجد أ ثم أوجد مساحة المثلث لأقرب سم^2 «٤,٢ سم ، ٢٢ سم^2»

١٧ 📖 أ ب حـ مثلث مساحة سطحه ٤٥٠ سم^2 ، ق(∠ب) = ٨٢° ، ق(∠حـ) = ٥٦°
فما قيمة أ ؟ «٢٧ سم»

١٨ أ ب حـ مثلث حاد الزوايا فيه : أ حـ = ١٢ سم ، جا أ = ٠,٦ ، مساحته تساوى ٤٣,٢ سم^2
أوجد طول $\overline{أ ب}$ ، طول $\overline{ب حـ}$ ، ق(∠ب) «١٢ سم ، ٧,٦ سم ، ٧١° ٣٤َ»

١٩ أوجد محيط المثلث أ ب حـ الحاد الزوايا إذا كان :
أ = ٧ سم ، ب = ٨ سم ، ق(∠أ) = ٦٠° «٢٠ سم»

٢٠ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، ء ∈ $\overleftarrow{ب حـ}$ ، ء ∉ $\overline{ب حـ}$ بحيث حـ ء = ٤ سم
، ق(∠أ ء حـ) = ٤٥° ١٥َ ، ق(∠حـ أ ء) = ١٨° أوجد طول $\overline{أ ب}$ لأقرب سم «٨ سم»

٢١ س ص ع مثلث فيه : ص ع = ١٥ سم ، ق(∠ص) = ٣٠° ، ق(∠ع) = ٧٠°
احسب طول العمود الساقط من س على $\overline{ص ع}$ «٧,١٦ سم»

٢٢ أ ب حـ مثلث منفرج الزاوية فى حـ فيه : أ = ٨ سم ، حـ = ٢٠ سم ، ظا أ = $\frac{1}{2\sqrt{2}}$
أوجد : ق(∠حـ) «١٢٣° ٣٣َ»

٢٣ أ ب جـ مثلث فيه : ب = ٥ سم ، طا جـ = $\frac{٤}{٣}$ ، ق(∠ب) = ٣٠°

أوجد لأقرب سنتيمتر كلاً من أ ، جـ ومساحة المثلث أ ب جـ

«١٠ سم ، ٨ سم ، ٢٠ سم²»

---

٢٤ س ص ع مثلث فيه : جا س + جا ص + جا ع = ٢,٣٧ ، ومحيطه = ٥٦,٨٨ سم

أوجد طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه.

«١٢ سم»

---

٢٥ أ ب جـ مثلث فيه : ق(∠أ) = ٦٠° ، ق(∠ب) = ٤٥° فإذا كان : أ + ب = ($\sqrt{٦}$ + ٢) سم

فأوجد كلًا من : أ ، ب

«$\sqrt{٦}$ سم ، ٢ سم»

---

٢٦ أ ب جـ مثلث فيه : جا أ : جا ب : جا جـ = ٢ : ٤ : ٥ ، جـ − ب = ٣ سم

أوجد كلاً من : أ ، ب

«٦ سم ، ١٢ سم»

---

٢٧ أ ب جـ مثلث فيه : ق(∠أ) : ق(∠ب) : ق(∠جـ) = ٢ : ٤ : ٣

فإذا كان : أ = ٥ سم فأوجد محيط المثلث.

«١٥,٩ سم»

---

٢٨ أ ب جـ مثلث فيه : ق(∠أ) : ق(∠ب) : ق(∠جـ) = ١ : ٣ : ٥

، فإذا كان محيط المثلث = ١٦ سم فأوجد طول أصغر أضلاع المثلث طولاً.

«٢,٥ سم»

---

٢٩ أ ب جـ مثلث فيه : ق(∠أ) = $\frac{٢}{٣}$ ق(∠ب) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠جـ) ، طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ١٠ سم أوجد مساحة Δ أ ب جـ

«١١٠ سم²»

---

٣٠ أ ب جـ مثلث فيه : ٦ جا أ = ٤ جا ب = ٣ جا جـ ، محيطه = ٤٥ سم

أوجد كلاً من : أ ، جـ

«١٠ سم ، ٢٠ سم»

---

٣١ في Δ أ ب جـ إذا كان : $\frac{أ + ب - جـ}{٣} = \frac{أ + جـ - ب}{٥} = \frac{ب + جـ - أ}{٧}$

فأثبت أن : جا أ : جا ب : جا جـ = ٤ : ٥ : ٦

---

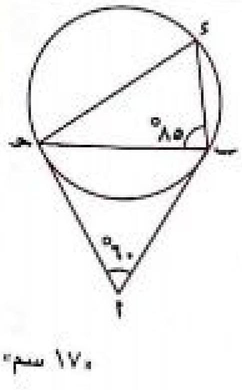
٣٢ في الشكل المقابل :

أب ، أجـ قطعتان مماستان للدائرة عند ب ، جـ

فإذا كان : ق(∠أ) = ٦٠° ، ق(∠د ب جـ) = ٨٥°

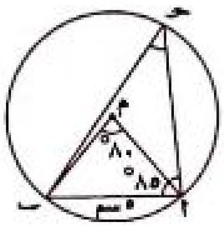
، مساحة المثلث أ ب جـ = ٩ $\sqrt{٣}$ سم²

فأوجد لأقرب سنتيمتر محيط المثلث د ب جـ



«١٧ سم»

٣٣ في الشكل المقابل :



م دائرة ، أ ب = ٥ سم ، ق (∠ أ م ب) = ٨٠°

، ق (∠ حـ أ ب) = ٨٥°

أوجد : (١) محيط Δ أ ب حـ

(٢) مساحة سطح الدائرة م

«١٩,١٢ سم ، ٤٧,٥ سم٢»

---

٣٤ أ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه : ق (∠ أ) = ٥٠° ، ق (∠ ء ب حـ) = ٧٠° ، ب ء = ٨ سم

أوجد محيط متوازي الأضلاع.

«٢٨ سم»

---

٣٥ أ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه : أ ب = ١٨ سم ، ق (∠ حـ أ ب) = ٣٦° ، ق (∠ ء ب أ) = ٤٤°

أوجد طول القطر $\overline{\text{أ حـ}}$ ، ومساحة متوازي الأضلاع.

«٢٥,٣٩ سم ، ٢٦٩ سم٢»

---

٣٦ أ ب حـ ء متوازي أضلاع تتقاطع قطراه في م ، أ حـ = ٢٠ سم ، ق (∠ أ م ء) = ١٣٠°

، ق (∠ حـ أ ب) = ٨٥° أوجد طول $\overline{\text{ب ء}}$ ثم أوجد مساحة متوازي الأضلاع أ ب حـ ء

«٢٨,٢ سم ، ٢١٦ سم٢»

---

٣٧ أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ، أ ء = ٢٠ سم ، ق (∠ ء) = ١٢٠°

، ق (∠ ب) = ٦٢° ، ق (∠ أ حـ ب) = ٢٣ َ٢٥°

أوجد : (١) طول كل من : $\overline{\text{أ حـ}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ لأقرب سم

(٢) مساحة شبه المنحرف أ ب حـ ء لأقرب سم٢

«٢٩ سم ، ٣٣ سم ، ٣٠٥ سم٢»

---

٣٨ أ ب حـ ء شكل رباعي فيه : حـ ء = ١٠٠ سم ، ق (∠ ب حـ أ) = ٣٦°

، ق (∠ ب ء أ) = ٥٥° ، ق (∠ ب حـ ء) = ٨٥° ، ق (∠ حـ ء أ) = ٨٧°

أوجد طول كل من : $\overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ لأقرب سنتيمتر

«١١٢ سم ، ١٤٤ سم»

---

٣٩ إذا كان أ ب حـ ء شكلاً رباعيًا فيه : ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠° ، ق (∠ ب أ ء) = ٨٠°

، أ ب = أ ء = ١٠ سم ، ب ء = ب حـ احسب مساحة الشكل أ ب حـ ء

«١٠٢ سم٢»

---

٤٠ في أي مثلث أ ب حـ :

أثبت أن : (١) $\frac{\text{٣ أ}^{٢} - \text{٤ ب}^{٢}}{\text{٣ جا أ} - \text{٤ جا ب}} = \frac{\text{حـ}^{٢}}{\text{جا حـ}}$

(٢) مساحة المثلث = $\frac{\text{أ}^{٢}\ \text{جا ب جا حـ}}{\text{٢ جا أ}}$

(٣) مساحة المثلث = $\frac{\text{أ ب حـ}}{\text{٤ نق}}$

حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث أ ب ح يساوى ٣ سم

فإن : $\frac{أ ب ح}{جا أ جا ب جا ح}$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٢٧ (د) ٢١٦

(٢) إذا كان أ ب ح مثلث فإن : أ قتا أ + ب قتا ب + ح قتا ح = ...

(أ) ٢ نق (ب) ٤ نق (جـ) ٦ نق (د) ٨ نق

(٣) إذا كان : أ = جا ب ، ب = جا ح ، ح = جا أ فإن محيط الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب ح

يساوى ....

(أ) ١ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) π (د) ٢ π

(٤) فى Δ أ ب ح : $\frac{أ جا أ + ب جا ب + ح جا ح}{أ^٢ + ب^٢ + ح^٢}$ = ...

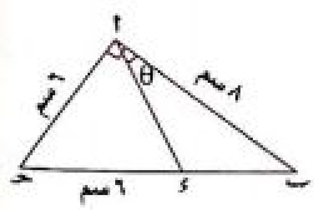
(أ) $\frac{١}{نق^٢}$ (ب) $\frac{١}{٢ نق}$ (جـ) ٢ نق (د) نق^٢

(٥) إذا كان أ ب ح مثلث مساحته ٢٤ سم^٢ وكان طول نصف قطر الدائرة الخارجة عنه ٥ سم

فإن : جا أ جا ب جا (أ + ب) = ...

(أ) $\frac{٣}{٢٥}$ (ب) $\frac{٦}{٢٥}$ (جـ) $\frac{٩}{٢٥}$ (د) $\frac{١٢}{٢٥}$

(٦) فى الشكل المقابل :

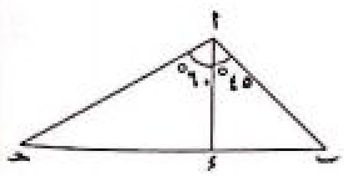


ظا θ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٣}$

(جـ) ٢ (د) ١

(٧) فى الشكل المقابل :

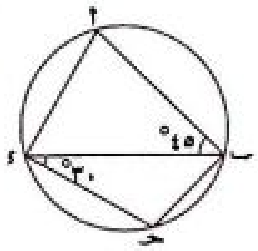


إذا كان : ح ء = ٢ ء ب

فإن : $\frac{جا ب}{جا ح}$ = ...

(أ) $\sqrt{٦}$ (ب) $\frac{\sqrt{٦}}{٤}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٦}}{٣}$ (د) $\frac{٢\sqrt{٦}}{٣}$

⑧ فى الشكل المقابل :

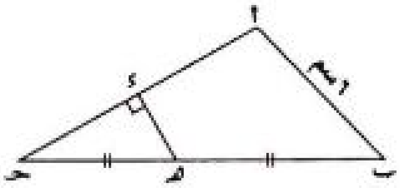


إذا كان : أ ء = ٤ $\sqrt{٢}$ سم فإن : ب حـ = ... سم

(أ) ٢ $\sqrt{٢}$ (ب) ٤

(جـ) ٤ $\sqrt{٢}$ (د) ٨

⑨ فى الشكل المقابل :



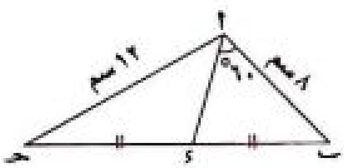
إذا كان : ظا (∠ ء هـ حـ) = $\frac{٣}{٤}$

فإن طول نصف قطر الدائرة المارة

برؤوس Δ أ ب حـ = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٣,٥ (جـ) ٣,٧٥ (د) ٤

⑩ فى الشكل المقابل :

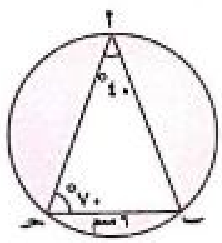


ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ، ق (∠ ب أ ء) = ٦٠°

فإن : ظا (∠ ء أ حـ) = ...

(أ) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ (ب) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (جـ) ١ (د) $\sqrt{٢}$

⑪ فى الشكل المقابل :



مساحة الجزء المظلل ≈ .... سم²

(أ) ٤,٣٧ (ب) ٢٦,٢

(جـ) ٤٣,٧ (د) ٥٢,٦

٢ إذا كان أ ب حـ ء شكلاً رباعيًا دائريًا

أثبت أن : ب حـ × جا (∠ أ ب ء) = أ ء × جا (∠ حـ ء ب)

٣ فى المثلث أ ب حـ :

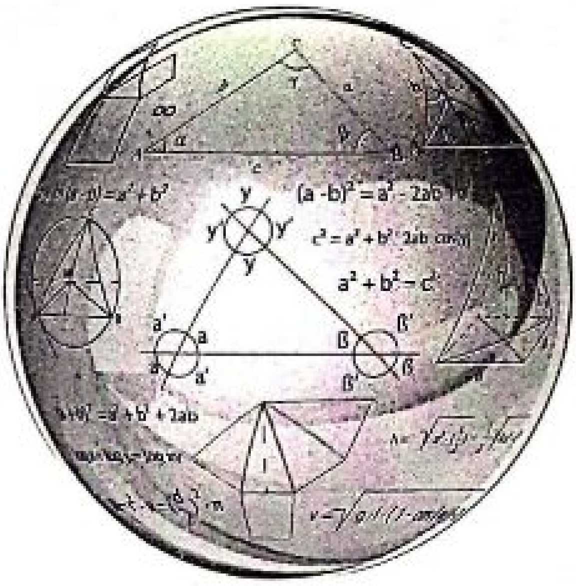
أثبت أن : ① جا أ + جا ب + جا حـ = $\frac{٤ \text{ ع } \Delta}{\text{أ ب حـ}}$

② $\frac{١}{\text{حـ جا أ}} + \frac{١}{\text{أ جا ب}} + \frac{١}{\text{ب جا حـ}} = \frac{\text{ع}}{\Delta}$

حيث ع نصف محيط المثلث أ ب حـ ، Δ مساحة المثلث أ ب حـ

٤ أثبت أن مساحة الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ تساوى $\frac{\pi \text{ أ ب}}{\text{٤ جا أ جا ب}}$

قانون جيب التمام (قاعدة جيب التمام)



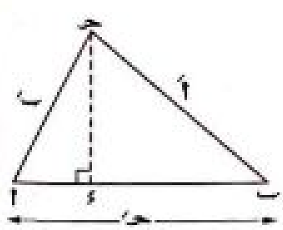
فى أى مثلث أ ب حـ يكون :

القاعدة		الصورة الأخرى
$\text{أ}^2 = \text{ب}^2 + \text{حـ}^2 - 2\,\text{ب حـ جتا أ}$	ومنها	$\text{جتا أ} = \dfrac{\text{ب}^2 + \text{حـ}^2 - \text{أ}^2}{2\,\text{ب حـ}}$
$\text{ب}^2 = \text{أ}^2 + \text{حـ}^2 - 2\,\text{أ حـ جتا ب}$	ومنها	$\text{جتا ب} = \dfrac{\text{أ}^2 + \text{حـ}^2 - \text{ب}^2}{2\,\text{أ حـ}}$
$\text{حـ}^2 = \text{أ}^2 + \text{ب}^2 - 2\,\text{أ ب جتا حـ}$	ومنها	$\text{جتا حـ} = \dfrac{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 - \text{حـ}^2}{2\,\text{أ ب}}$

تستخدم هذه القاعدة إذا علم طولا ضلعين فى Δ أ ب حـ وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

تستخدم هذه القاعدة إذا علمت أطوال أضلاع Δ أ ب حـ أو النسبة بينها.

البرهـــان



ليكن المطلوب إثبات أن : $\text{أ}^2 = \text{ب}^2 + \text{حـ}^2 - 2\,\text{ب حـ جتا أ}$

أولاً : إذا كان Δ أ ب حـ حاد الزوايا :

نرسم $\overline{\text{حـ ء}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ يقطعها فى ء

، من Δ أ ء حـ نجد أن : حـ ء = ب جا أ ، أ ء = ب جتا أ $\therefore$ ب ء = حـ − ب جتا أ

، فى Δ حـ ء ب القائم الزاوية فى ء : $\because (\text{ب حـ})^2 = (\text{حـ ء})^2 + (\text{ء ب})^2$

أى أن $\text{أ}^2 = (\text{ب جا أ})^2 + (\text{حـ} - \text{ب جتا أ})^2$

$= \text{ب}^2\,\text{جا}^2\,\text{أ} + \text{حـ}^2 - 2\,\text{ب حـ جتا أ} + \text{ب}^2\,\text{جتا}^2\,\text{أ}$

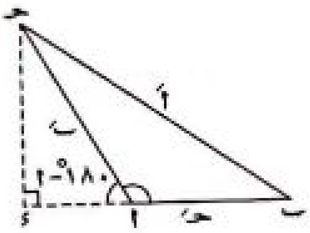
$= \text{ب}^2\,(\text{جا}^2\,\text{أ} + \text{جتا}^2\,\text{أ}) + \text{حـ}^2 - 2\,\text{ب حـ جتا أ}$

$\therefore \text{أ}^2 = \text{ب}^2 + \text{حـ}^2 - 2\,\text{ب حـ جتا أ}$ ومنها $\text{جتا أ} = \dfrac{\text{ب}^2 + \text{حـ}^2 - \text{أ}^2}{2\,\text{ب حـ}}$ (وهو المطلوب)

تذكر أن

$\text{جا}^2\,\text{أ} + \text{جتا}^2\,\text{أ} = 1$

ثانيًا : إذا كان Δ أ ب حـ منفرج الزاوية فى أ :



نرسم حـ ء ⊥ ب أ يقطعه فى ء

، فى Δ أ ء حـ نجد أن : حـ ء = ب جا (١٨٠° − أ)

، أ ء = ب جتا (١٨٠° − أ)   ∴ ب ء = حـ + ب جتا (١٨٠° − أ)

، فى Δ حـ ء ب القائم الزاوية فى ء : ∵ (ب حـ)^{2} = (حـ ء)^{2} + (ء ب)^{2}

أى أن أ^{2} = (ب جا (١٨٠° − أ))^{2} + (حـ + ب جتا (١٨٠° − أ))^{2}

= (ب جا أ)^{2} + (حـ − ب جتا أ)^{2} = ب^{2} جا^{2} أ + حـ^{2} − ٢ ب حـ جتا أ + ب^{2} جتا^{2} أ

= ب^{2} (جا^{2} أ + جتا^{2} أ) + حـ^{2} − ٢ ب حـ جتا أ

∴ أ^{2} = ب^{2} + حـ^{2} − ٢ ب حـ جتا أ   ومنها جتا أ = (ب^{2} + حـ^{2} − أ^{2}) ÷ (٢ ب حـ)   (وهو المطلوب)

لاحظ أن : قانون جيب التمام صحيح أيضًا فى حالة المثلث القائم الزاوية [وذلك بوضع جتا أ = جتا ٩٠° = صفر]

ملاحظـــات

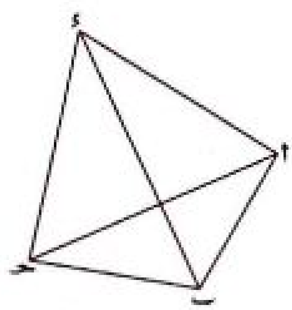
* لإيجاد قياس إحدى زوايا مثلث يفضل استخدام قانون جيب التمام لأنه يحدد نوع الزاوية إذا كانت حادة أو منفرجة.

* إذا كان أ : ب : حـ = ٢ : ٣ : ٤

نفرض أن : أ = ٢ ك ، ب = ٣ ك ، حـ = ٤ ك حيث ك ∈ ح*

ثم نعوض فى قانون جيب التمام لإيجاد

قياسات زوايا Δ أ ب حـ



* لإثبات أن الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى :

– نثبت أن زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان :

ق (∠ أ) + ق (∠ حـ) = ١٨٠°   **أى أن** جتا أ + جتا حـ = صفر

أ، ق (∠ ب) + ق (∠ ء) = ١٨٠°   **أى أن** جتا ب + جتا ء = صفر

– نثبت أن قياسى زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة فيه وفى جهة واحدة منها متساويان :

كأن نثبت أن : ق (∠ ب أ حـ) = ق (∠ ب ء حـ)   **أى أن** جتا (∠ ب أ حـ) = جتا (∠ ب ء حـ)

مثال ١

في Δ أ ب حـ أوجد قيمة أ إذا كان : ب = ٣٠ سم ، حـ = ١٤ سم ، ق(∠ أ) = ٦٠°

الحل

∵ $أ^2 = ب^2 + حـ^2 - ٢ ب حـ$ جتا أ

∴ $أ^2 = (٣٠)^2 + (١٤)^2 - ٢ \times ٣٠ \times ١٤ \times$ جتا ٦٠° = ٦٧٦ ∴ أ = $\sqrt{٦٧٦}$ = ٢٦ سم

مثال ٢

س ص ع مثلث فيه : س = ٤ سم ، ص = ٥ سم ، ع = ٦ سم

احسب قياس أكبر زواياه ، وكذلك احسب مساحته.

الحل

أكبر الزوايا قياسًا تقابل أكبر الأضلاع طولاً.

∴ جتا ع = $\frac{س^2 + ص^2 - ع^2}{٢ س ص} = \frac{٤^2 + ٥^2 - ٦^2}{٢ \times ٤ \times ٥}$ = ٠,١٢٥ ∴ ق(∠ ع) ≈ ٨٢° ٤٩َ ٩ً

، مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ س ص جا ع = $\frac{١}{٢} \times ٤ \times ٥ \times$ جا ٨٢° ٤٩َ ٩ً ≈ ٩,٩ سم^2

مثال ٣

أ ب حـ مثلث فيه : $\frac{١}{٢}$ جا أ = $\frac{١}{٣}$ جا ب = $\frac{١}{٤}$ جا حـ احسب : ق(∠ حـ)

الحل

∵ $\frac{جا أ}{٢} = \frac{جا ب}{٣} = \frac{جا حـ}{٤}$ ∴ $\frac{٢}{جا أ} = \frac{٣}{جا ب} = \frac{٤}{جا حـ}$

∴ أ : ب : حـ = ٢ : ٣ : ٤ وبفرض أن : أ = ٢ ك ، ب = ٣ ك ، حـ = ٤ ك

∴ جتا حـ = $\frac{أ^2 + ب^2 - حـ^2}{٢ أ ب} = \frac{٤ ك^2 + ٩ ك^2 - ١٦ ك^2}{٢ \times ٢ ك \times ٣ ك} = \frac{-٣ ك^2}{١٢ ك^2} = -\frac{١}{٤}$

∴ ق(∠ حـ) = ١٠٤° ٢٨َ ٣٩ً

مثال ٤

أ ب حـ مثلث فيه : أ = ١٣ سم ، ب = ١٤ سم ، حـ = ١٥ سم أوجد طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه.

الحل

∵ جتا أ = $\frac{ب^2 + حـ^2 - أ^2}{٢ ب حـ} = \frac{١٩٦ + ٢٢٥ - ١٦٩}{٢ \times ١٤ \times ١٥} = \frac{٣}{٥}$ ∴ جا أ = $\frac{٤}{٥}$

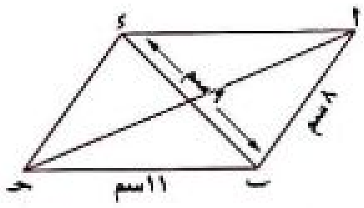
، ∵ $\frac{أ}{جا أ}$ = ٢ نق ∴ $\frac{١٣}{\frac{٤}{٥}}$ = ٢ نق ∴ نق = $\frac{١٣}{٢ \times \frac{٤}{٥}} = ٨ \frac{١}{٨}$ سم

مثال ٥

أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ١١ سم ، ب ء = ٩ سم

أوجد طول قطره $\overline{أحـ}$

الحل



فى Δ أ ب ء : $جتا أ = \frac{(٨)^٢ + (١١)^٢ - (٩)^٢}{٢ \times ٨ \times ١١} = \frac{١٣}{٢٢}$

، ∵ ∠ ب تكمل ∠ أ (زاويتان متتاليتان فى ▱ أ ب حـ ء)

∴ $جتا ب = - جتا أ = \frac{-١٣}{٢٢}$

∴ فى Δ أ ب حـ : $(أحـ)^٢ = (٨)^٢ + (١١)^٢ - ٢ \times ٨ \times ١١ \times \frac{-١٣}{٢٢} = ٢٨٩$

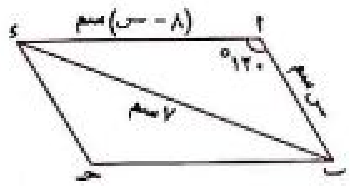
∴ أحـ = ١٧ سم

مثال ٦

أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : ق (∠ أ) = ١٢٠° ، ومحيطه = ١٦ سم

وطول القطر الأكبر فيه = ٧ سم أوجد مساحة متوازى الأضلاع علمًا بأن أ ب < ب حـ

الحل



نصف محيط متوازى الأضلاع = $\frac{١٦}{٢}$ = ٨ سم

فبفرض أن أ ب = س سم ∴ أ ء = (٨ - س) سم

∴ فى Δ أ ب ء :

∵ $(ب ء)^٢ = (أب)^٢ + (أء)^٢ - ٢ (أب) (أء) جتا ١٢٠°$

∴ $٤٩ = س^٢ + (٨ - س)^٢ - ٢ س (٨ - س) \times (-\frac{١}{٢})$

∴ $٤٩ = س^٢ + ٦٤ - ١٦ س + س^٢ + ٨ س - س^٢$

∴ $س^٢ - ٨ س + ١٥ = ٠$ ∴ $(س - ٣) (س - ٥) = ٠$ ∴ س = ٣ أ، س = ٥

، ∵ أ ب < ب حـ ∴ أ ب = ٣ سم ، أ ء = ٥ سم

∴ م (▱ أ ب حـ ء) = ٢ م (Δ أ ب ء) = $٢ \times \frac{١}{٢} \times ٣ \times ٥ \times جا ١٢٠° = \frac{١٥\sqrt{٣}}{٢}$ سم^٢

مثال ١

في Δ أ ب ح أوجد قيمة أ إذا كان : ب = ٣٠ سم ، ح = ١٤ سم ، ق(∠أ ...

الحل

∵ $\text{أ}^٢ = \text{ب}^٢ + \text{ح}^٢ - ٢\,\text{ب}\,\text{ح}\,\text{حتا أ}$

∴ $\text{أ}^٢ = (٣٠)^٢ + (١٤)^٢ - ٢ \times ٣٠ \times ١٤ \times \text{حتا } ٦٠° = ٦٧٦$ ∴ $\text{أ} = \sqrt{٦٧٦} = ٢٦$ سم

مثال ٢

س ص ع مثلث فيه : س = ٤ سم ، ص = ٥ سم ، ع = ٦ سم

احسب قياس أكبر زواياه ، وكذلك احسب مساحته.

الحل

أكبر الزوايا قياسًا تقابل أكبر الأضلاع طولاً.

∴ $\text{حتا ع} = \frac{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ - \text{ع}^٢}{٢\,\text{س}\,\text{ص}} = \frac{٤^٢ + ٥^٢ - ٦^٢}{٢ \times ٤ \times ٥} = ٠,١٢٥$ ∴ ق(∠ع) ≈ ٨٢° ٤٩َ ٩ً

، مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ س ص حا ع = $\frac{١}{٢} \times ٤ \times ٥ \times$ حا ٨٢° ٤٩َ ٩ً ≈ ٩,٩ سم²

مثال ٣

أ ب ح مثلث فيه : $\frac{١}{٢}$ حا أ = $\frac{١}{٣}$ حا ب = $\frac{١}{٤}$ حا ح   احسب : ق(∠ح)

الحل

∵ $\frac{\text{حا أ}}{٢} = \frac{\text{حا ب}}{٣} = \frac{\text{حا ح}}{٤}$ ∴ $\frac{٢}{\text{حا أ}} = \frac{٣}{\text{حا ب}} = \frac{٤}{\text{حا ح}}$

∴ أ : ب : ح = ٢ : ٣ : ٤ وبفرض أن : أ = ٢ ك ، ب = ٣ ك ، ح = ٤ ك

∴ $\text{حتا ح} = \frac{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢ - \text{ح}^٢}{٢\,\text{أ}\,\text{ب}} = \frac{٤\,\text{ك}^٢ + ٩\,\text{ك}^٢ - ١٦\,\text{ك}^٢}{٢ \times ٢\,\text{ك} \times ٣\,\text{ك}} = \frac{-٣\,\text{ك}^٢}{١٢\,\text{ك}^٢} = -\frac{١}{٤}$

∴ ق(∠ح) = ١٠٤° ٢٨َ ٣٩ً

مثال ٤

أ ب ح مثلث فيه : أ = ١٣ سم ، ب = ١٤ سم ، ح = ١٥ سم أوجد طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه.

الحل

∵ $\text{حتا أ} = \frac{\text{ب}^٢ + \text{ح}^٢ - \text{أ}^٢}{٢\,\text{ب}\,\text{ح}} = \frac{١٩٦ + ٢٢٥ - ١٦٩}{٢ \times ١٤ \times ١٥} = \frac{٣}{٥}$ ∴ $\text{حا أ} = \frac{٤}{٥}$

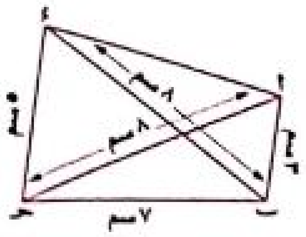
، ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{حا أ}} = ٢\,\text{نق}$ ∴ $\frac{١٣}{\frac{٤}{٥}} = ٢\,\text{نق}$ ∴ $\text{نق} = \frac{١٣}{٢ \times \frac{٤}{٥}} = ٨\frac{١}{٨}$ سم

مثال ⑦

أ ب حـ ء شكل رباعي فيه : أ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٧ سم ، حـ ء = ٥ سم ، أ حـ = ب ء = ٨ سم

أثبت أن : الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري.

الحل



في Δ ب أ حـ : جتا (ب أ حـ) $= \frac{(٣)^٢ + (٨)^٢ - (٧)^٢}{٢ \times ٣ \times ٨} = \frac{١}{٢}$

، في Δ ب ء حـ : جتا (ب ء حـ) $= \frac{(٥)^٢ + (٨)^٢ - (٧)^٢}{٢ \times ٥ \times ٨} = \frac{١}{٢}$

$\therefore$ جتا (ب أ حـ) = جتا (ب ء حـ)

$\therefore$ ق (ب أ حـ) = ق (ب ء حـ) (وهما مرسومتان على $\overline{\text{ب حـ}}$ وفي جهة واحدة منها)

$\therefore$ الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري.

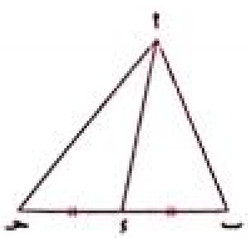
مثال ⑧

أ ب حـ مثلث فيه : ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$

أثبت أن : (أ ب)^٢ + (أ حـ)^٢ = ٢ (أ ء)^٢ + ٢ (ب ء)^٢

وإذا كان : أ ب = ٣ سم ، أ حـ = ٤ سم ، أ ء = $\sqrt{٣,٥}$ سم فأوجد : طول $\overline{\text{ب حـ}}$

الحل



Δ أ ب ء فيه : (أ ب)^٢ = (أ ء)^٢ + (ب ء)^٢ − ٢ (أ ء) (ب ء) جتا (أ ء ب) (١)

، Δ أ حـ ء فيه : (أ حـ)^٢ = (أ ء)^٢ + (حـ ء)^٢ − ٢ (أ ء) (حـ ء) جتا (أ ء حـ)

، $\because$ جتا (أ ء ب) = − جتا (أ ء حـ) ، حـ ء = ب ء

$\therefore$ (أ حـ)^٢ = (أ ء)^٢ + (ب ء)^٢ + ٢ (أ ء) (ب ء) جتا (أ ء ب) (٢)

بجمع (١) ، (٢) : $\therefore$ (أ ب)^٢ + (أ حـ)^٢ = ٢ (أ ء)^٢ + ٢ (ب ء)^٢ (المطلوب أولاً)

$\therefore$ (٣)^٢ + (٤)^٢ = ٢ $\left(\sqrt{٣,٥}\right)^٢$ + ٢ (ب ء)^٢

$\therefore$ ٢٥ = ٧ + ٢ (ب ء)^٢ $\therefore$ (ب ء)^٢ = ٩

$\therefore$ ب ء = ٣ سم $\therefore$ ب حـ = ٦ سم (المطلوب ثانيًا)

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① في Δ س ص ع المقدار $\frac{س^2 + ص^2 - ع^2}{2 س ص}$ = ...

(أ) جتا س (ب) جتا ص (جـ) جتا ع (د) جا ع

② في المثلث س ص ع يكون : $ص^2 + ع^2 - س^2 = 2$ ص ع × ....

(أ) جتا س (ب) جا ع (جـ) جتا ع (د) جا س

③ في Δ أ ب جـ : جتا (أ + ب) = ...

(أ) جتا جـ (ب) - جتا جـ (جـ) جا جـ (د) - جا جـ

④ إذا كان : أ ب جـ ء شكل رباعي دائري فإن : جتا أ + جتا جـ = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) -١

⑤ في المثلث س ص ع : ٢ س ص جتا (س + ص) = ...

(أ) $س^2 + ص^2 - ع^2$ (ب) $ص^2 + ع^2 - س^2$

(جـ) $س^2 - ع^2 - ص^2$ (د) $ع^2 - س^2 - ص^2$

⑥ المثلث ل م ن فيه : ل = ٥ سم ، م = ٧ سم ، ق (∠ ن) = ٦٠°

فإن : ن = ... سم (لأقرب جزء من عشرة).

(أ) ٦٫٢ (ب) ٥ (جـ) ٤٫٣ (د) ٣٫٥

⑦ Δ س ص ع فيه : س = ٥ سم ، ص = ٣ سم ، ق (∠ ع) = $\frac{2}{3}\pi$ فإن : ع = ...

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ٤

⑧ في Δ أ ب جـ : إذا كان ق (∠ أ) + ق (∠ ب) = ١٢٠° ، أ = ٢ سم ، ب = ٣ سم

فإن : جـ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) $\sqrt{7}$ (د) $\sqrt{5}$

⑨ Δ أ ب جـ فيه : أ = ٩ سم ، ب = ١٥ سم ، ق (∠ جـ) = ١٠٦° فإن محيطه = ... سم

(أ) ٤٤ (ب) ٢٤ (جـ) ٣٤ (د) ٢٨

(١٠) أ ب حـ مثلث فيه : ب = ٢ سم ، حـ = ٢,٥ سم ، حا أ = $\frac{٢}{٥}$

فإن : Δ أ ب حـ يكون ....

(أ) قائم الزاوية. (ب) متساوى الساقين. (جـ) متساوى الأضلاع. (د) مختلف الأضلاع.

(١١) في المثلث س ص ع إذا كان : س = ص فإن : حتا س = ...

(أ) $\frac{٢ ص^٢}{ع}$ (ب) $\frac{ع}{٢ ص}$ (جـ) $\frac{ع}{٤ س}$ (د) $\frac{ص}{٢ س}$

(١٢) في Δ أ ب حـ يكون حتا (أ + ب) = ...

(أ) $\frac{أ^٢ + ب^٢ - حـ^٢}{٢ أ ب}$ (ب) $\frac{أ^٢ + حـ^٢ - ب^٢}{٢ أ ب}$

(جـ) $\frac{ب^٢ + حـ^٢ - أ^٢}{٢ ب حـ}$ (د) $\frac{حـ^٢ - أ^٢ - ب^٢}{٢ أ ب}$

(١٣) قياس أكبر زاوية في المثلث الذي أطوال أضلاعه ٣ سم ، ٥ سم ، ٧ سم تساوى ....°

(أ) ١١٠ (ب) ١٥٠ (جـ) ١٠٠ (د) ١٢٠

(١٤) أ ب حـ مثلث فيه : ب = ٤ سم ، أ + حـ = ١١ سم ، أ - حـ = ١ سم فإن : ....

(أ) المثلث منفرج الزاوية. (ب) المثلث قائم الزاوية.

(جـ) ق (∠ ب) = ٢ ق (∠ أ) (د) ق (∠ أ) = ٢ ق (∠ ب)

(١٥) في Δ أ ب حـ يكون : حـ (أ حتا ب + ب حتا أ) = ...

(أ) ٢ $حـ^٢$ (ب) $حـ^٢$ (جـ) $أ^٢$ (د) $ب^٢$

(١٦) في Δ أ ب حـ ، إذا كان : $\frac{حا أ}{حا ب}$ = ٢ حتا حـ ، فإن : ....

(أ) ب = حـ (ب) أ = حـ (جـ) أ = ب (د) أ = ب = حـ

(١٧) أ ب حـ مثلث فيه : $أ^٢ + ب^٢ - حـ^٢ + \sqrt{٣}$ أ ب = ٠ فإن : ق (∠ حـ) = ...°

(أ) ٣٠ (ب) ١٥٠ (جـ) ٦٠ (د) ١٢٠

(١٨) في Δ أ ب حـ ، إذا كان ق (∠ حـ) = ٦٠° ، $أ^٢ + ب^٢ - حـ^٢$ = ك أ ب فإن : ك = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) -١

(١٩) إذا كان أ ب حـ مثلث فيه : $حـ^٢ = (أ + ب)^٢$ - أ ب فإن : ق (∠ حـ) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ١٢٠°

(٢٠) في Δ أ ب حـ إذا كان : ٤ حا أ = ٣ حا ب = ٦ حا حـ فإن : ق (∠ حـ) ≃ .... (لأقرب درجة)

(أ) ٨٩° (ب) ٢٩° (جـ) ٥٧° (د) ٨٢°

(٢١) في Δ ا ب ح : $\frac{١}{٢}$ جا ا = $\frac{١}{٣}$ جا ب = $\frac{١}{٤}$ جا ح فإن : جتا ح = ...

(أ) $\frac{-٢}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{-١}{٤}$ (د) $\frac{١}{٤}$

(٢٢) إذا كان : ا ب ح مثلث فيه : ٥ جا ا جا ب = ٦ جا ب جا ح = ٩ جا ح جا ا

فإن : ق(∠ح) ≈ ....

(أ) ٢٨° (ب) ٣٢° (جـ) ٣٦° (د) ٤٢°

(٢٣) إذا كان : ا ب ح مثلث فيه : ٦ أَ = ٤ بَ = ٣ حَ فإن قياس أصغر زوايا المثلث ≈ ....

(أ) ٢٨َ ٥٧° (ب) ١٢َ ٤١° (جـ) ٥٧َ ٢٨° (د) ٥٢َ ٣٦°

(٢٤) ا ب ح مثلث فيه : ق(∠ا) = ٦٠° ، بَ : حَ = ٥ : ٨ وكانت مساحة الدائرة المارة برؤوس المثلث تساوي ١٤٧ π سم² فإن : محيط Δ ا ب ح = ... سم

(أ) ٢١ (ب) ٣٤ (جـ) ٥٤ (د) ٦٠

(٢٥) إذا كان ا ب ح مثلث حاد الزوايا فيه : أَ = ٨ سم ، بَ = ٥ سم ، ق(∠ح) = ٦٠°

فإن : ق(∠ا) ≈ ....

(أ) ١٢ً ٤٢َ ٨٣° (ب) ١٢ً ٤٧َ ٨١° (جـ) ١١َ ٣٨° (د) ١٠ً ٢٣َ ٦٠°

(٢٦) ا ب ح ء متوازي أضلاع فيه : ا ب = ٨ سم ، ب ح = ١١ سم ، ب ء = ٩ سم

فإن : طول $\overline{\text{ا ح}}$ = ... سم

(أ) ٩ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ١٧

(٢٧) ا ب ح ء شكل رباعي فيه : ا ب = ٢٢ سم ، ب ح = ٢٥ سم ، ء ح = ١٨ سم

، ق(∠ا ء ب) = ٦٥° ، ق(∠ء ب ا) = ٥٠° فإن : ق(∠ح ب ء) ≈ ....

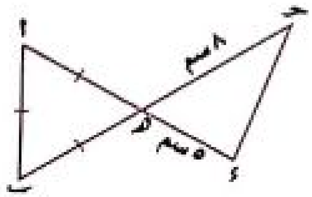
(أ) ٧٥َ ٨٠° (ب) ١٩ً ٤٩َ ٤٢° (جـ) ٩ً ٢٨َ ٤٤° (د) ٣٠َ ٨٥°

(٢٨) ا ب ح مثلث فيه : أَ = $\sqrt{٢}$ سم ، بَ = $\sqrt{٣}$ سم ، حَ = ٢ سم

فإن : $\frac{\text{جتا ا جتا ب}}{\text{جتا (ا + ب)}}$ = ...

(أ) $\frac{٨}{١٥}$ (ب) $\frac{-١٥}{٨}$ (جـ) $\frac{-١٧}{١٥}$ (د) $\frac{٨}{١٧}$

(٢٩) في الشكل المقابل :

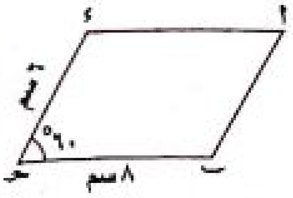


ح ء = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٧

(جـ) ٨ (د) ٩

(٣٠) فى الشكل المقابل أ ب حـ ء متوازى أضلاع

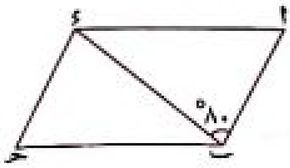


فإن أ حـ = ... سم

(أ) $٢\sqrt{١٣}$ (ب) $٢\sqrt{٣٧}$

(جـ) $٢\sqrt{١٧}$ (د) ١٤٨

(٣١) فى الشكل المقابل :



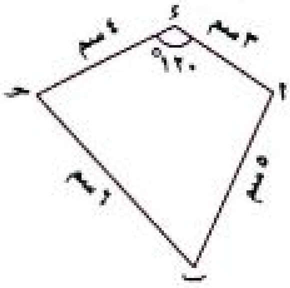
أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : ق (∠ أ ب ء) = ٨٠°

، ب ء = ٧ سم ، أ ب = ٥ سم

فإن محيط متوازى الأضلاع = ... لأقرب سم

(أ) ٢٥ (ب) ٢٦ (جـ) ٢٩ (د) ٣٠

(٣٢) فى الشكل المقابل :

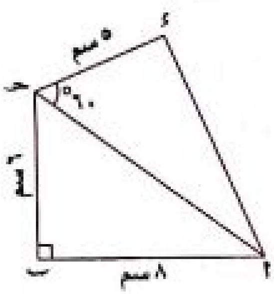


حتا ب = ...

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$

(جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

(٣٣) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء شكل رباعى فيه :

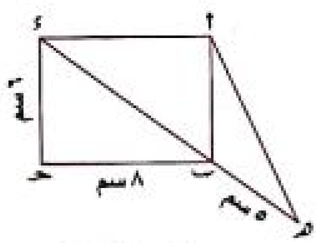
أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ٦ سم ، ق (∠ ب) = ٩٠°

، ء حـ = ٥ سم ، ق (∠ أ حـ ء) = ٦٠°

فإن مساحة الدائرة المارة برؤوس Δ أ ء حـ = ... سم^٢

(أ) ٩ π (ب) ١٦ π (جـ) ٢٥ π (د) ٤٩ π

(٣٤) فى الشكل المقابل :



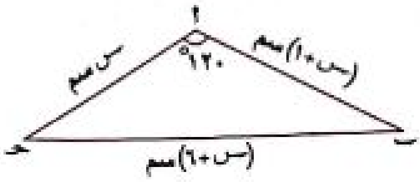
أ ب حـ ء مستطيل فيه : ء حـ = ٦ سم

، ب حـ = ٨ سم ، هـ ∈ $\overleftarrow{ءب}$ حيث : ب هـ = ٥ سم

فإن : أ هـ = ... سم

(أ) $\sqrt{٩٣}$ (ب) $\sqrt{٩٧}$ (جـ) ١٠ (د) $\sqrt{١٠٣}$

(٣٥) فى الشكل المقابل :



قيمة س = ... سم

(أ) ٧ (ب) ٨

(جـ) ٩ (د) ١٠

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ س ص ع مثلث فيه : ق(∠ ع) = ٩٥° ، س = ١٣ سم ، ص = ١٦ سم **أوجد : ع** «٢١,٥ سم»

٢ أ ب ح مثلث فيه : أ = ٣ سم ، ح = ٥ سم ، ق(∠ ب) = ٢١ ٣٦° **أوجد : ب لأقرب سم** «٣ سم»

٣ أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب ح الذى فيه : أ = ٧,٦ سم ، ب = ٥,٨ سم ، ح = ٣,٤ سم «١٠٨ ٤٤° ، ٤٦ ٢٠° ، ٢٥ ٩°»

٤ أ ب ح مثلث فيه : أ = ١٣ سم ، ب = ١٤ سم ، ح = ١٥ سم

أوجد : ق(∠ ب) ثم أوجد مساحة سطح المثلث أ ب ح لأقرب سم^2 «٥٩ ٢٩° ، ٨٤ سم^2»

٥ أوجد قياس أصغر زاوية فى Δ س ص ع إذا كان :

س = ١٨ سم ، ص = ٢٧ سم ، ع = ٢٤ سم

ثم أوجد مساحة الدائرة المارة بروؤس المثلث س ص ع «٤٠ ٤٨° ، ٥٩٦ سم^2»

٦ أ ب ح مثلث فيه : ق(∠ ح) = ٩٦ ٢٣° ، أ = ٧ سم ، ب = ٩ سم **أوجد :**

(١) ح (٢) مساحة سطح المثلث أ ب ح لأقرب سم^2

(٣) طول نصف قطر الدائرة المارة بروؤس المثلث أ ب ح لأقرب سنتيمتر. «١٢ سم ، ٣١ سم^2 ، ٦ سم»

٧ أ ب ح مثلث محيطه ٥٢ سم ، أ = ١٣ سم ، ب = ١٧ سم أوجد قياس أكبر زاوية فى المثلث

ثم احسب مساحة سطحه لأقرب سنتيمتر مربع. «٩٣ ٢٢° ، ١١٠ سم^2»

٨ أوجد قياس أكبر زاوية فى Δ س ص ع الذى فيه : س = ٢٤,٥ سم ، ص = ١٨ سم ، ع = ١٠ سم

ثم أوجد محيط الدائرة المارة بروؤسه $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$ «١١٩ ٩° ، ٨٨ سم»

٩ Δ س ص ع فيه س : ص : ع = ٤ : ٥ : ٦ بين أن قياس أصغر زواياه هو ٢٥ ٤١° تقريبًا.

١٠ س ص ع مثلث فيه : جا س : جا ص : جا ع = ٧ : ٨ : ١٢

أوجد قياس أكبر زواياه. «١٠٦ ٤°»

١١ أ ب ح مثلث فيه : أ = ٤ سم ، ب = ٥ سم ، جتا ح = $\frac{1}{2}$

أوجد ح ثم أوجد مساحة Δ أ ب ح «٧,٨ سم ، ٥ $\sqrt{3}$ سم^2»

١٢ أ ب ح مثلث فيه : أ = ١٦ سم ، ح = ١٨ سم ، ظا ب = $\frac{3}{4}$

أوجد مساحة المثلث ثم احسب محيطه. «٨٦,٤ سم^2 ، ٤٥ سم»

١٣ أ ب حـ مثلث فيه : ٢ حا أ = ٣ حا ب = ٤ حا حـ أوجد قياس أصغر زواياه. «٢٦° ٢٣َ»

١٤ أ ب حـ مثلث فيه : $\frac{1}{3}$ حا أ = $\frac{1}{4}$ حا ب = $\frac{1}{5}$ حا حـ
أوجد : ق (∠ حـ) وإذا كان محيط المثلث = ٢٤ سم أوجد مساحته. «٩٠° ، ٢٤ سم^2»

١٥ أ ب حـ مثلث فيه : ء منتصف $\overline{ب حـ}$ فإذا كان : ق (∠ ب) = ٧٥° ، ق (∠ أ) = ٦٠° ، أ = ٨ سم
فأوجد طول كل من : $\overline{أ حـ}$ ، أ ء «٨,٩٢ سم ، ٦,٧ سم»

١٦ أ ب حـ مثلث فيه : أ = ٨ سم ، ب = ٧ سم ، حـ = ٩ سم ، فرضت نقطة ء على $\overline{ب حـ}$ بحيث
ب ء = ٤ سم احسب طول أ ء ثم أوجد طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب حـ «٧ سم ، ٤,٧ سم»

١٧ أ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه : أ حـ = ١٦ سم ، ب ء = ٢٠ سم ، ق (∠ أ م ب) = ٥٠°
حيث م ملتقى القطرين أوجد : أ ب ، أ ء لأقرب سم «٨ سم ، ١٦ سم»

١٨ أ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه : أ ب = ٩ سم ، ب حـ = ١٣ سم ، أ حـ = ٢٠ سم
أوجد طول $\overline{ب ء}$ «١٠ سم»

١٩ أ ب حـ ء متوازي أضلاع محيطه ٢٠ سم فإذا كانت النسبة بين طولي ضلعين متجاورين ٢ : ٣ فإذا كان :
ب ء = ٨ سم فأوجد طول $\overline{أ حـ}$ «٦,٣ سم»

٢٠ أ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه : ق (∠ أ) = ٦٠° ، محيطه = ٤٤ سم ، طول القطر الأصغر يساوي
١٤ سم ، أ ب < أ ء أوجد : ق (∠ أ ء ب) ثم احسب مساحة متوازي الأضلاع أ ب حـ ء لأقرب سم^2
«٢١° ٤٧َ ، ٨٣ سم^2»

٢١ أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : $\overline{أ ء}$ // $\overline{ب حـ}$ ، أ ء = ٤٢ سم ، أ ب = ٣٠ سم
، ب حـ = ٤٨ سم ، ق (∠ أ) = ١٠٠°
أوجد طول كل من : $\overline{ب ء}$ ، $\overline{حـ ء}$ «٥٥,٧ سم ، ٣٠ سم»

٢٢ أ ب حـ ء شكل رباعي فيه : أ ب = أ ء = ٩ سم ، ب حـ = ٥ سم ، حـ ء = ٨ سم ، أ حـ = ١١ سم
أثبت أن : الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري.

٢٣ أ ب حـ ء شكل رباعي دائري فيه :
أ ب = أ ء = ٩ سم ، ب حـ = ٥ سم ، حـ ء = ٨ سم أوجد : أ حـ «١١ سم»

٢٤ أ ب حـ ء شكل رباعي فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ١٤ سم ، حـ ء = ١٠ سم
، أ حـ = ب ء = ١٦ سم أثبت أن : الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري.

٢٥ 📖 أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = ٢٧ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، حـ ء = ٨ سم
، ء أ = ١٢ سم ، أ حـ = ١٨ سم أثبت أن : أ حـ ينصف ∠ ب أ ء
ثم أوجد مساحة الشكل : أ ب حـ ء «١٢٤ سم٢»

٢٦ 📖 أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : ق (∠ ء أ ب) = ق (∠ ء ب حـ) = ٩٠° ، ب ء = ١٠ سم ، أ ء = ٨ سم
، ق (∠ ء حـ ب) = ٣٠° أوجد : أ حـ لأقرب سم «٢٢ سم»

٢٧ أ ب حـ مثلث فيه : أ = ٣ ب ، ق (∠ حـ) = ٦٠°
أوجد : ق (∠ ب) ، ق (∠ أ) «١٩ َ٦ °١٩ ، ٥٤ َ١٠٠°»

٢٨ أ ب حـ مثلث فيه : أ = ٥ سم ، ق (∠ ب) = ١٢٠° ، مساحته = ١٠ √٣ سم٢
أوجد كلاً من : حـ ، ب وكذلك ق (∠ أ) «٨ سم ، ١١,٣٦ سم ، ٢٥ َ٢٢°»

٢٩ أ ب حـ مثلث مساحته ٦٤ سم٢ ، ق (∠ أ) = ٣٠° ، ب : حـ = ٣ : ٤
أوجد محيط Δ أ ب حـ «٤١,٨٠ سم»

٣٠ أ ب حـ مثلث فيه : أ = ٦ سم ، ب = ١٠ سم ، مساحة المثلث تساوى ٢٠ سم٢
فإذا كانت ∠ أ حـ ب منفرجة فأوجد كلاً من : ق (∠ حـ) ، طول أ ب «١١ َ١٣٨° ، ١٥سم»

٣١ إذا كان : جا أ = $\frac{٢}{٣}$ جا ب = $\frac{١}{٢}$ جا حـ ، حـ − أ = ٤ سم
أوجد كلًا من : ب ، ق (∠ أ) «٦ سم ، ١٨ َ٥٧ َ٢٨°»

٣٢ إذا كان جا أ : جا ب : جا حـ = ٣ : ٥ : ٧ أثبت أن : حتا أ : حتا ب : حتا حـ = ١٣ : ١١ : −٧

٣٣ 📖 أ ب حـ مثلث محيطه ٧٠ سم ، أ = ٢٦ سم ، ق (∠ أ) = ٦٠°
أوجد : مساحة سطحه. «١٠٥ √٣ سم٢»

٣٤ أ ب حـ مثلث محيطه ٣٤ سم ، أ = ١٢ سم ، ب − حـ = ٦ سم
أوجد قياس أصغر زواياه ثم احسب مساحته. «٩ َ٤٦ َ٣٤° ، ٤٧,٩ سم٢»

٣٥ مثلث أطوال أضلاعه هى ١٤ ، ١٠ ، س من السنتيمترات فإذا كان قياس أكبر زواياه هو ١٢٠°
أوجد س علمًا بأن (س < ١٠) «٦ سم»

٣٦ Δ أ ب حـ فيه : ق (∠ حـ) = ١٢٠° ، أ = ب − ٢ ، حـ = ب + ٢
أوجد كلًا من : أ ، ب ، حـ «٣ ، ٥ ، ٧»

٣٧ فى المثلث أ ب حـ إذا كان (أ + ب + حـ) (أ + ب − حـ) = ٣ أ ب أثبت أن : ق (∠ حـ) = ٦٠°

٣٨ فى المثلث أ ب حـ إذا كان : (أ + ب + حـ) (أ + ب − حـ) = ك أ ب

فاثبت أن : ك ∈] ٠ ، ٤ [ثم أوجد : ق (∠ حـ) عندما ك = ١ «١٢٠°»

٣٩ أ ب حـ ء متوازى أضلاع أثبت أن : $(أحـ)^٢ + (ب ء)^٢ = ٢ (أب)^٢ + ٢ (ب حـ)^٢$

٤٠ أ ب حـ مثلث فيه : ء منتصف $\overline{ب حـ}$ أثبت أن : $(أب)^٢ + (أحـ)^٢ = ٢ (أء)^٢ + ٢ (ب ء)^٢$

وإذا كان : أ ب = ٥ سم ، أ حـ = ٨ سم ، ب حـ = ١٢ سم أوجد : أ ء «$\frac{\sqrt{٣٤}}{٢}$ سم»

٤١ أثبت أن : ظتا ب + ظتا حـ = $\frac{أ^٢}{٢ \Delta}$ حيث Δ يعبر عن مساحة Δ أ ب حـ

٤٢ أ ب حـ مثلث فيه : $ب^٢ = (حـ - أ)^٢ + حـ أ$ أوجد : ق (∠ ب) «٦٠°»

٤٣ س ص ع مثلث فيه : $س^٢ = ص^٢ + ع^٢ - ص ع$ ظتا س أوجد : ق (∠ س) «٩٠° أ، ٣٠° أ، ١٥٠°»

٤٤ Δ أ ب حـ فيه : جتا ب = $\frac{حـ}{٢ أ}$ أثبت أن : Δ أ ب حـ متساوى الساقين.

٤٥ أ ب حـ ء هـ خماسى منتظم طول ضلعه ١٨,٢٦ سم ، أوجد طول قطره $\overline{أ حـ}$ «٢٩,٥٥ سم»

٤٦ اكتشف الخطأ : أ ب حـ مثلث فيه :

أ = ٧ سم ، ب = ١٠ سم ، حـ = ٥ سم ، ق (∠ أ) = ٤٠,٥٤°

أوجد : ق (∠ ب)

حل زياد	حل كريم
∵ $\frac{ب}{جا ب} = \frac{أ}{جا أ}$	∵ جتا ب = $\frac{أ^٢ + حـ^٢ - ب^٢}{٢ أ حـ}$
∴ $\frac{١٠}{جا ب} = \frac{٧}{جا ٤٠,٥٤°}$	∴ جتا ب = $\frac{(٧)^٢ + (٥)^٢ - (١٠)^٢}{٢ × ٧ × ٥}$
∴ جا ب = $\frac{١٠ جا ٤٠,٥٤°}{٧}$ ≃ ٠,٩٢٨٥	≃ −٠,٣٧١٤
∴ ق (∠ ب) = ٦٨,٢°	∴ ق (∠ ب) ≃ ١١١,٨°

أى من الحلين هو الصحيح ؟ ولماذا ؟

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

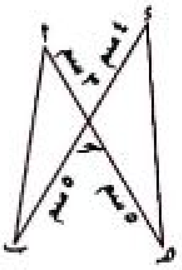
١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : أ (٠ ، ١) ، ب (٣ ، ٤) ، حـ (١ ، ٣) هى رؤوس مثلث

فإن : جتا (∠ أ حـ ب) = ...

(أ) $\frac{٤}{٥}$ (ب) $\frac{-٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{-٣}{٥}$

② في الشكل المقابل :

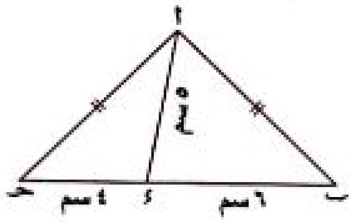


لإيجاد طول $\overline{دهـ}$ يلزم معرفة ....

(أ) طول $\overline{أب}$ (ب) مساحة Δ أ ب جـ

(جـ) محيط Δ أ ب جـ   (د) أي مما سبق.

③ في الشكل المقابل :

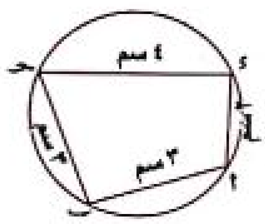


أ ب = ... سم

(أ) ٦   (ب) ٧

(جـ) ٨   (د) ٩

④ في الشكل المقابل :

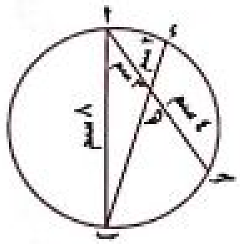


جتا أ = ...

(أ) $-\frac{١}{٦}$ (ب) $-\frac{١}{٣}$

(جـ) $\frac{١}{٢\sqrt{٧}}$ (د) $\frac{١}{٢}$

⑤ في الشكل المقابل :

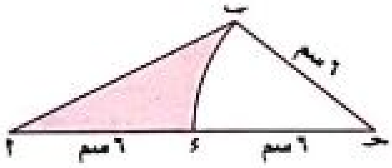


ق (∠ ب أ هـ) = ...

(أ) ٣٤° ٣٩َ   (ب) ٣٩° ٣٤َ

(جـ) ١٨° ٣٤َ   (د) ٣٤° ١٨َ

⑥ في الشكل المقابل :



إذا كان : ق (∠ جـ) = ٠,٤ ء

فإن محيط الجزء المظلل = ... سم

(أ) ١٥,٣   (ب) ١٣,٤   (جـ) ٦,٩   (د) ٢١,٣

⑦ إذا كانت مساحة المثلث أ ب جـ = ١٢ سم²   فإن : $(ب^2 + جـ^2 - أ^2)$ ظا أ = ...

(أ) ١٢   (ب) ٢٤   (جـ) ٤٨   (د) ٩٦

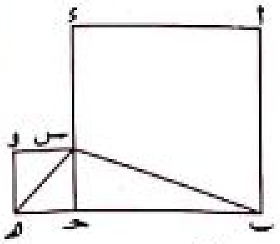
⑧ في Δ أ ب جـ إذا كان : ق (∠ أ) = ٦٠°   فإن : $\left(١ + \frac{أ}{جـ} + \frac{ب}{جـ}\right)\left(١ + \frac{جـ}{ب} - \frac{أ}{ب}\right)$ = ...

(أ) صفر   (ب) ١   (جـ) ٢   (د) ٣

⑨ فى أى مثلث أ ب ح إذا كان : $\frac{أ^{٣} + ب^{٣} + ح^{٣}}{أ + ب + ح} = أ^{٢}$ فإن : ق (∠ أ) = ...

(أ) °٣٠ (ب) °٦٠ (ج) °٤٥ (د) °١٥٠

⑩ فى الشكل المقابل :

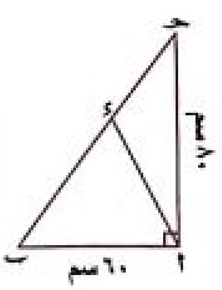


أ ب ح ء ، س ح هـ و مربعان

إذا كان : ب ح = ٣ ح هـ فإن : جا (∠ ب س هـ) = ...

(أ) $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ (ب) $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ (ج) $\frac{-١}{\sqrt{٥}}$ (د) $\frac{-٢}{\sqrt{٥}}$

⑪ فى الشكل المقابل :



أ ب ح مثلث قائم الزاوية فى أ ، أ ب = ٦٠ سم ، أ ح = ٨٠ سم

ورسم $\overline{أء}$ يقسم Δ أ ب ح إلى مثلثين لهما نفس المحيط

فإن : أ ء = ... سم

(أ) $٢٤\sqrt{٥}$ (ب) $٥\sqrt{٢٤}$ (ج) $٣٥ \frac{٢}{٣}$ (د) $٤٥ \frac{١}{٣}$

---

٢ فى Δ أ ب ح إذا كان : $\frac{جتا ب}{أ} = \frac{جتا أ}{ب}$

فأثبت أن : Δ أ ب ح إما قائم الزاوية أو متساوى الساقين.

---

٣ Δ أ ب ح قائم الزاوية فى ب فإذا كان هـ نقطة داخل المثلث بحيث أن

هـ أ = ١٠ سم ، هـ ب = ٦ سم ، ق (∠ أ هـ ب) = ق (∠ ب هـ ح) = ق (∠ ح هـ أ)

أوجد : طول $\overline{هـ ح}$ «٣٣ سم»

---

٤ Δ أ ب ح قائم الزاوية فى ب ، م ، ن تنتميان إلى $\overline{أح}$ بحيث أ م = م ن = ن ح

فإذا كان ب م = ٣ سم ، ب ن = ٤ سم أوجد : محيط Δ أ ب ح لأقرب سنتيمتر. «١٦ سم»

---

٥ فى أى مثلث أ ب ح أثبت أن :

① $\frac{جتا أ}{أ} + \frac{جتا ب}{ب} + \frac{جتا ح}{ح} = \frac{أ^{٢} + ب^{٢} + ح^{٢}}{٢ أ ب ح}$

② $أ^{٢} + ب^{٢} + ح^{٢} = ٢ (ب ح جتا أ + أ ح جتا ب + أ ب جتا ح)$

③ $\frac{طا أ}{طا ح} = \frac{أ^{٢} + ب^{٢} - ح^{٢}}{ب^{٢} + ح^{٢} - أ^{٢}}$

الدرس **3**

حل المثلث



حل المثلث يعنى إيجاد أطوال أضلاعه وقياسات زواياه المجهولة إذا علم ثلاثة من هذه العناصر الستة (أحدها على الأقل طول ضلع). وهناك أربعة حالات لحل المثلث نعرض لها فيما يلى :

الحالة الأولى حل المثلث إذا علم فيه قياسا زاويتين وطول ضلع

فى Δ أ ب حـ إذا علم ق (∠ أ) ، ق (∠ ب) ، أ :

[١] نستخدم العلاقة : ق (∠ حـ) = ١٨٠° − [ق (∠ أ) + ق (∠ ب)] لإيجاد : ق (∠ حـ)

[٢] نستخدم القانون : $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$ لإيجاد : ب ، حـ

مثال ①

حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : ق (∠ أ) = ٣٨° ٥٢َ ، ق (∠ ب) = ٩٦° ٥١َ ، أ = ٢٢,٣ سم

الحل

ق (∠ حـ) = ١٨٠° − (٣٨° ٥٢َ + ٩٦° ٥١َ) = **٤٤° ١٧َ**

∵ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$

∴ $\frac{٢٢,٣}{\text{جا } ٣٨° ٥٢'} = \frac{\text{ب}}{\text{جا } ٩٦° ٥١'} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا } ٤٤° ١٧'}$

∴ ب = $\frac{٢٢,٣ \text{ جا } ٩٦° ٥١'}{\text{جا } ٣٨° ٥٢'}$ ≈ **٣٥,٣ سم** ، حـ = $\frac{٢٢,٣ \text{ جا } ٤٤° ١٧'}{\text{جا } ٣٨° ٥٢'}$ ≈ **٢٤,٨ سم**

الحالة الثانية **حل المثلث إذا علم فيه طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما**

فى Δ أ ب حـ إذا علم أ ، ب ، ق (∠ حـ) :

١ نستخدم القانون : حـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} − ٢ أ ب جتا حـ لإيجاد : حـ

٢ يفضل استخدام القانون : جتا أ = $\dfrac{\text{ب}^{٢} + \text{حـ}^{٢} - \text{أ}^{٢}}{\text{٢ ب حـ}}$ لإيجاد : ق (∠ أ)

وذلك لأن قانون جيب التمام يفرق بين الزاوية الحادة والزاوية المنفرجة (أو يستخدم قانون الجيب لإيجاد قياس الزاوية المقابلة لأصغر الضلعين المعلومين)

٣ نستخدم العلاقة : ق (∠ ب) = ١٨٠° − [ق (∠ أ) + ق (∠ حـ)] لإيجاد : ق (∠ ب)

مثال ٢

حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ = ٨ سم ، ب = ٥ سم ، ق (∠ حـ) = ٢ ٦٠°

الحل

∵ حـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} − ٢ أ ب جتا حـ = ٦٤ + ٢٥ − ٢ × ٨ × ٥ جتا ٢ ٦٠° ≈ ٤٩,٠٤

∴ حـ ≈ **٧ سم**

∴ جتا أ = $\dfrac{\text{ب}^{٢} + \text{حـ}^{٢} - \text{أ}^{٢}}{\text{٢ ب حـ}}$ = $\dfrac{٢٥ + ٤٩ - ٦٤}{٢ \times ٥ \times ٧}$ = $\dfrac{١}{٧}$

∴ ق (∠ أ) ≈ **٨١° ٤٧َ**

∴ ق (∠ ب) = ١٨٠° − (٢َ ٦٠° + ٤٧َ ٨١°) = **١١َ ٣٨°**

حل آخر :

بعد إيجاد حـ يمكن إيجاد ق (∠ ب) باستخدام قانون الجيب لأن ∠ ب تقابل أصغر الضلعين المعلومين بالمعطيات ، ثم نوجد ق (∠ أ)

∵ $\dfrac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}} = \dfrac{\text{ب}}{\text{جا ب}}$ ∴ $\dfrac{٧}{\text{جا ٢ ٦٠°}} = \dfrac{٥}{\text{جا ب}}$

∴ جا ب = $\dfrac{\text{٥ جا ٢ ٦٠°}}{٧}$ ≈ ٠,٦١٨٨ ∴ ق (∠ ب) ≈ ١٤َ ٣٨° أ، ٤٦َ ١٤١°

، ∵ ب ليس طول أكبر أضلاع المثلث ∴ ∠ ب لا يمكن أن تكون منفرجة

∴ ق (∠ ب) = ١٤َ ٣٨°

∴ ق (∠ أ) = ١٨٠° − (٢َ ٦٠° + ١٤َ ٣٨°) = ٤٤َ ٨١°

لاحظ أن : الاختلافات البسيطة فى قياسات الزوايا بين الحلين يرجع إلى استخدام قيم تقريبية بحاسبة الجيب.

الحالة الثالثة: حل المثلث إذا علمت أطوال أضلاعه الثلاثة

فى Δ أ ب حـ إذا علم أ ، ب ، حـ :

١ نستخدم القانون : $جتا أ = \frac{ب^2 + حـ^2 - أ^2}{2 ب حـ}$ لإيجاد : ق (∠ أ)

٢ نستخدم القانون : $جتا ب = \frac{حـ^2 + أ^2 - ب^2}{2 حـ أ}$ لإيجاد : ق (∠ ب)

٣ نستخدم العلاقة : ق (∠ حـ) = ١٨٠° − [ق (∠ أ) + ق (∠ ب)] لإيجاد : ق (∠ حـ)

مثال ٣

حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ = ٥ سم ، ب = ٧ سم ، حـ = ١١ سم

الحل

∵ $جتا أ = \frac{ب^2 + حـ^2 - أ^2}{2 ب حـ} = \frac{٤٩ + ١٢١ - ٢٥}{٢ \times ٧ \times ١١} = \frac{١٤٥}{١٥٤}$ ∴ ق (∠ أ) ≈ ١٩° ٤١َ

، ∵ $جتا ب = \frac{حـ^2 + أ^2 - ب^2}{2 حـ أ} = \frac{١٢١ + ٢٥ - ٤٩}{٢ \times ١١ \times ٥} = \frac{٩٧}{١١٠}$ ∴ ق (∠ ب) ≈ ٢٨° ٨َ

∴ ق (∠ حـ) = ١٨٠° − (١٩° ٤١َ + ٢٨° ٨َ) = ١٣٢° ١١َ

تذكر أن

مجموع طولى أى ضلعين فى مثلث أكبر من طول الضلع الثالث فمثلًا إذا كان : أ = ٢ سم ، ب = ٥ سم ، حـ = ٨ سم فإن هذه الأطوال لا تصلح أن تكون أطوالًا لأضلاع مثلث.

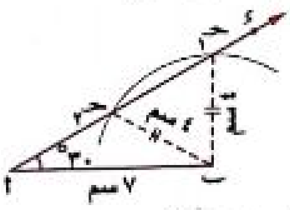
الحالة الرابعة: حل المثلث إذا علم فيه طولا ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما [الحالة المبهمة]

مثال توضيحى

باستخدام الأدوات الهندسية ارسم Δ أ ب حـ الذى فيه :

أ ب = ٧ سم ، ق (∠ أ) = ٣٠° ، ب حـ = ٤ سم ثم تحقق من إجابتك باستخدام قانون الجيب.

الحل



* نرسم قطعة مستقيمة $\overline{أ ب}$ طولها = ٧ سم
* نرسم ∠ أ قياسها ٣٠° مع $\overline{أ ب}$ ولتكن ب أ ء
* نركز بسن الفرجار فى النقطة ب وبفتحة طولها ب حـ = ٤ سم ونرسم قوس يقطع المستقيم $\overleftrightarrow{أ ء}$ فى حـ
* نلاحظ أن النقطة حـ لها موضعين أى أننا يمكننا رسم مثلثين لهم نفس الشروط السابقة هما أ ب حـ١ ، أ ب حـ٢ وبالقياس نجد أن : ق (∠ حـ) ≈ ٦١° فى Δ أ ب حـ١ أ، ق (∠ حـ) ≈ ١١٩° فى Δ أ ب حـ٢

التحقق من الإجابة باستخدام قانون الجيب

$\because \frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$ $\quad \therefore \frac{٤}{\text{جا } ٣٠°} = \frac{٧}{\text{جا حـ}}$

$\therefore \text{جا حـ} = \frac{٧ \text{ جا } ٣٠°}{٤} = \frac{٧}{٨}$ (موجبة) $\quad \therefore$ حـ تقع في الربع الأول (حادة) أ، الثاني (منفرجة)

$\therefore$ ق(∠حـ) ≈ ٦١° أ، ق(∠حـ) ≈ ١١٩°

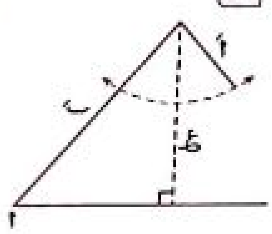
وعمومًا باستخدام الحل الهندسي يمكن التوصل إلى ما يلي :

* في Δ أ ب حـ إذا علم أ ، ب ، ق(∠أ) نوجد ع = ب جا أ

ولإيجاد عدد الحلول الممكنة للمثلث نقارن بين قيم أ ، ب ، ع كما يلي :

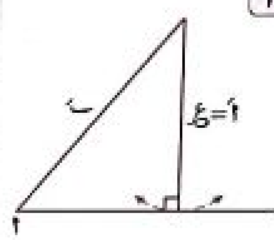
أولًا : إذا كانت ∠أ حادة وكان :

١



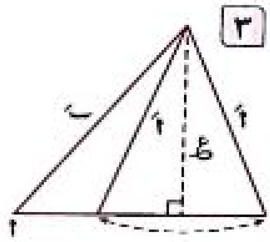
أ < ع فإنه لا يمكن رسم مثلث

٢



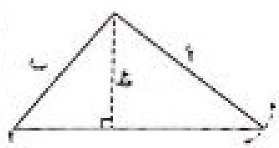
أ = ع فإنه يمكن رسم مثلث وحيد قائم الزاوية

٣



ع < أ < ب فإنه يمكن رسم مثلثين

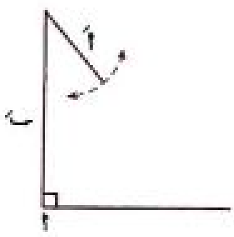
٤



أ ≥ ب فإنه يمكن رسم مثلث وحيد

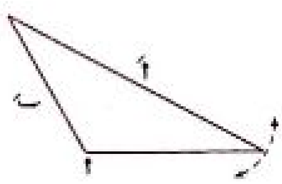
ثانيًا : إذا كانت ∠أ قائمة أو منفرجة وكان :

١



أ ≤ ب فإنه لا يمكن رسم مثلث

٢



أ > ب فإنه يمكن رسم مثلث وحيد

* يمكن حل المثلث في هذه الحالة باستخدام قانون الجيب مباشرة دون تحديد عدد المثلثات الممكنة مع الأخذ في الاعتبار ما يلي :

١. ∠أ تقع في الربع الأول (إذا كانت حادة)، تقع في الربع الثاني (إذا كانت منفرجة).
٢. دالة الجيب مداها [-١ ، ١]
٣. إذا كان في المثلث زاوية منفرجة فإن الزاويتين الأخريين لابد وأن تكونا حادتين.

مثال ٤

بين ما إذا كانت الشروط الآتية تحقق وجود مثلث وحيد أو أكثر من مثلث أو لا تحقق وجود أى مثلث على الإطلاق ثم أوجد الحلول الممكنة :

١ أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ١١٢° ، أ = ٧ سم ، ب = ٤ سم

٢ أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ١١٢° ، أ = ٤ سم ، ب = ٧ سم

٣ ل م ن مثلث فيه : ق (∠ ل) = ٥٠° ، ل = ٤ سم ، م = ٧ سم

٤ ء هـ و مثلث فيه : ق (∠ ء) = ٦٠° ، ء = ٧,٥ سم ، هـ = ٥ √٣ سم

٥ ل م ن مثلث فيه : ق (∠ ل) = ٣٠° ، ل = ٦ سم ، م = ٩ سم

٦ أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ٤٠° ، أ = ٨,٥ سم ، ب = ٧ سم

الحل

١ ∵ ∠ أ منفرجة ، أ > ب

∴ يوجد للمثلث حل وحيد

، ∵ $\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب}$

∴ $\frac{٧}{جا ١١٢°} = \frac{٤}{جا ب}$

∴ جا ب = $\frac{٤ جا ١١٢°}{٧}$ ≈ ٠,٥٢٩٨ ∴ ق (∠ ب) ≈ **٣٢°**

ومنها ق (∠ حـ) = ١٨٠° − (١١٢° + ٣٢°) = **٣٦°**

، ∵ $\frac{أ}{جا أ} = \frac{حـ}{جا حـ}$ ∴ $\frac{٧}{جا ١١٢°} = \frac{حـ}{جا ٣٦°}$

∴ حـ ≈ **٤,٤ سم**

> **لاحظ أن**
> المثلث به زاوية واحدة على الأكثر منفرجة.
> ، ∵ ∠ أ منفرجة ∴ ∠ ب لا بد وأن تكون حادة
> ∴ ب تقع فى الربع الأول فقط

٢ ∵ ∠ أ منفرجة ، أ < ب

∴ الشروط لا تحقق وجود أى مثلث على الإطلاق

> **لاحظ أن**
> ∵ $\frac{٤}{جا ١١٢°} = \frac{٧}{جا ب}$ ∴ جا ب = $\frac{٧ جا ١١٢°}{٤}$ ≈ ١,٦
> وهذا مستحيل لأن جا ب ∉ [−١ ، ١]

٣ ∵ ∠ ل حادة ، ع = م جا ل = ٧ جا ٥٠° ≈ ٥,٤ سم

، ∵ ل < ع ∴ الشروط لا تحقق وجود أى مثلث على الإطلاق.

[illegible] $\hat{ه} = ٥\sqrt{٣}$ جا $٦٠° = ٧,٥$ سم

[illegible] ∴ يوجد للمثلث حل وحيد وهو مثلث قائم الزاوية فى ه

[illegible] $(٦٠° + ٩٠°) =$ $\boxed{٣٠°}$ ، $ق = \sqrt{(٥\sqrt{٣})^٢ - (٧,٥)^٢} = \boxed{\frac{٥\sqrt{٣}}{٢} \text{ سم}}$

[illegible] ل حادة [illegible] ل = ٩ جا ٣٠° = ٤,٥ سم ، ∵ ٤,٥ < ٦ < ٩

[illegible] ∴ يوجد للمثلث حلان

[illegible] $\frac{مَ}{جا م}$ = [illegible] ∴ $\frac{٦}{جا ٣٠°} = \frac{٩}{جا م}$ ∴ جا م $= \frac{٣}{٤}$

[illegible] فى الربع الأول أو الثانى

[illegible] م) ≈ $\boxed{٤٨ \; ٣٥ \; ٢٥°}$ ، أو ق (د م) = ١٨٠° − ٢٥ ٣٥ ٤٨° = $\boxed{١٣١ \; ٢٤ \; ٣٥°}$

ومنها ق (د ن)

= ١٨٠° − (٣٠° + ٤٨ ٣٥ ٢٥°)

= $\boxed{١٠١ \; ٢٤ \; ٣٥°}$

، ∵ $\frac{لَ}{جا ل} = \frac{نَ}{جا ن}$

∴ $\frac{٦}{جا ٣٠°} = \frac{نَ}{جا ٣٥ ٢٤ ١٠١°}$

∴ نَ ≈ $\boxed{١١,٧٦ \text{ سم}}$

ومنها ق (د ن)

= ١٨٠° − (٣٠° + ١٣١ ٢٤ ٣٥°)

= $\boxed{١٨ \; ٣٥ \; ٢٥°}$

، ∵ $\frac{٦}{جا ٣٠°} = \frac{نَ}{جا ٢٥ ٣٥ ١٨°}$

∴ نَ ≈ $\boxed{٣,٨٣ \text{ سم}}$

٦ ∵ د أ حادة ، أ > ب

∴ يوجد للمثلث حل وحيد

، ∵ $\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب}$

∴ $\frac{٨,٥}{جا ٤٠°} = \frac{٧}{جا ب}$

∴ جا ب $= \frac{٧ \text{ جا } ٤٠°}{٨,٥} \approx ٠,٥٣$ ∴ ق (د ب) ≈ $\boxed{٣٢°}$

> **لاحظ أنه**
>
> إذا أخذنا هنا ق (د ب) بحيث تقع فى الربع الثانى
>
> ∴ ق (د ب) = ١٨٠° − ٣٢° = ١٤٨°
>
> وهذا مستحيل لأنه ليس من المعقول أن يكون مجموع قياسى زاويتين فى مثلث = ٤٠° + ١٤٨° = ١٨٨° أكبر من ١٨٠°

ومنها ق (د ح) = ١٨٠° − (٤٠° + ٣٢°) = $\boxed{١٠٨°}$

، ∵ $\frac{أ}{جا أ} = \frac{حَ}{جا ح}$ ∴ $\frac{٨,٥}{جا ٤٠°} = \frac{حَ}{جا ١٠٨°}$

∴ حَ $= \frac{٨,٥ \text{ جا } ١٠٨°}{جا ٤٠°} \approx$ $\boxed{١٢,٥٨ \text{ سم}}$

ملاحظــة

يمكن حل المثلث فى الحالة المبهمة باستخدام قانون جيب التمام لإيجاد طول الضلع الثالث فنحصل على معادلة تربيعية وبحلها يكون عدد المثلثات هو عدد الحلول الموجبة الناتجة من هذه المعادلة.

مثال ٥

باستخدام الملاحظة السابقة حل المثلث أ ب حـ الذى فيه :

أ = ٦ سم ، ب = ٨ سم ، ق (∠ أ) = ٣٠°

الحـــل

∵ أ^٢ = ب^٢ + حـ^٢ − ٢ ب حـ جتا أ

∴ (٦)^٢ = (٨)^٢ + حـ^٢ − ٢ × ٨ × حـ جتا ٣٠°

∴ حـ^٢ − ٨√٣ حـ + ٢٨ = ٠

∴ حـ = (٨√٣ ± √((−٨√٣)^٢ − ٤(١)(٢٨))) / ٢(١)

∴ حـ ≈ ١١,٤ سم أو حـ ≈ ٢,٤٥٦ سم

، ∵ كل قيمة موجبة لـ حـ تقابل مثلثًا واحدًا

∴ يوجد لدينا مثلثان ثم نوجد جتا ب من العلاقة : جتا ب = (حـ^٢ + أ^٢ − ب^٢) / ٢ حـ أ

> **تذكر!**
> القانون العام لحل معادلة تربيعية على الصورة أ س^٢ + ب س + حـ = ٠
> هو س = (−ب ± √(ب^٢ − ٤ أ حـ)) / ٢ أ

عندما حـ ≈ ١١,٤ سم

∴ جتا ب١ = ((١١,٤)^٢ + (٦)^٢ − (٨)^٢) / ٢ (١١,٤) (٦)

∴ ق (∠ ب١) ≈ ٤١° ٤٩َ

ومنها ق (∠ حـ١) = ١٨٠° − (٣٠° + ٤١° ٤٩َ)

= ١٠٨° ١١َ

عندما حـ = ٢,٤٥٦ سم

∴ جتا ب٢ = ((٢,٤٥٦)^٢ + (٦)^٢ − (٨)^٢) / ٢ (٢,٤٥٦) (٦)

∴ ق (∠ ب٢) ≈ ١٣٨° ١٢َ

ومنها ق (∠ حـ٢) = ١٨٠° − (٣٠° + ١٣٨° ١٢َ)

= ١١° ٤٨َ

∴ الحل الأول هو حـ = ١١,٤ سم ، ق (∠ ب) = ٤١° ٤٩َ ، ق (∠ حـ) = ١٠٨° ١١َ

، الحل الثانى هو حـ = ٢,٤٥٦ سم ، ق (∠ ب) = ١٣٨° ١٢َ ، ق (∠ حـ) = ١١° ٤٨َ

* حاول حل هذا المثال باستخدام قاعدة الجيب.

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① يقصد بحل المثلث ....

(أ) إيجاد أطوال أضلاعه. (ب) إيجاد قياسات زواياه.

(جـ) إيجاد العلاقة بين أطوال أضلاعه وقياسات زواياه. (د) إيجاد أطوال أضلاعه وقياسات زواياه.

② محيط Δ أ ب جـ الذي فيه : ب = ١١ سم ، ق(∠ أ) = ٦٧° ، ق(∠ جـ) = ٤٦°

يساوي ≃ .... (لأقرب سم).

(أ) ٢٢ (ب) ٣٨ (جـ) ٣١ (د) ٢٧

③ 📖 عند حل المثلث أ ب جـ الذي فيه : أ = ٥ سم ، ب = ٧ سم ، ق(∠ جـ) = ٦٥°

فإن : جـ ≃ .... سم (لأقرب جزء من عشره).

(أ) ٤،٤ (ب) ٢،١ (جـ) ٦،٧ (د) ٨،٢

④ عند حل Δ أ ب جـ الذي فيه : أ = ٢ سم ، ب = ٤ $\sqrt{٢}$ سم ، جـ = ٢ $\sqrt{٥}$ سم فإن :

أولًا : جا أ = ...

(أ) $\frac{٣}{\sqrt{١٠}}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٢}{\sqrt{١٠}}$ (د) $\frac{\sqrt{١٠}}{٥}$

ثانيًا : ق(∠ جـ) = ...°

(أ) ١٨ ٣٢° (ب) ٤٣ ٢٧° (جـ) ١٣٥° (د) ٤٥°

⑤ عدد حلول Δ أ ب جـ الذي فيه : ق(∠ جـ) = ١١٥° ، جـ = ١٢ سم ، أ = ٩ سم

هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) صفر

⑥ عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب جـ الذي فيه : أ = ٨ سم ، ب = ١٠ سم ، ق(∠ أ) = ٤٢°

هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) عدد لا نهائي. (د) صفر

(٧) عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب حـ حيث : ق (∠ أ) = ٦٠° ، ب = ٣ سم ، أ = ٥ سم هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) عدد لا نهائى.

(٨) عدد حلول المثلث س ص ع الذى فيه : س = ٥ سم ، ص = ٦ سم ، ق (∠ س) = ٧٠° يساوى ....

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ١ (د) ٣

(٩) Δ س ص ع فيه : س = ٣٠ سم ، ص = ٢٠ سم ، ق (∠ س) = ١٠٠°

فإن هذه الشروط ....

(أ) تحقق وجود مثلث وحيد. (ب) تحقق وجود مثلثين.

(جـ) تحقق وجود ثلاثة حلول. (د) لا تحقق وجود أى مثلث.

(١٠) Δ أ ب حـ فيه : أ = ٢٠ سم ، ب = ٢٥ سم ، ق (∠ أ) = ٤٠° فإن هذه الشروط ....

(أ) تحقق وجود مثلث وحيد. (ب) تحقق وجود مثلثين.

(جـ) تحقق وجود ثلاثة حلول. (د) لا تحقق وجود أى مثلث.

(١١) Δ س ص ع فيه : ق (∠ س) = ١٠٠° ، س = ٣ سم ، ص = ٤ سم

هذه الشروط ....

(أ) تحقق وجود مثلث وحيد. (ب) تحقق وجود مثلثين.

(جـ) تحقق وجود ثلاثة حلول. (د) لا تحقق وجود أى مثلث.

(١٢) إذا كان للمثلث أ ب حـ حيث أ = ١٥ سم ، ق (∠ ب) = ٣٠° حل وحيد

فإن : ب يمكن أن يساوى .... سم

(أ) ٨ (ب) ٧ (جـ) ٧,٥ (د) ٨,٥

(١٣) إذا كان للمثلث س ص ع حيث س = ١٠ سم ، ق (∠ ص) = ٥٠° حلان

فإن : ص يمكن أن يساوى .... سم

(أ) ٦ (ب) ١١ (جـ) ٧,٦٦ (د) ٨

(١٤) إذا كانت الشروط التالية لا تحقق وجود للمثلث س ص ع حيث س = ١٧ سم ، ق (∠ ص) = ٩٢°

فإن : ص يمكن أن يساوى .... سم

(أ) ٢٠ (ب) ٢٥ (جـ) ١٨ (د) ١٦

(١٥) إذا كانت الشروط التالية لا تحقق وجود المثلث ل م ن حيث ل = ٣٥ سم ، ق(∠م) = ٧٥°

فإن : مَ يمكن أن يساوى .... سم

(أ) ٤٥ (ب) ٧٥ (جـ) ٣٣ (د) ٤٠

(١٦) عند حل △ أ ب جـ الذى فيه : أ = ١٥ سم ، جتا ب = $\frac{١}{٢}$ ، ظا جـ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

فإن محيط △ أ ب جـ = ... نق «حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث»

(أ) $(٢ + \sqrt{٣})$ (ب) $(\frac{\sqrt{٣}}{٢} + ٢)$ (جـ) $(٣ + \sqrt{٣})$ (د) ٢

ثانيًا الأسئلة المقالية

مسائل على الحالة الأولى لحل المثلث (طول ضلع وقياسا زاويتين)

١ حل المثلث ل م ن الذى فيه : مَ = ١٧ سم ، ق(∠ل) = ٣٣ َ١٦ ° ، ق(∠ن) = ٤٤ َ١٩ °

«٩,٥ سم ، ١٢,٢ سم ، ٢٥ َ١٠٢ °»

٢ حل المثلث أ ب جـ الذى فيه : أ ب = ٩ سم ، ق(∠أ) = ٢ ق(∠ب) = ٨٠°

ثم احسب مساحته لأقرب سم^٢

«١٠,٢ سم ، ٦,٧ سم ، ٦٠° ، المساحة ≈ ٣٠ سم^٢»

٣ حل المثلث س ص ع الذى فيه : س ص = ٤٠ سم ، ق(∠س) = ٧٥ َ١٢ °

، ق(∠ص) = ٤٨ َ٦٥ ° ثم أوجد ارتفاع المثلث المرسوم من ع على $\overline{\text{س ص}}$

«٤٦,٤ سم ، ٢٥,٨ سم ، ٥٦ َ٣٢ ° ، الارتفاع ≈ ٢٤,٦ سم»

مسائل على الحالة الثانية لحل المثلث (طولا ضلعين وقياس زاوية محصورة)

٤ حل المثلث أ ب جـ الذى فيه : ق(∠أ) = ١٥٣ َ١٢ ° ، بَ = جـَ = ٦ سم

«١١,٦٧ سم ، ١٣ َ٢٤ ° ، ١٣ َ٢٤ °»

٥ حل المثلث ل م ن الذى فيه : لَ = ١٢,٥ سم ، نَ = ٧,٢٥ سم ، ق(∠م) = ٦١,٢°

«١١,٩٦ سم ، ٥٣ َ٧٦ ° ، ٣٢ َ٣٤ °»

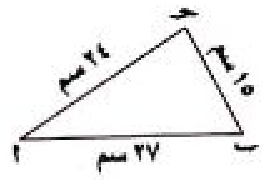
٦ حل المثلث ل م ن الذى فيه : ل م = ٤٨,٥ سم ، م ن = ٤٦ سم ، جتا م = −٠,٦

«٨٤,٥٢ سم ، ٤٨ َ٢٥ ° ، ٥٢ َ١٢٦ ° ، ٢٠ َ٢٧ °»

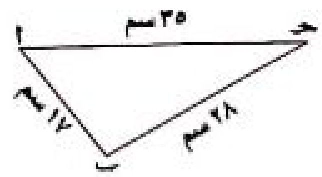
مسائل على الحالة الثالثة لحل المثلث (أطوال ثلاثة أضلاع)

٧ حل المثلث أ ب ح في كل من الشكلين الآتيين :

①



②



٨ حل المثلث أ ب ح الذي فيه : أ = ١٣ سم ، ب = ١٤ سم ، ح = ١٥ سم

« ٥٣° ٨َ ، ٥٩° ٢٩َ ، ٦٧° ٢٣َ »

٩ حل المثلث أ ب ح الذي فيه : أ = ٥ سم ، ب = ٢ ح = ٨ سم

« ٣٠° ٤٥َ ، ١٢٥° ٦َ ، ٢٤° ٩َ »

مسائل على الحالة الرابعة لحل المثلث (طولا ضلعين وقياس زاوية مقابلة لأحدهما)

١٠ حل المثلث أ ب ح الذي فيه : أ = ١٠ سم ، ب = ٩ سم ، ق (∠ ب) = ٥٧°

١١ حل المثلث أ ب ح الذي فيه : ق (∠ أ) = ٥٠° ، أ = ٤ سم ، ب = ٣ سم

١٢ حل المثلث أ ب ح الذي فيه : ق (∠ ح) = ١١٦° ، ح = ١٢ سم ، أ = ١٠ سم

١٣ بيِّن ما إذا كانت الشروط الآتية تحقق وجود مثلث وحيد أو أكثر من مثلث أو لا تحقق وجود أي مثلث على الإطلاق ثم أوجد الحلول الممكنة مقربًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة :

① أ = ١٥ سم ، ب = ١٠ سم ، ق (∠ أ) = ١٢٠°

② أ = ٤ سم ، ح = ١٦ سم ، ق (∠ ح) = ١١٥°

③ أ = ١٢ سم ، ب = ١٥ سم ، ق (∠ أ) = ١٠٠°

④ أ = ٢٠ سم ، ب = ٢٨ سم ، ق (∠ أ) = ٤٢°

⑤ أ = ٥ سم ، ب = ٧ سم ، ق (∠ أ) = ٦٠°

⑥ أ = ١٢ سم ، ح = ٧ سم ، ق (∠ أ) = ٢٧°

⑦ أ = $٤\sqrt{٣}$ سم ، ب = ٦ سم ، ق (∠ ب) = ٦٠°

⑧ أ = ٦ سم ، ب = ٨ سم ، ق (∠ أ) = ٤٧°

١٤ مسألة مفتوحة : أ ب ح مثلث فيه : ق (∠ ب) = ٥٨° ، أ = ٤٢ سم

أوجد : ب التي لا يوجد حل للمثلث أ ب ح عندها . فسر إجابتك.

مسائل متنوعة

١٥ حل المثلث أ ب حـ المتساوى الساقين الذى فيه : ق (∠ أ) = ١١٠° ، أ = ٨ سم

«٤,٩ سم ، ٤,٩ سم ، ٣٥° ، ٣٥°»

---

١٦ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ = ٢١ سم ، حتا ب = $\frac{٣}{٥}$ ، ظا حـ = $\frac{٥}{١٢}$

«١٧,٣ سم ، ٨,٣ سم ، ١٠٤° ٦٥َ ، ٥٣° ٨َ ، ٢٢° ٣٧َ»

---

١٧ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ = ٥ سم ، ق (∠ ب) = ١٢٠°

، ومساحته تساوى ١٠ $\sqrt{٣}$ سم²

«١١,٣٦ سم ، ٨ سم ، ٢٤َ ٢٢ً ٢٢° ، ٣٦َ ٣٧° »

---

١٨ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : ق (∠ أ) : ق (∠ ب) : ق (∠ حـ) = ٤ : ٥ : ٦

ومحيطه يساوى ٥٠ سم

«١٤,٥ سم ، ١٦,٩ سم ، ١٨,٦ سم ، ٤٨° ، ٦٠° ، ٧٢°»

---

١٩ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : حا أ : حا ب : حا حـ = ٣ : ٤ : ٦ ومحيطه يساوى ٥٢ سم

«١٢ سم ، ١٦ سم ، ٢٤ سم ، ٢٦° ٣٣َ ، ٣٦° ٢٠َ ، ١١٧° ٦َ»

---

٢٠ حل المثلث أ ب حـ الحاد الزوايا الذى فيه : أ = ٢١ سم ، ب = ٢٥ سم ، وطول قطر الدائرة المارة برؤوسه يساوى ٢٨ سم

«٢٦ سم ، ٤٨° ٣٥َ ، ٦٣° ١٤َ ، ٦٨° ١١َ»

---

٢١ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : حـ = ٥ سم ، ق (∠ أ) = ٨٢° ، وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ٨ سم

«١٥,٨ سم ، ١٥,٧ سم ، ٧٩° ٤٧َ ، ١٨° ١٣َ»

---

٢٢ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ = ٧ سم ، ق (∠ ب) = ٤٠°

، ومحيط الدائرة المارة برؤوس المثلث = ٤٤ سم ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

«٩ سم ، ١٣ سم ، ٣٠° ، ١١٠°»

---

٢٣ حل المثلث س ص ع الذى فيه : ق (∠ س) = ٨٢° ، ق (∠ ع) = ٥٦°

ومساحته = ٩٠٠ سم²

«٥٦ سم ، ٣٨ سم ، ٤٧ سم ، ٤٢°»

---

٢٤ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه :

ق (∠ أ) = ٣٥° ، ق (∠ ب) = ٧٥° ، أ + ٣ حـ = ٢٥ سم

«٤,٢ سم ، ٧,١ سم ، ٦,٩ سم ، ٧٠°»

---

٢٥ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ = ١٣ سم ، ق (∠ ب) = ٤٢° ، طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه يساوى ٨ سم

«١٠,٧ سم ، ١٥,٩ سم ، ٥٤° ٢٠َ ، ٨٣° ٤٠َ أ، ١٠,٧ سم ، ٣,٤ سم ، ١٢٥° ٤٠َ ، ١٢° ٢٠َ»

٢٦ 📖 **فى كل مما يأتى هل يمكن تكوين مثلث أ ب حـ أم لا ؟ وإذا كان ممكنًا حل هذا المثلث :**

① أ = ٣,٢ سم ، ب = ٧,٦٣ سم ، حـ = ٦,٤ سم

② أ = ١٢ سم ، ب = ٢١ سم ، ق (∠ حـ) = ٩٥°

③ أ = ١ سم ، ب = ٥ سم ، حـ = ٤ سم

④ ق (∠ أ) = ٤٢° ، أ = ٧ سم ، ب = ١٠ سم

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان أ ب حـ مثلث فيه : أ = ٣ سم ، ب = ٨ سم ، جا أ = $\frac{٥}{١٣}$

فإن عدد المثلثات التى يمكن تكوينها من المعلومات السابقة هى ....

(أ) صفر (ب) ١

(جـ) ٢ (د) المعلومات غير كافية.

② إذا كان أ ب حـ مثلث فيه : أ حـ = ٨ سم ، ق (∠ أ) = ٤٠° وكان ٨ جا ٤٠° < ب حـ < أ حـ

فإن ....

(أ) لا يمكن رسم المثلث. (ب) يمكن رسم مثلث وحيد.

(جـ) يمكن رسم مثلثين. (د) يمكن رسم عدد لا نهائى من المثلثات.

③ إذا كان أ ب حـ مثلث فيه : أ حـ = ٨ سم ، ق (∠ أ) = ٤٠° وكان ب حـ < ٨ جا ٤٠°

فإن ....

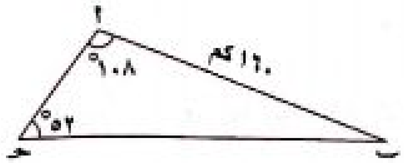
(أ) لا يمكن رسم المثلث. (ب) يمكن رسم مثلث وحيد.

(جـ) يمكن رسم مثلثين. (د) يمكن رسم عدد لا نهائى من المثلثات.

تطبيقات حياتيــة على الوحــدة الرابعــة

من أسئلة الكتاب المدرسي

١ الربط بالجغرافيا :



الشكل المقابل يمثل مواقع ثلاث مدن أ ، ب ، حـ

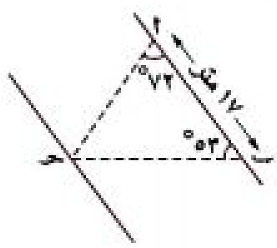
أوجد لأقرب كيلو متر :

(١) المسافة بين أ ، حـ

(٢) المسافة بين ب ، حـ «٦٩ كم ، ١٩٣ كم»

---

٢ فى الشكل المقابل :



العلامتان أ ، ب تقعان على الحافة نفسها لجدول مياه والمسافة بينهما ١٧ مترًا ، تقع العلامة حـ على الحافة المقابلة بحيث : ق (∠ ب أ حـ) = ٧٢° ، ق (∠ أ ب حـ) = ٥٣°

أوجد : (١) المسافة بين العلامتين أ ، حـ لأقرب متر.

(٢) المسافة بين حافتى الجدول بفرض أنهما متوازيتان لأقرب رقمين عشريين.

«١٧ م ، ١٥,٧٦ م»

---

٣ معارض الفنون : علقت صورة فى معرض بواسطة خيط مربوط بحلقتين على الحافة الأفقية العليا من الصورة ويمر على مسمار فى حائط ، فإذا كان طول الخيط على كل جهة من المسمار ٣٠ سم ، وقياس الزاوية بين جزئى الخيط ٥٠° فأوجد المسافة بين الحلقتين على حافة الصورة لأقرب سنتيمتر. «٢٥ سم»

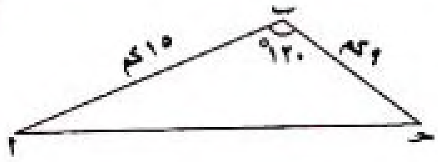
---

٤ الربط بالزراعة : يريد مزارع وضع سياج بقطعة أرض مثلثة الشكل طولا ضلعين فيها ٩٨ م ، ٦٤ م ، وقياس الزاوية المحصورة بينهما ٥٢° فما طول هذا السياج ؟ «٢٣٩ م»

---

٥ تحركت سفينتان أ ، ب فى نفس اللحظة من أحد الموانئ ، فإذا تحركت أ فى اتجاه ٢٠° جنوب الشرق حيث قطعت مسافة ٢٤ كم وتحركت ب فى اتجاه ٥٥° شمال الشرق حيث قطعت مسافة ١٠ كم فى نفس الزمن أوجد المسافة بين السفينتين فى نهاية هذا الزمن. «٢٣,٥٥ كم»

٦ مسافات : يركب كريم دراجته البخارية ليقطع المسافة من المدينة أ إلى المدينة حـ مرورًا بالمدينة ب بسرعة منتظمة مقدارها ٣٦ كم/س ، ثم يعود من المدينة حـ إلى المدينة أ مباشرة بسرعة منتظمة مقدارها ٤٢ كم/س أوجد :



① الإزاحة بالكيلو متر بين المدينة حـ ، المدينة أ

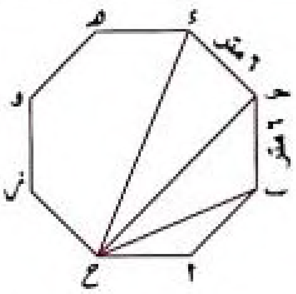
② الزمن الكلى بالدقيقة للرحلة كلها.

«٢١ كم ، ٧٠ دقيقة»

٧ التصميم المعمارى :

صمم مهندس معمارى مبنى على شكل مثمن منتظم ، طول كل ضلع من أضلاعه ٦ أمتار.

أوجد أطوال الأقطار $\overline{ع ب}$ ، $\overline{ع حـ}$ ، $\overline{ع ء}$



«١١,١ متر ، ١٤,٥ متر ، ١٥,٧ متر»

الرياضيات
البحتة

الجزء الخاص
بالامتحانات

- اختبارات تراكمية
- امتحانات نهائية

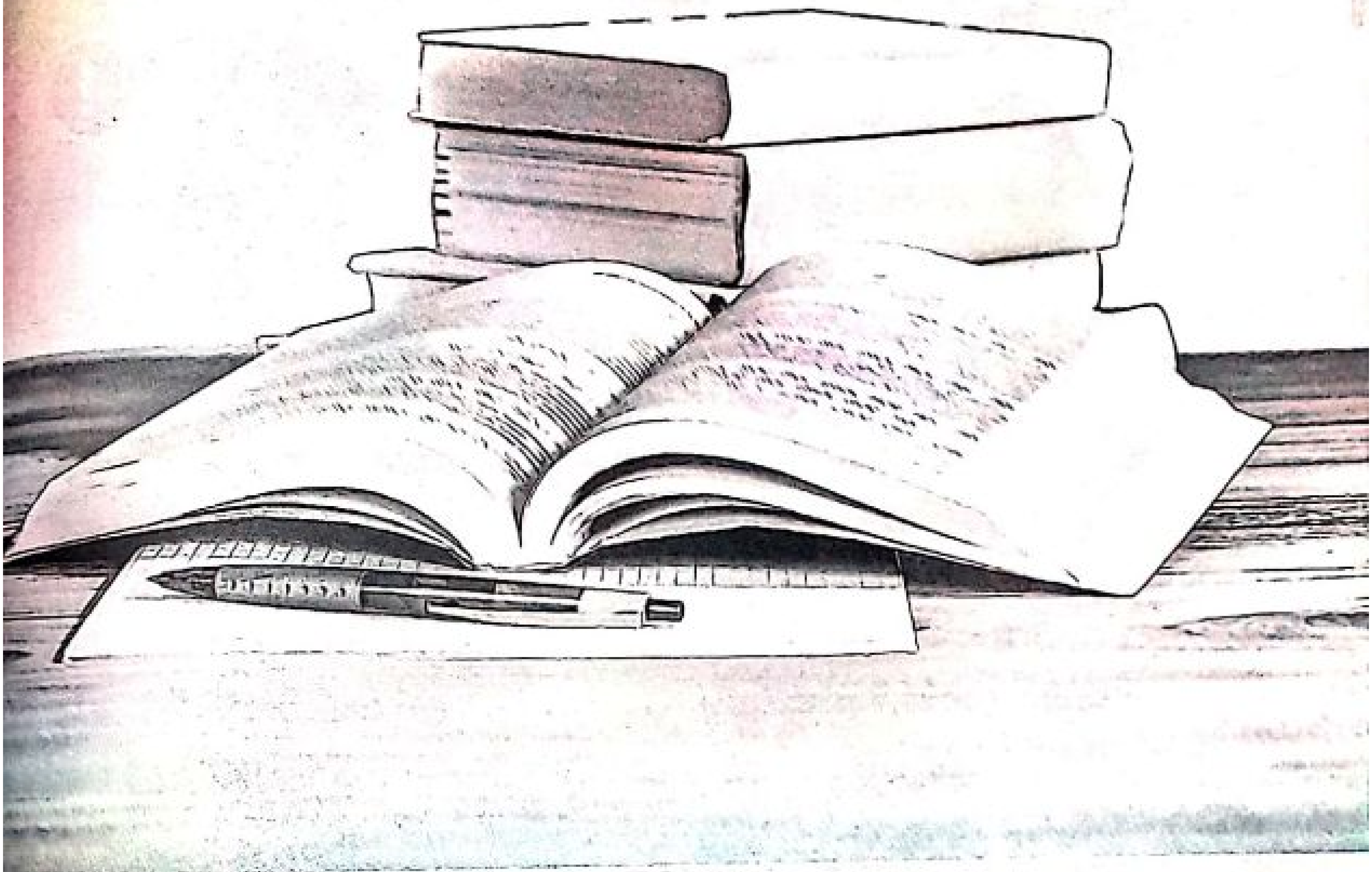
امتحانات إلكترونية باستخدام تقنية QR



المعاصر 2023

إعداد نخبة من خبراء التعليم

الصف الثانى الثانوى
القسم العلمى
الفصل الدراسى الأول



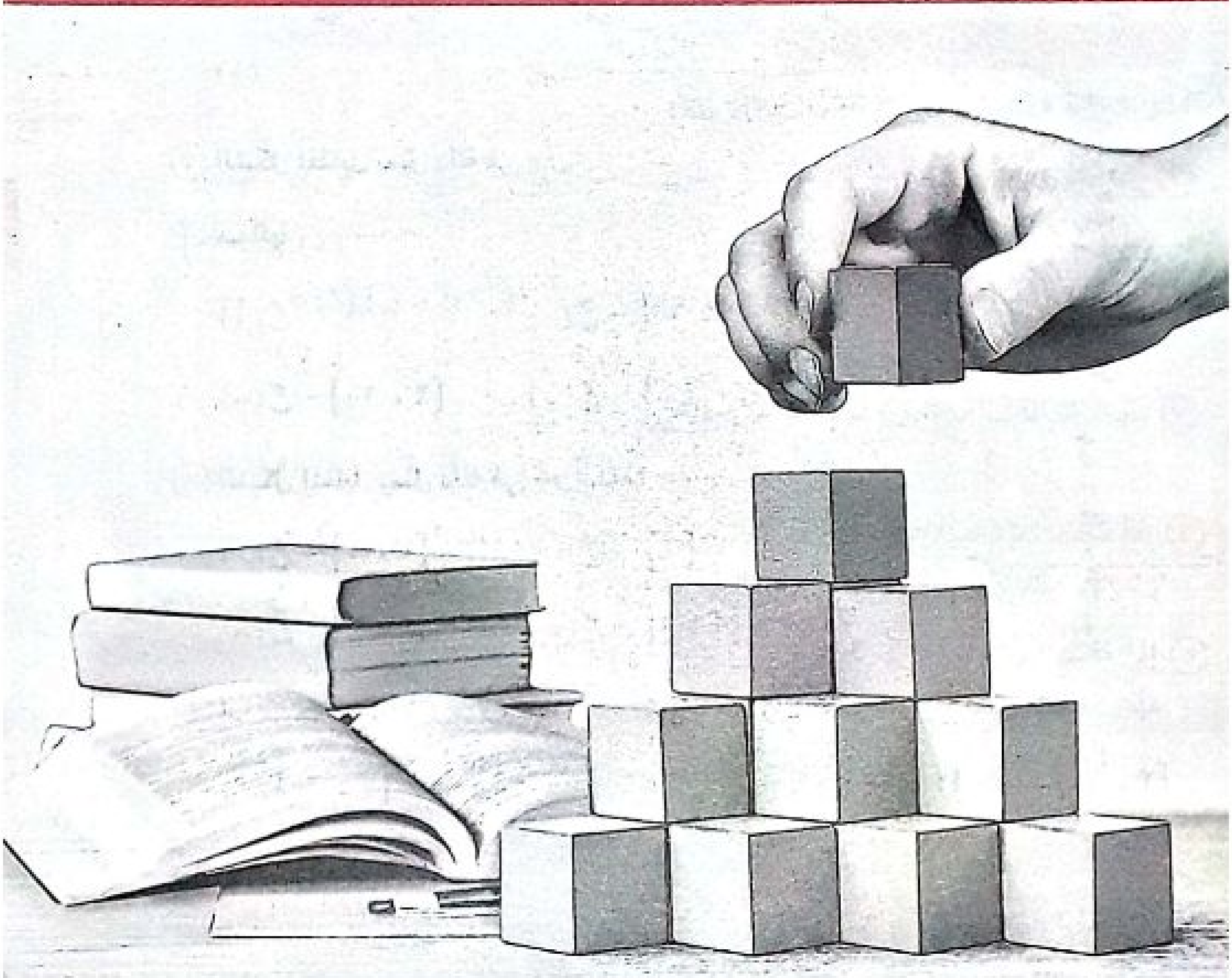
- الاختبـارات التراكميـــة القصيـــرة.
- امتحانـــات الكتـــاب المدرســـى.
- الامتحانـــات النهائيـــة.
- الإجـابـــات.

الاختبارات التراكمية القصيرة

أولًا : اختبارات تراكمية قصيرة في الجبر.

ثانيًا : اختبارات تراكمية قصيرة في التفاضل.

ثالثًا : اختبارات تراكمية قصيرة في حساب المثلثات.



أولًا

اختبارات تراكمية قصيرة فى الجبر

الدرجة الكلية

١٠

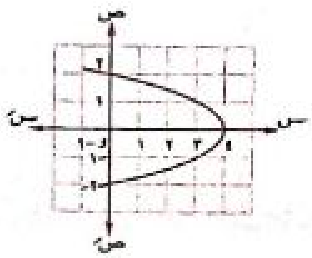
اختبار 1 على درس 1 من الوحدة الأولى

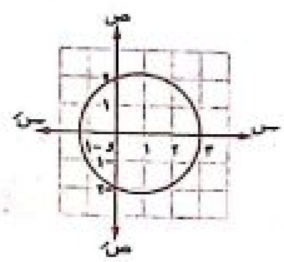
أجب عن الأسئلة الآتية :

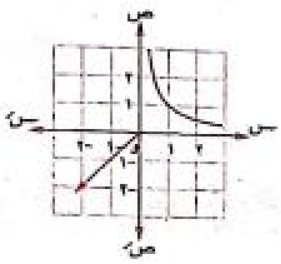
السؤال الأول ٤ درجات (كل جزئية درجة)

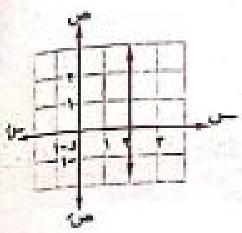
اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① أى من الأشكال الآتية يمثل دالة فى س ؟

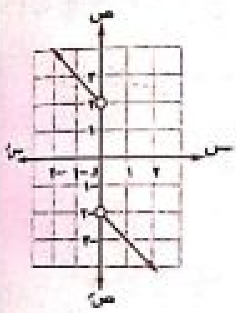

(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

② الشكل المقابل يمثل دالة فى س



مجالها ....

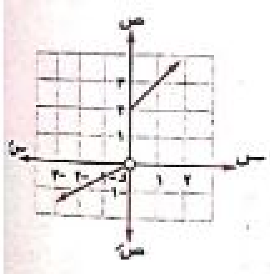
(أ) ح

(ب) ح −]−٢ ، ٢[

(جـ) ح − [−٢ ، ٢]

(د) ح − {٠}

③ الشكل المقابل يمثل دالة فى س مداها ....



(أ) ح − [٠ ، ٢]

(ب) ح − {٠}

(جـ) ح − [٠ ، ٢[

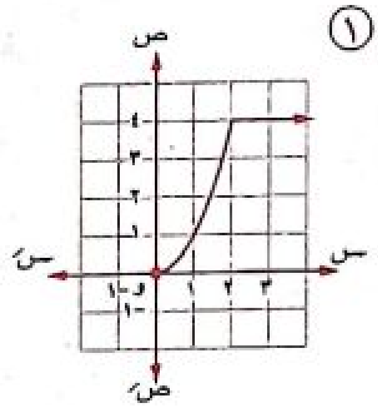
(د) ح −]٠ ، ٢]

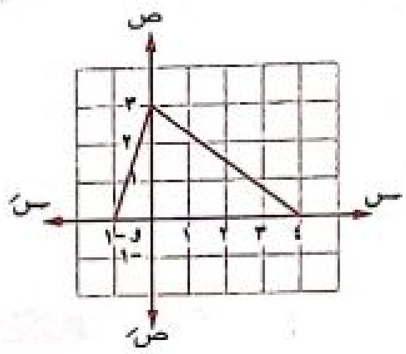
④ إذا كانت : د (س) = $\sqrt{٤ - س^{٢}}$ فإن : مجال د = ...

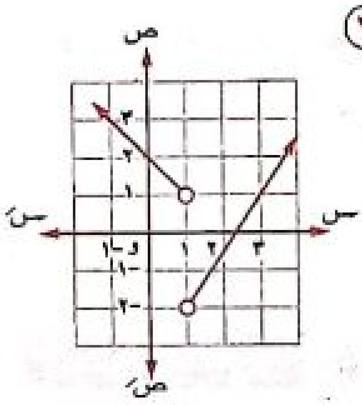
(أ) [−٢ ، ٢] (ب)]−٢ ، ٢[(جـ) [−٢ ، ٢[(د)]−٢ ، ٢]

السـؤال الثانى **٦ درجات** كل جزئية درجتان

ابحث اطراد كل من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية :

① 

② 

③ 

الدرجة الكلية ١٠

اختبـار 2 حتى درس 2 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السـؤال الأول **٦ درجات** كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : د (س) = $\frac{1}{س}$ ، ر (س) = $\sqrt{س}$ فإن : مجال (د . ر) = ...

(أ) ح − {٠} (ب) ح (جـ) ح$^+$ (د)]٠ ، ∞[

② إذا كانت : د (س) = س + ١ ، ر (س) = س^٢ فإن : (د ∘ ر) (٢) = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٩

③ مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{٥ - س}$ يساوى ....

(أ) ح − {٥} (ب) ح$^+$ (جـ)]−∞ ، ٥] (د)]٥ ، ∞[

④ إذا كانت : د (س) = $\sqrt{س}$ ، ر (س) = س^٢ فإن : مجال (د ∘ ر) = ...

(أ)]٠ ، ∞[(ب) ح (جـ) ح$^+$ (د) ح$^-$

⑤ إذا كانت : د (س) = $\sqrt{س - ١}$ ، ر (س) = $\sqrt{١ - س}$

فإن : مجال (د + ر) هو ....

(أ) [١ ، ∞[(ب)]−∞ ، ١] (جـ)]−١ ، ∞[(د) {١}

⑥ إذا كانت العلاقة بين س ، د (س) ، ر (س)

كما بالجدول المقابل لبعض قيم س

فإن قيمة س التى تحقق أن

ر (د (س)) = −١ هى ....

(أ) ٨ (ب) ٣

(جـ) ٢ (د) ٤

س	د (س)	ر (س)
−١	−٢	٤
صفر	٠	٣
١	٢	٢
٢	٤	١
٣	٦	٠
٤	٨	−١

السؤال الثانى ٤ درجات كل جزئية درجتان

إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{س}$ ، ر (س) = س + ٣

فأوجد : ① (د ∘ ر) (س) ② (ر ∘ د) (س)

واذكر المجال فى كل من الحالتين.

الدرجة الكلية

اختبار 3 حتى درس 3 من الوحدة الأولى

١٠

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت الدالة د زوجية فى [أ ، ب] فإن : ب = ...

(أ) أ (ب) − أ (جـ) ٢ أ (د) $أ^٢$

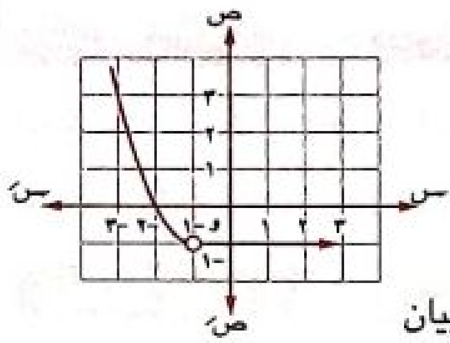
② مجال الدالة د : د (س) = $\frac{٥}{\sqrt[٣]{س - ٨}}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٢} (جـ) ح − {٨} (د)]٨ ، ∞[

③ الدالة الفردية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) د (س) = س جا س (ب) د (س) = جتا س

(جـ) د (س) = ٥ (د) د (س) = س جتا س



④ الشكل المقابل يمثل دالة
مداها ....

(أ) ح − {−١}　(ب) [−١ ، ∞[
(جـ)]−١ ، ∞[　(د) ح

⑤ إذا كانت د دالة أحادية وكانت النقطة (٢ ، ٣) تنتمى لبيان الدالة د ، فأى النقط الآتية يمكن أن تنتمى لبيان د ؟

(أ) (٥ ، ٣)　(ب) (٢ ، −١)　(جـ) (٣ ، ٢)　(د) كل ما سبق.

⑥ إذا كانت د (س) = س^{٣} ، ر (س) = س^{٢} + ١ فأى مما يأتى يكون دالة فردية ؟

(I) (د × ر)　(II) (د ∘ ر)　(III) (ر ∘ د)

(أ) I فقط　(ب) II ، III　(جـ) I ، II　(د) I ، III

السؤال الثانى ٤ درجات

إذا كانت : د$_{١}$ (س) = س^{٥} ، د$_{٢}$ (س) = جا س أوجد : (د$_{١}$ + د$_{٢}$) (س)

ثم ابحث نوع (د$_{١}$ + د$_{٢}$) من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك.

الدرجة الكلية ---- ١٠

اختبار 4 حتى درس 4 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٣ درجات

مثل بيانيًا الدالة د : د (س) = { |س| عندما س ≥ ٠ ، س^{٢} عندما س < ٠ } ومن الرسم استنتج مدى الدالة

وبيِّن نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك وادرس اطرادها.

السؤال الثانى ٢ درجة

أوجد مجال الدالة د : د (س) = $\frac{٢ س + ١}{س − ٢}$

وأثبت أن : د دالة أحادية.

السؤال الثالث ٣ درجات

إذا كانت : د (س) = $س^٢$ − ١ ، ر (س) = س + ١

فارسم الدالة $\frac{د}{ر}$ مبينًا مجال ومدى الدالة ثم ابحث اطرادها.

السؤال الرابع ٢ درجة

ارسم الشكل البيانى للدالة د : د (س) = $\begin{cases} س - ١ & ، ٢ < س \leq ٤ \\ -١ & ، -٢ \leq س \leq ٢ \end{cases}$

ومن الرسم عين المدى.

الدرجة الكلية ١٠

اختبار 5 حتى درس 5 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات (كل جزئية درجة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① منحنى الدالة د : د (س) = $س^٢$ + ٤ هو نفس منحنى الدالة ر : ر (س) = $س^٢$ بإزاحة مقدارها ٤ وحدات فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{وس}$ (ب) $\overrightarrow{وس}$ (جـ) $\overleftarrow{وص}$ (د) $\overrightarrow{وص}$

② الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) $د_١$ (س) = س + ٢ (ب) $د_٢$ (س) = $س^٢$

(جـ) $د_٣$ (س) = |س| (د) $د_٤$ (س) = ٥

③ إذا كانت د دالة حيث د (س) = $\frac{١}{س}$ فإن نقطة التماثل للدالة التى قاعدتها د (س + ١) هى ....

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٠ ، ١) (جـ) (−١ ، ٠) (د) (−١ ، ١)

④ إذا كانت : د (س) = $\sqrt{س + ٤}$ ، ر (س) = $س^٢$ − ٤

فإن : (د ∘ ر) (س) = ...

(أ) |س| (ب) $س^٢$ (جـ) $س^٢$ + ٤ (د) ٢

⑤ إذا كانت د (س) دالة حقيقية مجالها [−٢ ، ٢] فإن مجال الدالة ر (س) = د (س − ٢) هو ....

(أ) [−٢ ، ٢]　　(ب) [−٤ ، ١]　　(جـ) [٠ ، ٥]　　(د) ح

⑥ إذا كانت د (س) دالة فردية فإن | د (س) | تكون ....

(أ) فردية.　　(ب) زوجية.

(جـ) زوجية وفردية معًا.　　(د) ليست زوجية وليست فردية.

السؤال الثانى　٤ درجات

مثل بيانيًا الدالة د : د (س) = | ٤ − س^{٢} | ومن الرسم استنتج مدى الدالة وبيِّن نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك وادرس اطرادها.

الدرجة الكلية

اختبار 6　حتى درس 6 من الوحدة الأولى

١٠

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول　٦ درجات　كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① مجال الدالة د : د (س) = $\frac{٥}{\sqrt{س − ٤}}$ هو ....

(أ) [٤ ، ∞[　　(ب)]٤ ، ∞[　　(جـ)]−∞ ، ٤]　　(د)]−∞ ، ٤[

② الدالة د حيث د (س) = { ٢ عندما س > ٠ ، −٢ عندما س < ٠ } متماثلة بالنسبة للنقطة ....

(أ) (٢ ، ٠)　　(ب) (−٢ ، ٠)　　(جـ) (٠ ، ٠)　　(د) (٢ ، −٢)

③ المساحة المحصورة بين منحنيي الدالتين د : د (س) = | س + ٣ | − ٢ ، ر : ر (س) = صفر هى .... وحدة مربعة.

(أ) ٢　　(ب) ٣　　(جـ) ٤　　(د) ٥

④ الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) د (س) = $س^2$ (ب) د (س) = | س |

(جـ) د (س) = $\frac{1}{س}$ (د) د (س) = ٣

⑤ مجموعة حل المتباينة : | س − ٢ | ≥ −٤ فى ح هى ....

(أ)]−٢ ، ٦[(ب) [−٢ ، ٦] (جـ) ح (د) ∅

⑥ نفرض أن المنحنى د (س) = − $س^3$ انتقل ٤ وحدات لليمين ووحدتين لأسفل وكان المنحنى الناتج هو ر (س) فإن : ر (−٢) = ...

(أ) −٢١٨ (ب) −٢٠ (جـ) ٦ (د) ٢١٤

السؤال الثانى ٤ درجات كل جزئية درجتان

أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من :

① $\sqrt{س^2 - ٦ س + ٩}$ + ٢ س = ٩ ② $\frac{1}{|٢ س - ٣|}$ ≥ ٢

الدرجة الكلية ١٠

اختبار 7 حتى درس 1 من الوحدة الثانية

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : د دالة فردية فى الفترة [أ ، ب] فإن : ب = ...

(أ) أ (ب) − أ (جـ) ٢ أ (د) $أ^2$

② نقطة تماثل الدالة د : د (س) = $(س - ٢)^3$ + ١ هى ....

(أ) (٢ ، ١) (ب) (−٢ ، ١) (جـ) (٢ ، −١) (د) (−٢ ، −١)

③ مجموعة الحل للمعادلة : $\sqrt[3]{س^2}$ = ٨ فى ح هى ....

(أ) {٢} (ب) {٤} (جـ) {١٦} (د) {٦٤}

④ مجموعة الحل للمعادلة : $س^{\frac{2}{3}} = 25$ فى ح هى ....

(أ) {٥}　　(ب) {٥ ، -٥}

(جـ) {١٢٥}　　(د) {١٢٥ ، -١٢٥}

⑤ إذا كان : $7^{س+1} = 3^{2س+2}$ فإن : س = ...

(أ) -١　　(ب) ١　　(جـ) ٤　　(د) صفر

⑥ إذا كانت : $د_1(س) = 3^{س}$ ، $د_2(س) = 9^{س}$ فإن قيمة س التى تحقق أن

$د_1(2س - 1) + د_2(س + 1) = 756$ هى ....

(أ) ٢　　(ب) ٤　　(جـ) ٦　　(د) ٧

السؤال الثانى ٤ درجات كل جزئية درجتان

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين :

① $س^{\frac{4}{3}} - 10 س^{\frac{2}{3}} + 9 = 0$

② $|س + 2| = 3س - 10$

الدرجة الكلية ١٠

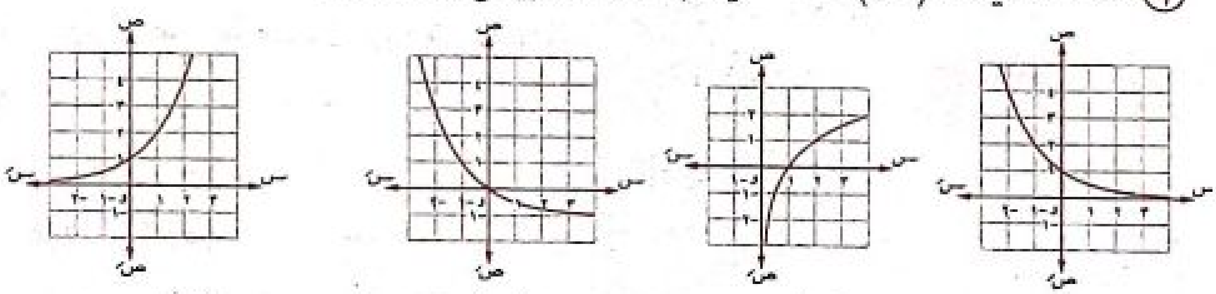
اختبار 8 حتى درس 2 من الوحدة الثانية

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① الدالة د حيث $د(س) = 2^{س}$ يمثلها الشكل البيانى ....



(أ)　　(ب)　　(جـ)　　(د)

② إذا كانت الدالة د حيث د (س) = $\frac{1}{س}$ فإن نقطة التماثل للدالة التى قاعدتها د (س + ١)

هى ....

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٠ ، ١) (جـ) (−١ ، ٠) (د) (−١ ، ١)

③ مجموع جذور المعادلة : $س^{٤}$ = ١٦ يساوى ....

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) صفر (د) ± ٢

④ إذا كانت : د (س) = $أ^{س}$ ، أ > ١ فإن : د (س) < ١ عندما ....

(أ) س ∈ ح (ب) س ∈ $ح^{+}$ (جـ) س ∈ $ح^{-}$ (د) س ∈ ص

⑤ الدالة د : د (س) = $(٢ أ)^{س}$ تكون متناقصة عندما أ ∈ ....

(أ)]٠ ، ١[(ب)]١ ، ∞[(جـ)]٠ ، ٢[(د)]٠ ، $\frac{1}{2}$[

⑥ إذا كانت : د (س) = ٣ س + ١ ، ر (س) = $س^{٢}$ − ٣ فإن : (د ∘ ر) (٢) = ...

(أ) ٦ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) −٤

السؤال الثانى **٤ درجات**

يتكاثر النحل فى إحدى الخلايا فيزداد بمعدل ٢٥ ٪ كل أسبوع فإذا كان عدد النحل ٦٠ نحلة اكتب دالة أسية تمثل عدد النحل بعد ن أسبوع ثم قدر عدد النحل بعد ٦ أسابيع.

الدرجة الكلية

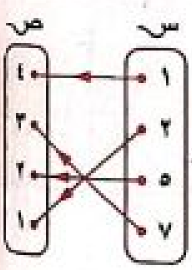
——
١٠

اختبار 9 حتى درس 3 من الوحدة الثانية

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول **٦ درجات** كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :



① الشكل المقابل يمثل دالة

د : س ⟵ ص

فإن : $د^{-١}$ (٤) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) ٧

② إذا كانت : $3^{د(س)} = 2س - 1$ فإن : $د^{-1}(0) = $ ....

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) ٢ (د) ٥

③ منحنى ر : ر (س) = | س + ٣ | هو نفس منحنى د : د (س) = | س | بإزاحة مقدارها ٣ وحدات في اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{وس}$ (ب) $\overrightarrow{وس}$ (جـ) $\overleftarrow{وص}$ (د) $\overrightarrow{وص}$

④ مجال الدالة د : د (س) = $\frac{1}{|س| - 3}$ هو ....

(أ) {٣ ، -٣} (ب) [-٣ ، ٣]

(جـ) ح - [-٣ ، ٣] (د) ح - {-٣ ، ٣}

⑤ إذا تقاطع منحنى الدالة د مع منحنى الدالة $د^{-1}$ في نقطة $\left(أ ، \frac{4}{أ}\right)$ فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ± ٢ (جـ) ٤ (د) ± ٤

⑥ إذا كانت : د (س) = $س^2$ ، ر (س) = س - ٣ فإن مجموعة حل المعادلة :
ر (د (س)) = $ر^{-1}$ (س) في ح هي ....

(أ) {٢ ، -٣} (ب) {٣} (جـ) {٣ ، -٢} (د) {٢ ، ٣}

السؤال الثاني ٤ درجات — كل جزئية درجتان

إذا كانت د دالة بحيث د (س) = $\frac{2س + 2}{س + 1}$ فأوجد :

① مجال ومدى د ② $د^{-1}$ (س) وعين مجال ومدى $د^{-1}$

الدرجة الكلية ١٠

اختبار 10 حتى درس 4 من الوحدة الثانية

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات — كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : $لو_{س} 4 = 2$ فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ± ٢ (جـ) ٢ (د) -٢

...... هو

② مجال الدالة د : د (س) = لو$_{1 - س}$ س هو ....

(أ) س > ٠ (ب) س < ١ (جـ) ٠ < س < ١ (د) ٠ ≤ س ≤ ١

③ إذا كانت : د (س) = ٦ س فإن : د$^{-1}$ (س) = ...

(أ) ٦ س (ب) $\frac{٦}{س}$ (جـ) $\frac{س}{٦}$ (د) س − ٦

④ مجموعة حل المعادلة : |س − ٢| + ١ = ٠ فى ح هى ....

(أ) ح (ب) {−١} (جـ) ∅ (د) {٤}

⑤ إذا كانت د (س) = لو$_{م}$ (٢ س + ٤) وكانت د$^{-1}$ (٥) = ١٤ فإن : م = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

⑥ حاصل ضرب جذرى المعادلة : س^{٢} − ٣ |س| − ١٠ = ٠ يساوى ....

(أ) −٢٥ (ب) −١٥ (جـ) ١٠ (د) ٢٥

السؤال الثانى ٤ درجات — كل جزئية درجتان

حل فى ح المعادلتين الآتيتين :

① لو$_{٤}$ لو$_{٢}$ لو$_{٣}$ (س + ١) = ٠

② $\left(\frac{٣}{٢}\right)^{|س - ٢|} = ٣\frac{٣}{٨}$

الدرجة الكلية ١٠

اختبار 11 حتى درس 5 من الوحدة الثانية

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات — كل جزئية درجتان

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① المقدار $\frac{٢ \text{ لو } ٢}{\text{لو } ٤ + \text{لو } ٣}$ يكافئ ....

(أ) لو$_{٣}$ ٢ (ب) لو$_{٧}$ ٢ (جـ) لو$_{١٢}$ ٨ (د) لو$_{٧}$ ٨

② إذا كان منحنى ص = لو$_{٤}$ (١ − أ س) يمر بالنقطة $\left(\frac{١}{٤} ، -\frac{١}{٢}\right)$ فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٨

③ إذا كانت : د ($س$) = ٣ $س$ + ١ ، ر ($س$) = $س^٢$ − ٥

فإن : (ر ∘ د) (−٣) = ...

(أ) −٥ (ب) ٥ (جـ) ٥٩ (د) −٩٥

④ إذا كانت : ص = $\sqrt[٣]{س}$ لكل $س$ ≥ ٠ فإن الدالة العكسية لها ص = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ $س^٣$ (ب) $س^٣$ (جـ) $س^٣$ − ١ (د) $س^{-\frac{١}{٣}}$

⑤ إذا كان : ل ، م هما جذرا المعادلة : ٣ $س^٢$ − ١٦ $س$ + ١٢ = ٠

فإن : $لو_٢$ ل + $لو_٢$ م = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ١٢ (د) ١٦

⑥ $\frac{١}{١ + لو_ب أ + لو_ب جـ} + \frac{١}{١ + لو_{جـ} أ + لو_{جـ} ب} + \frac{١}{١ + لو_أ ب + لو_أ جـ}$ = ...

(أ) $لو_أ$ ب جـ (ب) $لو_ب$ أ جـ (جـ) $لو_{جـ}$ أ ب (د) ١

السـؤال الثانى ٤ درجات

إذا كان : لو ($س$ + ص) = $\frac{١}{٢}$ (لو $س$ + لو ص) + لو ٢

أثبت أن : $س$ = ص

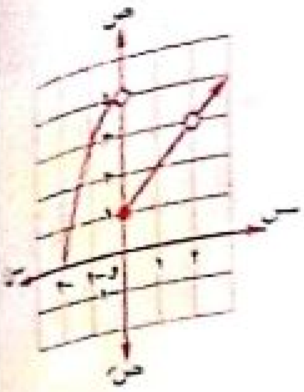
الدرجة الكلية

١٠

اختبار 1 على درس 1 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٤ درجات (كل جزئية درجة)



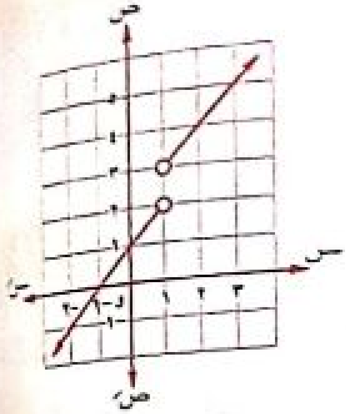
من الشكل المقابل أوجد :

① د (صفر$^{+}$) ② د (صفر$^{-}$)

③ د (٢) ④ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}$ د (س)

السؤال الثانى ٦ درجات (كل جزئية درجتان)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

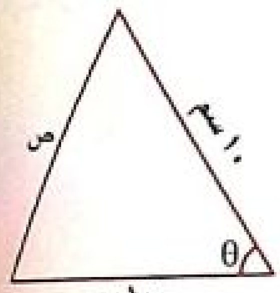


① الشكل المقابل هو التمثيل البيانى للدالة د

فإن : $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}$ د (س) = ...

(أ) ٢ (ب) ٣

(جـ) ١ (د) غير موجودة.



② فى الشكل المقابل :

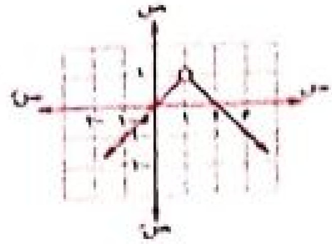
عندما θ ← $\frac{\pi}{٢}$

فإن : ص ← .... سم

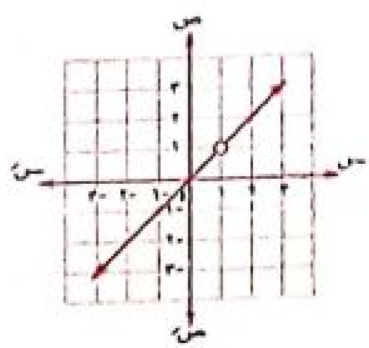
(أ) صفر (ب) ٥

(جـ) ١٠ (د) ١٠ $\sqrt{٢}$

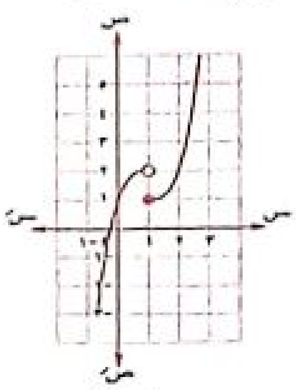
③ أى من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية ليس لها نهاية عند س = ١ ؟



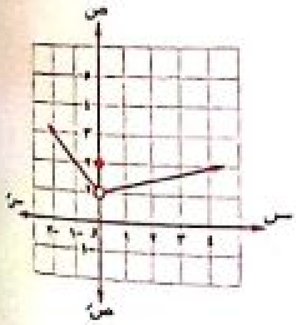
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

الدرجة الكلية
١٠

اختبار 2 حتى درس 2 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٢ درجة — كل جزئية نصف درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

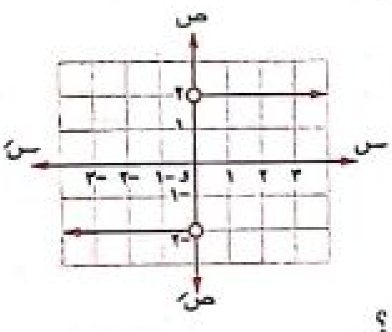
① $\lim_{س \to ٠} \frac{١ + س}{٤ س - ١} =$ ....

(أ) -١ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{-١}{٤}$ (د) ١

② $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣} =$ ....

(أ) -٦ (ب) صفر (جـ) ٣ (د) ٦

③ الشكل البيانى المقابل يمثل د (س)

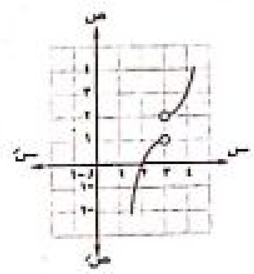


فإن : $\lim_{س \to ٢}$ د (س) = ...

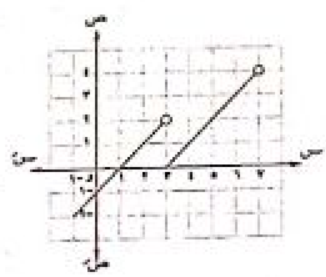
(أ) ٠ (ب) -٢

(جـ) ٢ (د) غير موجودة.

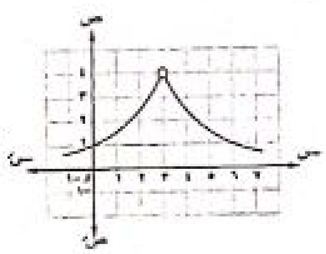
④ أى من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية لها نهاية عند س = ٣ ؟



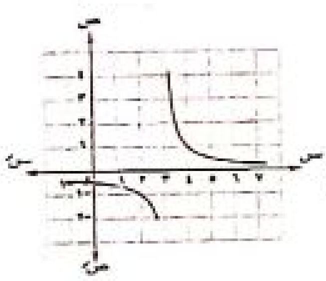
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

السؤال الثانى ٨ درجات — كل جزئية درجتان

أوجد قيمة :

① $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س + ٤} - ٢}{س^٢ + س}$

② $\lim_{س \to ١} \frac{٣ س^٢ + س - ٤}{س^٢ - ١}$

③ $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٣ - ١٥ س - ٤}{س - ٤}$

④ $\lim_{س \to ١} \left(\frac{١}{س - ١} - \frac{٢}{س^٢ - ١} \right)$

الدرجة الكلية
١٠

اختبار 3 حتى درس 3 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات (كل جزئية درجة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ١} \frac{\text{س}^٧ - ١}{\text{س} - ١} =$ ....

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٦ (د) صفر

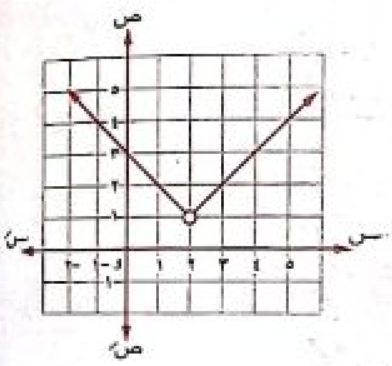
② $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow \text{أ}} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{م}} - \text{أ}^{\text{م}}} =$ ....

(أ) $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ (ب) $\frac{\text{م}}{\text{ن}} (\text{أ})^{\text{م} - \text{ن}}$ (جـ) $\frac{\text{ن}}{\text{م}} (\text{أ})^{\text{م} - \text{ن}}$ (د) $\frac{\text{ن}}{\text{م}} (\text{أ})^{\text{ن} - \text{م}}$

③ $\text{نها}_{\text{هـ} \leftarrow \cdot} \frac{(\text{س} + \text{هـ})^٥ - \text{س}^٥}{\text{هـ}} =$ ....

(أ) $\text{س}^٥$ (ب) $٥ \text{س}^٤$ (جـ) صفر (د) ١

④ في الشكل المقابل :



$\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٢} \text{د}(\text{س}) =$ ....

(أ) ١ (ب) −١

(جـ) ٢ (د) غير موجودة.

⑤ إذا كانت : ر دالة وكانت $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٢} \frac{\text{ر}(\text{س}) - ٨}{\text{س} - ٢} = ٧$ فإن :

$\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٢} \frac{٢ \text{س}^٢ - \text{ر}(\text{س})}{\text{س} - ٢} =$ ....

(أ) ١ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٥

⑥ $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ١} \frac{\text{س}^٦ - ٦٤}{\text{س} - ٢} =$ ....

(أ) $٦ (٢)^٥$ (ب) ١٢٨ (جـ) $٦٤ (٢)^٥$ (د) ٦٣

السؤال الثانى **٤ درجات** كل جزئية درجتان

أوجد قيمة :

① $\underset{س \to ٢}{نهـا} \frac{س^{٧} - ١٢٨}{س^{٢} + ٣س - ١٠}$

② $\underset{س \to -٢}{نهـا} \frac{(س + ٣)^{٥} - ١}{س + ٢}$

الدرجة الكلية

......
١٠

اختبار 4 حتى درس 4 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول **٢ درجة** كل جزئية نصف درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\underset{س \to \infty}{نهـا} \frac{س^{-٣} + ٣س^{-٢} + ١}{س^{-٢} + س^{-١} + ٣} =$ ....

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) ٣ (د) $\frac{١}{٣}$

② $\underset{س \to ٣}{نهـا} \frac{س^{٣} - ٢٧}{س^{٢} - ٩} =$ ....

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $٤\frac{١}{٢}$ (جـ) ٣ (د) ٢٧

③ إذا كانت : $\underset{س \to ٢}{نهـا} \frac{س^{٢} - ٤أ}{س - ٢}$ لها وجود فإن : أ = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

④ $\underset{س \to \infty}{نهـا} (٤ + ٣س - س^{٣}) =$ ....

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ∞ (د) $-\infty$

السؤال الثانى **٨ درجات** كل جزئية درجتان

أوجد قيمة :

① $\underset{س \to \infty}{نهـا} \frac{١}{س} \sqrt[٣]{٣ + ٤س^{٢}}$

② $\underset{س \to \infty}{نهـا} س \left(\sqrt{٤س^{٢} + ١} - ٢س\right)$

③ $\underset{س \to \infty}{نهـا} \frac{س^{٧} + ٥}{٣س^{٤} - ٨}$

④ $\underset{س \to ٤}{نهـا} \frac{(س - ٣)^{٧} - ١}{س - ٤}$

الدرجة الكلية

١٠

اختبار 5 حتى درس 5 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات (كل جزئية درجة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\lim\limits_{س \to ٠} ٢ س \text{ ظتا } ٤ س = \dots\dots\dots$

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) صفر

② $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{س^٢ + ٥}{س (٢ س^٢ + ٣)} = \dots\dots\dots$

(أ) $\frac{٥}{٨}$ (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٥}{٢}$

③ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{٢ س + \text{جا } ٣ س}{\text{ظا } ٥ س} = \dots\dots\dots$

(أ) ٥ (ب) $\frac{٦}{٥}$ (جـ) ١ (د) صفر

④ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{٥ - ٥ \text{ جتا } س}{س} = \dots\dots\dots$

(أ) ٢٥ (ب) ٥ (جـ) صفر (د) ٢

⑤ إذا كان : $أ > ب > \text{صفر}$ فإن : $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{أ^س}{ب^س} = \dots\dots\dots$

(أ) ∞ (ب) $-\infty$ (جـ) صفر (د) أ - ب

⑥ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\text{جا } س + \text{جا } ٢ س + \text{جا } ٣ س + \text{جا } ٤ س}{\text{ظا } س + \text{ظا } ٢ س + \text{ظا } ٣ س + \text{ظا } ٤ س} = \dots\dots\dots$

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٤ (د) ١٠

السؤال الثاني ٤ درجات (كل جزئية درجتان)

أوجد قيمة :

① $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{س^٢ + \text{جا}^٢ ٣ س}{س \text{ ظا } ٢ س}$

② $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س + ٤} - ٢}{س^٢ + س}$

الدرجة الكلية

١٠

اختبار 6 حتى درس 6 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : د (س) = $س^٢$ فإن : $\lim_{س \to ٢}$ د (د (س)) = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ١٦ (د) ٣٢

② $\lim_{س \to ٩} \frac{٣ - \sqrt{س}}{٢٧ - \sqrt{س^٣}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٩}$ (ب) $\frac{١}{٢٧}$ (جـ) ٣ (د) $-\frac{١}{٢٧}$

③ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{٤ جتا س + ١٥ جا س}{س} &، س > ٠ \\ \frac{س^٦ - ٦٤}{س^٣ - ٨} &، س < ٠ \end{cases}$

وكانت د لها نهاية عندما س = ٠ فإن : ٤ = ...

(أ) −٧ (ب) ٨ (جـ) −١ (د) ١

④ إذا كانت : $\lim_{س \to \infty} \frac{٤ س + ٦}{٢ س - ٧} = ٤$ فإن : ٤ = ... حيث ٤ ∈ ع

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

⑤ إذا كانت د دالة زوجية وكانت $\lim_{س \to ٢}$ د (س) = ٥ أى الجمل الآتية صحيح ؟

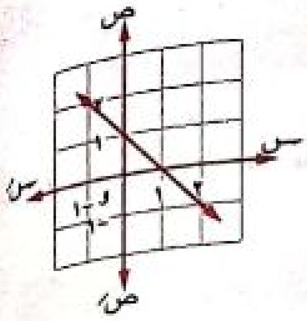
(أ) $\lim_{س \to -٢}$ د (س) = ٥

(ب) $\lim_{س \to -٢}$ د (س) = −٥

(جـ) $\lim_{س \to -٢}$ د (س) = صفر

(د) $\lim_{س \to -٢}$ د (س) = −٢

⑥ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د



فإن : $\lim_{س \to ٢}$ | د (س) | = ...

(أ) ‎-١ (ب) صفر

(جـ) ١ (د) غير موجودة.

السـؤال الثانى ٤ درجات

ابحث وجود $\lim_{س \to ٢}$ د (س) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ - ٧ س + ١٢}{س - ٣} & ، س < ٢ \\ ٢ س - ٧ & ، س > ٢ \end{cases}$

الدرجة الكلية

―――

١٠

اختبار 7 حتى درس 7 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السـؤال الأول ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① الدالة د : د (س) = ٤ $س^{-٢}$ + $\frac{س}{س^٢ - ٩}$ متصلة لكل س ∋ ....

(أ) ح (ب) ح - {٠}

(جـ) ح - {٣ ، ‎-٣} (د) ح - {٣ ، ‎-٣ ، ٠}

② إذا كانت د : د (س) = $\begin{cases} \frac{س^٨ - أ^٨}{س^٥ - أ^٥} & ، س \neq أ \\ ٢٠٠ & ، س = أ \end{cases}$

متصلة عند س = أ فإن : أ = ...

(أ) ٥ (ب) $\frac{٨}{٥}$ (جـ) ١٢٥ (د) $\frac{١}{٥}$

③ الدالة د : د (س) = $\frac{\text{س} + ٢}{\sqrt{\text{س} - ٢}}$ متصلة لكل س ∈ ....

(أ)]٤ ، ∞[　　(ب)]٠ ، ∞[　　(ج)]٠ ، ∞[− {٤}　　(د)]−∞ ، ٢[

④ إذا كانت د : د (س) = $\begin{cases} \frac{|\text{س}|}{\text{س}} + ٦ &، \text{س} < ٠ \\ \text{أ}^٢ + \text{جتا } ٢\text{س} &، \text{س} \geq ٠ \end{cases}$ متصلة عند س = ٠

فإن : أ = ...

(أ) ٢　　(ب) ± $\sqrt{٦}$　　(ج) ± ٢　　(د) ± $\sqrt{٥}$

⑤ إذا كانت د دالة أحادية كثيرة حدود وكانت $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ د (س) = ٣

فإن : $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ د$^{-١}$ (س) = ...

(أ) −٢　　(ب) −٣　　(ج) ٢　　(د) ٣

⑥ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}$ $\frac{\text{س جا } ٢\text{س} + \text{جا } ٢\text{س}^٢}{\text{طا}^٢ \, ٢\text{س} + \text{س}^٢}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$　　(ب) ٢　　(ج) صفر　　(د) $\frac{١١}{١٠}$

السؤال الثاني　٤ درجات

ابحث اتصال الدالة د حيث د (س) = $\begin{cases} \text{س}^٢ + ٣ &، \text{س} \geq ١ \\ \frac{\text{س}^٢ + ٢\text{س} - ٣}{\text{س} - ١} &، \text{س} < ١ \end{cases}$

عند س = ١

الدرجة الكلية

١٠

اختبار 1 على درس 1 من الوحدة الرابعة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات — كل جزئية درجة ونصف

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① فى Δ أ ب حـ إذا كان : أَ = ٦ سم ، ق(∠ب) = ٢ ق(∠أ) = ٨٠°

فإن : حَ = ... سم.

(أ) $\frac{٦ \text{ جا } ٤٠°}{\text{جا } ٦٠°}$ (ب) $\frac{\text{جا } ٦٠°}{٦ \text{ جا } ٤٠°}$ (جـ) $\frac{\text{جا } ٤٠°}{٦ \text{ جا } ٦٠°}$ (د) $\frac{٦ \text{ جا } ٦٠°}{\text{جا } ٤٠°}$

② إذا كان : أ ب حـ مثلثًا متساوى الأضلاع طول ضلعه يساوى $٨\sqrt{٣}$ سم فإن طول قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث يساوى .... سم.

(أ) ٨ (ب) $١٦\sqrt{٣}$ (جـ) ١٦ (د) $٤\sqrt{٣}$

③ فى المثلث س ص ع إذا كان : $\frac{٢ \text{ سَ}}{\text{جا س}}$ = ٨ سم

فإن مساحة الدائرة المارة برؤوسه تساوى .... سم².

(أ) ١٦ π (ب) ٨ π (جـ) ٤ π (د) ٦٤ π

④ إذا كان : أ ب حـ مثلثًا فإن : $\frac{\text{جا}(أ + ب)}{\text{جا أ} + \text{جا ب}}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{\text{حَ}}{\text{أَ} + \text{بَ}}$ (جـ) $\frac{\text{أَ}}{\text{أَ} + \text{حَ}}$ (د) $\frac{\text{بَ}}{\text{أَ} + \text{حَ}}$

السؤال الثانى ٤ درجات

أ ب حـ مثلث فيه : حَ = ١٩ سم ، ق(∠أ) = ١١٢° ، ق(∠ب) = ٣٢°

أوجد لأقرب رقمين عشريين كلًا من : بَ ، طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث.

الدرجة الكلية

١٠

اختبار 2 حتى درس 2 من الوحدة الرابعة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات (كل جزئية درجة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① فى المثلث س ص ع إذا كان : $\frac{\text{حا س}}{٣} = \frac{\text{حا ص}}{٤} = \frac{\text{حا ع}}{٥}$

فإن قياس أكبر زاوية فى المثلث يساوى ....

(أ) ٦٠° (ب) ٧٥° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

② فى Δ ا ب حـ يكون $\frac{أ}{أ + ب}$ = ...

(أ) $\frac{\text{حا ا}}{\text{حا ب}}$ (ب) $\frac{\text{حا ا}}{\text{حا حـ}}$ (جـ) $\frac{\text{حا ا}}{\text{حا ا} + \text{حا ب}}$ (د) $\frac{\text{حا ا}}{\text{حا ا} + \text{حا حـ}}$

③ طول قطر الدائرة الخارجة للمثلث ا ب حـ الذى فيه : أ = ٨ حا ا سم يساوى .... سم.

(أ) ٤ (ب) ٨ حا ا (جـ) ٨ (د) ٥

④ المثلث س ص ع فيه : س = ص ، $\frac{ع^٢ - ٢ س^٢}{س^٢} = ١$ فإن : ق (∠ ع) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

⑤ إذا كان : ا ب حـ مثلثًا مساحته ٢٤ سم^٢ وكان طول نصف قطر الدائرة الخارجة عنه ٥ سم

فإن : حا ا حا ب حا (ا + ب) = ...

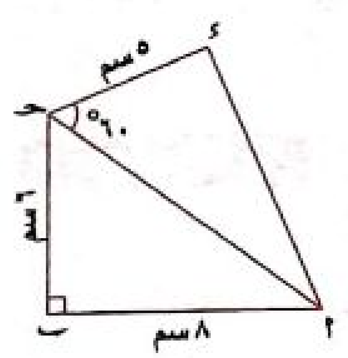
(أ) $\frac{٣}{٢٥}$ (ب) $\frac{٦}{٢٥}$ (جـ) $\frac{٩}{٢٥}$ (د) $\frac{١٢}{٢٥}$

⑥ فى Δ ا ب حـ إذا كان : ق (∠ ا) = ٦٠°

فإن : $\left(١ + \frac{أ}{حـ} + \frac{ب}{حـ}\right)\left(١ + \frac{حـ}{ب} - \frac{أ}{ب}\right)$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

السؤال الثانى ٤ درجات



فى الشكل المقابل :

ا ب حـ ء شكل رباعى فيه : ا ب = ٨ سم ، ب حـ = ٦ سم

، ق (∠ ب) = ٩٠° ، ء حـ = ٥ سم ، ق (∠ ا حـ ء) = ٦٠°

أوجد مساحة الدائرة المارة برؤوس Δ ا ء حـ

الدرجة الكلية

١٠

اختبار 3 حتى درس 3 من الوحدة الرابعة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات

كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① عدد حلول المثلث أ ب جـ الذى فيه : ق(∠أ) = ٦٠° ، أ = ٧ سم ، جـ = ٩ سم هو ....

(أ) واحد. (ب) اثنان. (جـ) صفر. (د) ثلاثة.

② إذا كان نق هو طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب جـ

فإن : $\frac{أ}{٢ \text{ جا } أ}$ = ...

(أ) نق (ب) ٢ نق (جـ) $\frac{١}{٢}$ نق (د) نق²

③ فى المثلث أ ب جـ إذا كان : أ = جـ فإن : جتا جـ = ...

(أ) $\frac{٢ب}{جـ}$ (ب) $\frac{جـ}{٢ب}$ (جـ) $\frac{ب}{٢أ}$ (د) $\frac{جـ}{٢أ}$

④ قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه ٦ سم ، ١٠ سم ، ١٤ سم يساوى ....

(أ) ١٢٠° (ب) ١٥٠° (جـ) ١٣٥° (د) ٦٠°

⑤ إذا كانت مساحة المثلث أ ب جـ = ١٢ سم² فإن : (ب² + جـ² − أ²) طا أ = ...

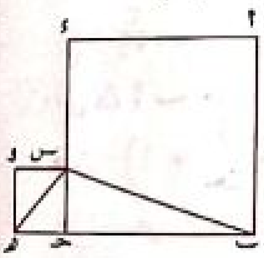
(أ) ١٢ (ب) ٢٤ (جـ) ٤٨ (د) ٩٦

⑥ فى الشكل المقابل :

أ ب جـ د ، س جـ هـ و مربعان

إذا كان : ب جـ = ٣ جـ هـ

فإن : جا(∠ب س هـ) = ...

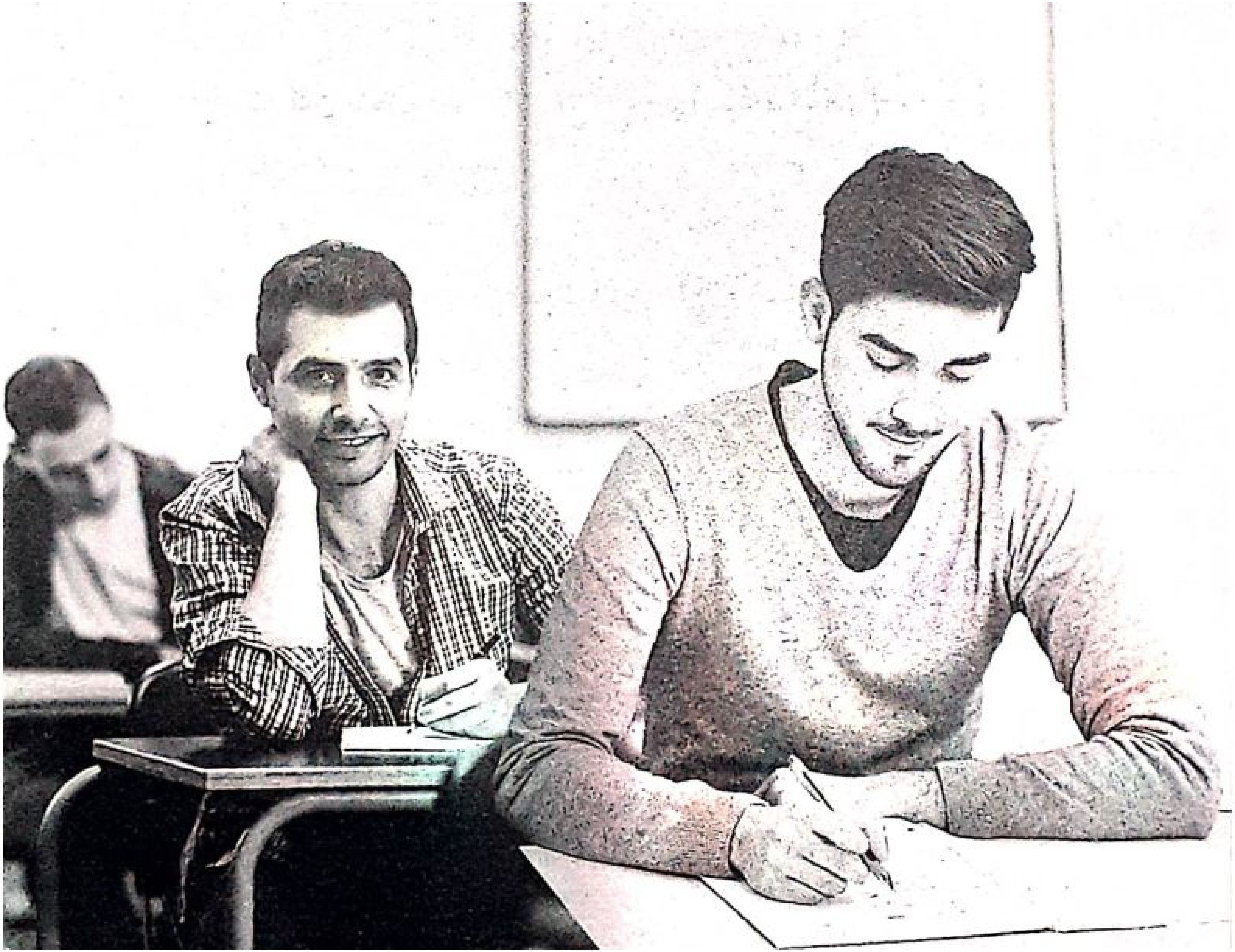


(أ) $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ (ب) $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ (جـ) $\frac{-١}{\sqrt{٥}}$ (د) $\frac{-٢}{\sqrt{٥}}$

السؤال الثانى ٤ درجات

فى المثلث أ ب جـ إذا كان : ق(∠أ) = ٤٠° ، أ = ٢٤ سم ، ب = ٣٠ سم

كم مثلثًا يحقق ذلك ؟ أوجد جـ إذا كان ممكنًا فى كل حالة.



الاختبار الأول

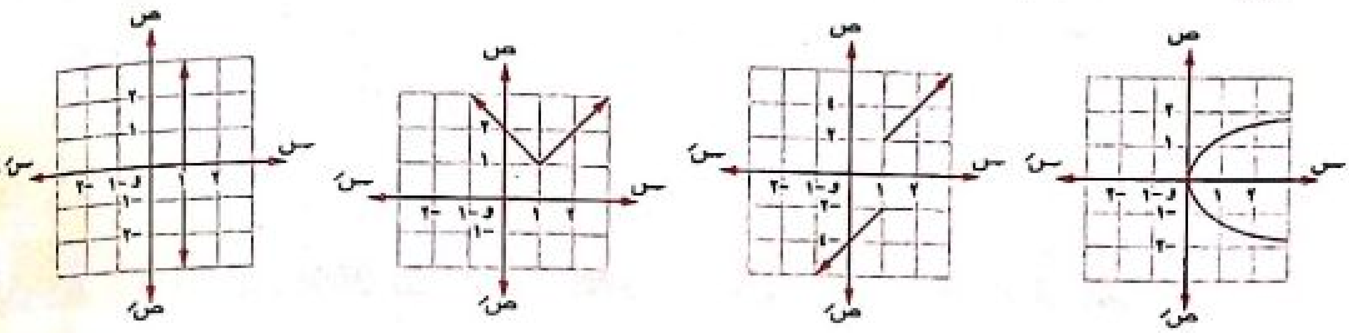
أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : $٥^{س} = ٢$ فإن : $٢٥^{س} =$ ....

(أ) ١٠ (ب) ٦ (جـ) ٥ (د) ٤

② الشكل الذى يمثل دالة فى س من بين الأشكال الآتية هو ....



(أ) (ب) (جـ) (د)

③ إذا كان منحنى $ص = لو_{٤} (١ - أ س)$ يمر بالنقطة $\left(\frac{١}{٤} ، -\frac{١}{٢}\right)$

فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٨

④ الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) $د_{١} (س) = س + ٢$ (ب) $د_{٢} (س) = س^{٢}$

(جـ) $د_{٣} (س) = |س|$ (د) $د_{٤} (س) = ٥$

---

٢ (أ) عين مجال كل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين :

① $د (س) = \frac{س}{\sqrt{١ - س}}$ ② $ر (س) = \frac{س - ١}{س^{٢} - ١} + \frac{١}{س + ١}$

(ب) إذا كانت د دالة حيث $د (س) = \begin{cases} س^{٢} & ، س > ٠ \\ -٢ س & ، س < ٠ \end{cases}$

فارسم الشكل البيانى للدالة ومن الرسم أوجد مدى هذه الدالة.

٣ **(أ)** إذا كانت $د_١$: ح ← ح حيث $د_١$ (س) = ٢ س − ١

، $د_٢$: [−٢ ، ٣] ← ح حيث $د_٢$ (س) = ٣ − ٢ س

فارسم الدالة ($د_١$ + $د_٢$) محددًا مجالها ثم ابحث اطراد الدالة.

(ب) أوجد الدالة العكسية للدالة : ص = س + ١ ومثلهما فى شكل واحد.

---

٤ **(أ)** أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين :

① $لو_٤$ س = ١ − $لو_٤$ (س − ٣) ② |س + ٢| = |س − ٣|

(ب) استخدم منحنى الدالة د حيث د (س) = $س^٢$ فى رسم كل من :

① $د_١$ (س) = د (س + ٢) ② $د_٢$ (س) = $س^٢$ + ٣

---

٥ **(أ)** أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة : |٢ س − ٢| ≤ ٧

(ب) أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة : $س^{\frac{٤}{٣}}$ − ١٠ $س^{\frac{٢}{٣}}$ + ٩ = صفر

الاختبار الثانى

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : $٣^{س − ٢}$ = $٢^{س − ٢}$ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) −٢ (جـ) صفر (د) ٢

② إذا كانت : ص = $\sqrt[٣]{س}$ لكل س ≤ ٠ فإن الدالة العكسية لها هى ص = ...

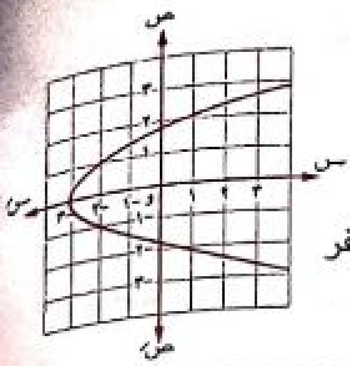
(أ) $\frac{١}{٣}$ $س^٣$ (ب) $س^٣$ (جـ) $س^٣$ − ١ (د) $س^{-\frac{١}{٣}}$

③ إذا كانت : د دالة فردية على [− س ، س]

فإن : د (− س) + د (س) = ...

(أ) ٢ س (ب) غير معرفة. (جـ) −٢ س (د) صفر

④ المنحنى الموضح بالشكل المقابل متماثل حول المستقيم الذى معادلته ....



(أ) س = صفر　　(ب) ص = صفر

(جـ) ص = −٢　　(د) س = ٢

٢ (أ) إذا كانت : د (س) = أ^س فأثبت أن المقدار : $\frac{١}{د(س) + ١} + \frac{١}{د(-س) + ١}$ له قيمة ثابتة مهما كانت قيمة س

(ب) اختصر لأبسط صورة : $لو_{ب}\ أ^{٢} \times لو_{جـ}\ ب^{٢} \times لو_{أ}\ جـ$

٣ (أ) استخدم منحنى الدالة د حيث د (س) = |س| لتمثيل كل مما يأتى :

① $د_{١}$ (س) = |س| + ١　　② $د_{٢}$ (س) = ٢ − |س|

(ب) ارسم منحنى كلٍّ من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين وحدد مداها ثم ابحث اطرادها :

① د (س) = $\sqrt{س^{٢} - ٤س + ٤}$

② د (س) = |$س^{٢}$ − ٤ س + ١| حيث س ∈ [٠ ، ٤]

٤ (أ) ابحث نوع كلٍّ من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

① $د_{١}$ (س) = س جتا س

② $د_{٢}$ (س) = { $س^{٢}$ ، س ≥ ٠ ؛ |س| ، س < ٠ }

③ $د_{٣}$ (س) = $س^{٢}$ |س| − ١

(ب) أوجد فى ح مجموعة الحل لكل مما يأتى :

① |س| + س = ٠　　② |٢ س − ٣| − |٦ − ٤ س| > ٠

٥ (أ) إذا كانت : د (س) = $س^{٢}$ − ١ ، ر (س) = س + ١ فارسم منحنى الدالة $\frac{د}{ر}$ (س) مبيناً مجال ومدى الدالة ثم ابحث اطرادها.

(ب) بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة : لو ٢٥ + $\frac{لو ٨ \times لو ١٦}{لو ٦٤}$

الاختبار الأول

أجب عن الأسئلة الآتية :

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(1) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س}^{3} + 5}{\text{س}(2\text{س}^{2} + 3)} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) $\frac{5}{8}$ (ب) 1 (ج) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{5}{2}$

(2) في Δ أ ب جـ إذا كان : 4 جا أ = 3 جا ب = 6 جا جـ فإن : ق(∠جـ) ≃ ....

(أ) 89° (ب) 29° (ج) 57° (د) 82°

(3) إذا كانت د : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{س}^{2} - 1}{\text{س} - 1} & ، \text{س} \neq 1 \\ 2\text{أ} & ، \text{س} = 1 \end{cases}$ متصلة عند س = 1

فإن : أ = ...

(أ) صفر (ب) -2 (ج) 2 (د) 1

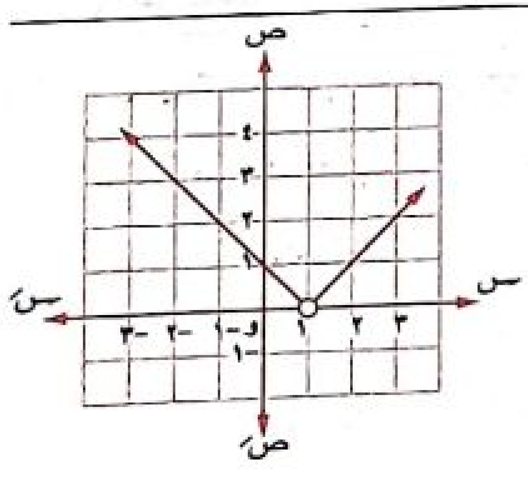
(4) في Δ س ص ع يكون : $\frac{\text{س}^{2} + \text{ص}^{2} - \text{ع}^{2}}{2\,\text{س}\,\text{ص}} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) جتا س (ب) جتا ص (ج) جتا ع (د) جا ع

2 (أ) أوجد : (1) $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س}^{5} - 32}{\text{س}^{2} + 3\text{س} - 10}$ (2) $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا}\,2\text{س} + 5\,\text{جا}\,3\text{س}}{\text{س}}$

(ب) حل المثلث أ ب جـ الحاد الزوايا الذي فيه : أ = 21 سم ، ب = 25 سم وطول قطر الدائرة المارة برؤوسه 28 سم.

3 (أ) من الرسم البياني المقابل أوجد :



(1) $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \text{د}(\text{س})$

(2) $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \text{د}(\text{س})$

(3) د(1)

(ب) أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : ق (∠ أ) = ٥٠° ، ق (∠ ء ب حـ) = ٧٠°
، ب ء = ٨ سم أوجد محيط متوازى الأضلاع.

٤ (أ) أ ب حـ مثلث فيه : أ = ٥ سم ، بَ = ٧ سم ، ق (∠ أ) = ٤٠°

أوجد : ق (∠ ب)

(ب) أوجد قيمة أ التى تجعل الدالة د متصلة عند س = ٢ حيث :

$$د(س) = \begin{cases} س^2 - 1 & ، س \geq 2 \\ س - 2أ & ، س < 2 \end{cases}$$

٥ (أ) ابحث وجود نهاية للدالة د حيث :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{طا ٢س}{حا س} & \text{عندما } س < ٠ \\ \frac{٥س + ٦}{س + ٣} & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$$ عندما س ← ٠ .

(ب) أوجد : $\lim_{س \to 1} \frac{4 - \sqrt{س + 15}}{1 - س^2}$

الاختبار الثانى

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\lim_{س \to 3} \frac{س - 3}{س^2 - 9} = ...$

(أ) ٣ (ب) $\frac{1}{9}$ (جـ) $\frac{1}{3}$ (د) $\frac{1}{6}$

② فى Δ أ ب حـ يكون : حتا (أ + ب) = ...

(أ) $\frac{أ^2 + ب^2 - حـ^2}{2 أ ب}$ (ب) $\frac{أ^2 + حـ^2 - ب^2}{2 أ ب}$

(جـ) $\frac{ب^2 + حـ^2 - أ^2}{2 ب حـ}$ (د) $\frac{حـ^2 - أ^2 - ب^2}{2 أ ب}$

③ أ ب ح مثلث فيه : $\frac{\text{جا أ}}{3} = \frac{2 \text{ جا ب}}{5} = \frac{\text{جا ح}}{4}$ فإن : أ : ب : ح = ...

(أ) ٦ : ٥ : ٨ (ب) ٨ : ٥ : ٦ (جـ) ٧ : ٢ : ٤ (د) ٣ : ٥ : ٦

④ $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt{\text{س}^2 + 3}}{2\text{س} + 1} =$ ....

(أ) ١ (ب) $\frac{3}{2}$ (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) ٣

(أ) إذا كانت الدالة د حيث د (س) = $\begin{cases} \frac{\text{س}^2 + 2\text{س} - 3}{\text{س} + 3} & \text{، س} \neq -3 \\ \text{س} + \text{أ} & \text{، س} = -3 \end{cases}$

متصلة عند س = −٣ فأوجد : قيمة أ

(ب) أ ب ح مثلث فيه : $\frac{1}{2}$ جا أ = $\frac{1}{4}$ جا ب = $\frac{1}{5}$ جا ح

أوجد : ق (∠ ح) وإذا كان محيط المثلث = ٢٤ سم أوجد مساحته.

(أ) أوجد : $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{1 - \text{جتا س} + \text{جا } 2\text{س}}{1 - \text{جتا س} + \text{ظا } 2\text{س}}$

(ب) حل المثلث أ ب ح الذى فيه : أ = ٩ سم ، ب = ١٥ سم ، ق (∠ ح) = ١٠٦°

(أ) أوجد : $\lim_{\text{س} \to -2} \frac{(\text{س} + 3)^5 - 1}{\text{س}^2 - 4}$

(ب) أ ب ح ء شكل رباعى فيه : أ ب = ٢٧ سم ، ب ح = ١٢ سم ، ح ء = ٨ سم

، ء أ = ١٢ سم ، أ ح = ١٨ سم أثبت أن : $\overleftarrow{\text{أ ح}}$ ينصف ∠ ب أ ء

ثم أوجد مساحة الشكل أ ب ح ء

(أ) أوجد قيمة :

① $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\sqrt{\text{س} + 4} - 2}{\text{س}^2 + \text{س}}$ ② $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{1}{\text{س}} \sqrt{3 + 4\text{س}^2}$

(ب) شكل خماسى منتظم محيطه ٣٠ سم. أوجد مساحة سطحه.

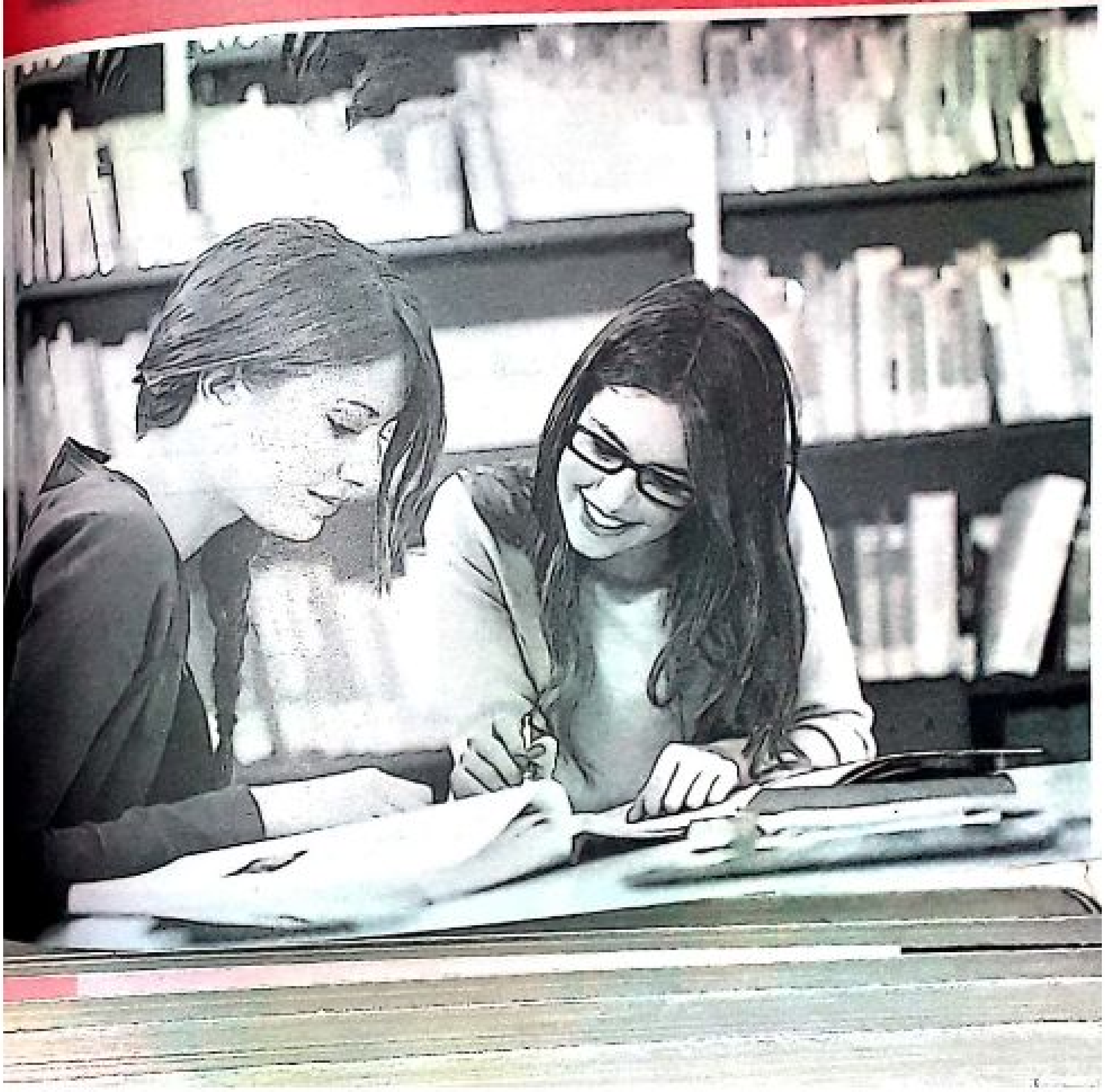
الامتحانات النهائية

أولًا : امتحانات بعض مدارس المحافظات.

ثانيًا : نماذج الامتحانات النهائية.



يمكنك حل الامتحانات التفاعلية من خلال مسح QR code الخاص بكل امتحان



أولا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① مجال الدالة د : د (س) = $\frac{س}{\sqrt[3]{س} - ٢}$ هو ....

(أ) ع (ب) ع − {٢} (جـ) ع − {٠ ، ٢} (د) ع − {٨}

② نهــا (س ← ∞) $\left(\frac{٥}{س} + ٢\right)$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ١٠ (د) ٧

③ إذا كان : أ ب حـ مثلث محيطه ٢٤ سم وكان حا أ + حا ب = ٣ حا حـ

فإن : حـَ = ...

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ٦ (د) ١٢

④ إذا كانت : ص = $\sqrt[3]{س}$ لكل س ≤ ٠ فإن الدالة العكسية لها هى ص = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ س^{٣} (ب) س^{٣} (جـ) س^{٣} − ١ (د) س$^{\frac{١}{٣}}$

⑤ نهــا (س ← ٠) $\frac{ظا^{٢} ٢ س}{٣ س^{٢}}$ = ...

(أ) $\frac{٢}{٩}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{٤}{٩}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

⑥ فى Δ أ ب حـ إذا كان : حاب = $\frac{حـَ}{٢ أ}$ فإن : Δ أ ب حـ فيه ....

(أ) حـَ = أَ (ب) حـَ = بَ (جـ) أَ = بَ (د) أَ = ٢ بَ

⑦ مجموعة حل المتباينة : $\sqrt{س^{٢} - ٢ س + ١}$ ≤ ٤ هى ....

(أ) [−٣ ، ٥] (ب) ع − [−٣ ، ٥[

(جـ)]−٣ ، ٥[(د) ع − [−٣ ، ٥]

⑧ مجموعة حل المعادلة | ٥ س − ١ | + ٤ = ١ في ح هي ....

(أ) {$\frac{-٤}{٥}$}   (ب) {$\frac{-٤}{٥}$ ، $\frac{٦}{٥}$}   (جـ) ∅   (د) {$\frac{٦}{٥}$}

⑨ إذا كانت : نهـــا$_{س ← ١}$ $\frac{س^{٢} - ك}{س + ٢}$ = −١   فإن : ك = ...

(أ) ٤   (ب) −٢   (جـ) ٢   (د) ± ٢

⑩ Δ ل م ن الذي فيه : ق (∠ ل) = ٣٠° ، مَ = ٩ سم يكون له حلان عندما

لَ = ... سم. (من القيم التالية)

(أ) ٢   (ب) ٦   (جـ) ١٠   (د) ١١

⑪ لو$_{٢}$ (٤ + لو$_{٢}$ س) = ٢   فإن : س = ...

(أ) ١٦   (ب) ٣٢   (جـ) ٦٤   (د) ١٢٨

⑫ نهـــا$_{س ← ٥}$ $\frac{(س - ٣)^{٧} - ١٢٨}{س - ٥}$ = ...

(أ) ٧   (ب) ٢٨   (جـ) ٦٤   (د) ٤٤٨

⑬ في Δ أ ب حـ إذا كان : ٤ جا أ = ٣ جا ب = ٦ جا حـ

فإن : ق (∠ حـ) = ... (لأقرب درجة).

(أ) ٨٩°   (ب) ٢٩°   (جـ) ٥٧°   (د) ٨٢°

⑭ نوع الدالة د : د (س) = س^{٢} طا س ....

(أ) فردية.   (ب) زوجية.

(جـ) لا زوجية ولا فردية.   (د) أحادية.

⑮ نقطة رأس منحنى الدالة د : حيث د (س) = (١ + س)^{٢} − ٣ هي ....

(أ) (١ ، ٣)   (ب) (−١ ، −٣)   (جـ) (−١ ، ٣)   (د) (١ ، −٣)

⑯ نهـــا$_{س ← ∞}$ $\frac{\sqrt{٩ س^{٢} + ٤} + ٥ س}{٤ س + ٣}$ = ...

(أ) ∞   (ب) ٢   (جـ) −١   (د) ١

(١٧) إذا كانت : د (س) = ٣ س + ١ ، ر (س) = $س^٢$ − ٥

فإن : (ر ○ د) (−٣) = ...

(أ) ٥٩ (ب) −٩٥ (جـ) ٥ (د) −٥

(١٨) فى Δ أ ب حـ يكون $أ^٢ + ب^٢ − حـ^٢$ = ...

(أ) حتا أ (ب) حتا حـ (جـ) ٢ أ ب حتا حـ (د) أ ب حتا حـ

(١٩) إذا كانت د دالة زوجية وكان منحنى الدالة يمر بالنقطة (−٣ ، ٢ م + ١)

وكانت د (٣) = ٥ فإن م = ...

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٢

(٢٠) أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع ، طول ضلعه ٥ $\sqrt{٣}$ سم فإن طول قطر الدائرة المارة

برؤوسة يساوى .... سم.

(أ) ١٠ (ب) ١٠ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٥ (د) ٥ $\sqrt{٣}$

(٢١) منحنى ر (س) = | س + ٣ | هو نفس منحنى د (س) = | س |

بإزاحة مقدارها ٣ وحدات فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{و س}$ (ب) $\overrightarrow{و س}$ (جـ) $\overleftarrow{و ص}$ (د) $\overrightarrow{و ص}$

(٢٢) مجموعة حل المعادلة : $٣^{س + ١} + ٣^{س} = ٣٦$ فى ح هى ....

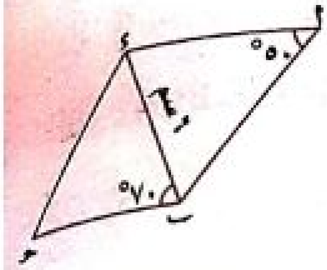
(أ) {٠} (ب) {١} (جـ) {٢} (د) {٠ ، ٢}

(٢٣) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} ٣ س − ١ & ، س \neq ٢ \\ ٦ & ، س = ٢ \end{cases}$ فإن $\lim_{س \to ٢}$ (س) = ...

(أ) −٥ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ليس لها وجود.

(٢٤) نقطة تماثل منحنى الدالة د : د (س) = $\frac{س + ١}{س}$ هى ....

(أ) (٠ ، ١) (ب) (١ ، ٠) (جـ) (٠ ، ٠) (د) (١ ، −١)



(٢٥) في الشكل المقابل :

أ ب جـ ء متوازي أضلاع ، ق (∠ أ) = ٥٠°

، ق (∠ ء ب جـ) = ٧٠° ، ء ب = ٦ سم

فإن محيطه ≃ .... سم.

(أ) ٣٨ (ب) ١٩ (جـ) ٢٨ (د) ٨٦

(٢٦) مدى الدالة د (س) = |س − ٢| هو ....

(أ) [٠ ، ∞[(ب)]٢ ، ∞[(جـ) [٢ ، ∞[(د)]٠ ، ∞[

(٢٧) Δ س ص ع فيه : سَ = ٥ سم ، صَ = ٣ سم ، ق (∠ ع) = $\frac{٢}{٣}$ π

فإن : عَ = ...

(أ) ٨ (ب) ٩ (جـ) ٤ (د) ٧

(٢٨) إذا كان : د (س) = ٢^س + ٢^ فإن : د (−٢) = ...

(أ) ٢ (ب) −١ (جـ) ٠ (د) ٣

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ أوجد : نهـــا (س ← ٥) $\frac{\sqrt{س - ١} - ٢}{س - ٥}$

---

٢ بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة : لو ٢٥ + $\frac{لو ٨ \times لو ١٦}{لو ٦٤}$

---

٣ إذا كانت الدالة د متصلة عند س = ٣ حيث :

د (س) =
- ٣ س^٢ + أ س − ٢ عند س < ٣
- ١٦ عند س = ٣
- ٢ س + ب عند س > ٣

فأوجد : أ + ب

---

٤ ارسم الشكل البياني للدالة د : د (س) =
- س^٢ + ١ ، س > ٠
- −س^٢ − ١ ، س < ٠

ومن الرسم حدد مدى الدالة وابحث اطرادها.

٢ محافظة الجيزة

إدارة الدقي
مدرسة الأورمان الثانوية بنين

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① نقطة تماثل الدالة د : د (س) = $(س - ٢)^٢ + ١$ هي ....

(أ) (٢ ، ١)　(ب) (٢ ، −١)　(جـ) (−٢ ، ١)　(د) (−١ ، −٢)

② $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{س^٢ - ٩}$ = ...

(أ) ٣　(ب) $\frac{١}{٣}$　(جـ) ٦　(د) $\frac{١}{٦}$

③ مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{س - ٣}$ ....

(أ) ح　(ب) ح − {٣}　(جـ) [٣ ، ∞[　(د)]−∞ ، ٣]

④ في المثلث س ص ع إذا كان $\frac{٥ سَ}{جا س}$ = ٢٠ سم فإن مساحة الدائرة المارة برؤوس المثلث تساوي .... $سم^٢$

(أ) ٦٤ π　(ب) ١٦ π　(جـ) ٨ π　(د) ٤ π

⑤ الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هي ....

(أ) د (س) = $س^٢$　(ب) د (س) = −٢

(جـ) د (س) = |س|　(د) د (س) = $\frac{١}{س}$

⑥ إذا كانت : $\lim\limits_{س \to ∞} \frac{أ س^٢ + ٦}{٢ س^٢ + ٩}$ = ٤　فإن : أ = ...

(أ) ٢　(ب) ٤　(جـ) ٦　(د) ٨

⑦ مدى الدالة د : د (س) = $\frac{٣ س^٢ - ٣}{س^٢ - ١}$ هو ....

(أ) ح − {−١ ، ١}　(ب) ح − {−٣ ، ٣}

(جـ) {−٣ ، ٣}　(د) {٣}

⑧ إذا كان : س ص ع مثلث فيه سَ = ٥ سم ، صَ = ٣ سم ، ق (ع) = $\frac{٢}{٣}$ π

فإن : عَ = ... سم.

(أ) ٤　(ب) ٧　(جـ) ٨　(د) ٩

⑨ منحنى الدالة ر (س) = س^{2} + ٢ هو نفس منحنى الدالة د (س) = س^{2}

بإزاحة مقدارها وحدتين فى اتجاه ....

(أ) و س ←　　(ب) و س →　　(جـ) و ص ←　　(د) و ص →

⑩ مجموعة حل المعادلة : |س - ٣| + ١ = صفر فى ح هى ....

(أ) ح　　(ب) {-١}　　(جـ) {٤}　　(د) ∅

⑪ إذا كانت د : د (س) = { (س^{8} - أ^{8})/(س^{5} - أ^{5}) ، س ≠ أ ؛ ٢٠٠ ، س = أ }

متصلة عند س = أ　　فإن : أ = ...

(أ) ٥　　(ب) ١٢٥　　(جـ) $\frac{1}{5}$　　(د) $\frac{8}{5}$

⑫ مثلث أ ب جـ فيه : ق (∠ أ) : ق (∠ ب) : ق (∠ جـ) = ٢ : ٣ : ٤ ، أ ب = ١٢ سم

فإن : أ جـ = ... سم.

(أ) ١١　　(ب) ١٢　　(جـ) ١٦　　(د) ١٨

⑬ إذا كان : ٥^{س} = ٢　　فإن : ٢٥^{س} = ...

(أ) ١٠　　(ب) ٦　　(جـ) ٤　　(د) ٥

⑭ إذا كانت د : د (س) = { ٣ س - ١ ، س ≠ ٢ ؛ ٦ ، س = ٢ }

فإن : نهـا (س ← ٢) د (س) = ...

(أ) ٥　　(ب) ٦　　(جـ) -٥　　(د) ليس لها وجود.

⑮ إذا كانت د دالة فردية فإن $\frac{٧ د (٣) + ٣ د (-٣)}{٢ د (-٣)}$ = ...

(أ) ٢　　(ب) -٢　　(جـ) ٥　　(د) -٠,٥

⑯ إذا كان طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ يساوى ٣ سم

وكان جا أ + جا ب + جا جـ = ٢ فإن محيط المثلث = ... سم.

(أ) ٦　　(ب) ٩　　(جـ) ١٢　　(د) ٢٤

(١٧) إذا كانت : د (س) = $٣^{س - ٢}$ فإن مجموعة حل المعادلة د (س - ١) = ٢٧ هى ....

(أ) {٦}　　(ب) {٥}　　(جـ) {٤}　　(د) {٣}

(١٨) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا^٢ (٩ س) + ظا (٣ س^٢)}{٢ س^٢}$ = ...

(أ) ٩٠　　(ب) ٨٤　　(جـ) ٤٥　　(د) ٤٢

(١٩) إذا كانت د دالة حيث د (س) = ٥ س فإن : $د^{-١}$ (س) = ...

(أ) ٥ س　　(ب) ٥ - س　　(جـ) $\frac{س}{٥}$　　(د) $\frac{٥}{س}$

(٢٠) مجموعة حل المعادلة : $لو_٢$ س × $لو_٣$ ٢ = ٥ فى ح هى ....

(أ) {٢}　　(ب) {٥}　　(جـ) {٣٢}　　(د) {٣}

(٢١) $\lim_{س \to ٠} \frac{٥ - ٥ جتا س}{س}$ = ...

(أ) صفر　　(ب) ٢　　(جـ) ٥　　(د) ٢٥

(٢٢) مجموعة حل المتباينة $\sqrt{س^٢ - ٢ س + ١} \leq ٤$ هى ....

(أ) ح -]-٣ ، ٥[　　(ب) ح - [-٣ ، ٥]

(جـ)]-٣ ، ٥[　　(د) [-٣ ، ٥]

(٢٣) عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب جـ حيث ق (∠ أ) = ٣٠° ، أ = ٦ سم ، ب = ٩ سم هى ....

(أ) صفر　　(ب) ٢　　(جـ) ٣　　(د) ١

(٢٤) إذا كانت : د (س) = $س^٢$ + ٦ ، ر (س) = ٢ س

فإن : (د ∘ ر) (٣) = ...

(أ) ٧٥　　(ب) ٨٧　　(جـ) ٩٠　　(د) ١٠٠

(٢٥) إذا كانت : س + ص = $لو_٢$ ١٦ وكانت $لو_س$ ٤ = ٢ فإن $لو_٢$ ص = ...

(أ) صفر　　(ب) ٢　　(جـ) ٤　　(د) ١

(٢٦) إذا كان : أ ب جـ مثلث فإن : أ قتا أ + ب قتا ب = ...

(حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث)

(أ) ٢ نق　　(ب) ٤ نق　　(جـ) ٦ نق　　(د) ٨ نق

(٢٧) في المثلث س ص ع إذا كان : س َ = ص َ فإن : جا س = ...

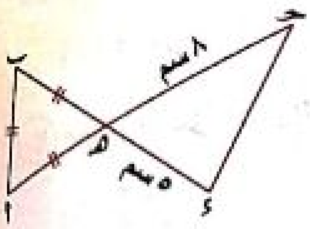
(أ) $\frac{\text{٢ ص}'^{٢}}{\text{ع}'^{٢}}$　　(ب) $\frac{\text{ص}'}{\text{٢ س}'}$　　(جـ) $\frac{\text{ع}'}{\text{٢ ص}'}$　　(د) $\frac{\text{ع}'}{\text{٤ ص}'}$

(٢٨) في الشكل المقابل :

أ ب هـ مثلث متساوي الأضلاع

، جـ هـ = ٨ سم ، ء هـ = ٥ سم

فإن جـ ء = ... سم.



(أ) ٦　　(ب) ٧　　(جـ) ٨　　(د) ٩

ثانيًا　الأسئلة المقالية

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ ارسم منحنى الدالة د : ح ← ح ، د (س) = | س | + ١ ومن الرسم أوجد المدى وابحث الاطراد وبين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك.

---

٢ إذا كانت الدالة د : د (س) =
$$\begin{cases} \text{٤ س} & \text{، س} \le -١ \\ \text{أ س + ب} & \text{، } -١ < \text{س} < ٢ \\ -\text{٢ س} & \text{، س} \ge ٢ \end{cases}$$

متصلة على ح فما قيمة كل من أ ، ب

---

٣ أوجد في ح مجموعة حل المعادلة : $٢^{\text{س}} + ٢^{٥ - \text{س}} = ١٢$

---

٤ أوجد : $\displaystyle \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جا س}}{\sqrt{\text{س} + ١} - ١}$

٣ محافظة الإسكندرية

إدارة المنتزه
مدرسة تقسيم الزهور الثانوية بنات

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① مجال الدالة د $(س) = \frac{٣}{|٢س - ١| - ٣}$ هو ....

(أ) ح - {-٣ ، ٣} (ب) ح - {-١ ، ٢}

(جـ) ح (د) ح - {-١ ، ١}

② الدالة الأحادية فى الدوال التالية هى د : د (س) = ... حيث س ∈ ح

(أ) $س^٢ + ٢$ (ب) $|س| + ٢$ (جـ) $٢^{|س|}$ (د) $س^٣ + ٢$

③ مجموعة حل المتباينة : $\sqrt{س^٢ - ٦س + ٩} > ٢$ فى ح ....

(أ) [١ ، ٥] (ب) ح - {١ ، ٥} (جـ)]١ ، ٥[(د) ح -]١ ، ٥[

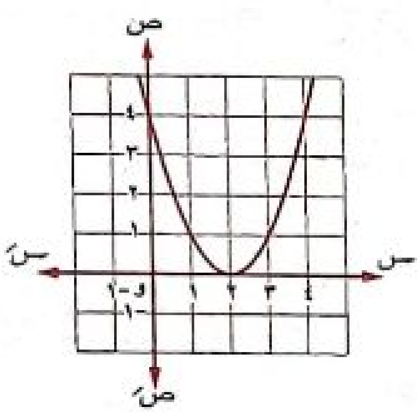
④ مدى الدالة د : د (س) = ١ - $(س + ٢)^٢$ هو .... حيث د : ح ⟵ ح

(أ)]-∞ ، ١] (ب) [١ ، ∞[(جـ) [٢ ، ∞[(د)]-∞ ، ٢]

⑤ الدالة د : د (س) = ٣ - |س| متناقصة فى .... حيث د : ح ⟵ ح

(أ)]٣ ، ∞[(ب)]٠ ، ∞[(جـ)]-∞ ، ٣[(د)]-∞ ، ٠[

⑥ فى الشكل المقابل :



يمثل الدالة د : د (س) = ...

حيث د : ح ⟵ ح

(أ) $س^٢ + ٢$

(ب) $(س + ٢)^٢$

(جـ) $س^٢ - ٤س + ٤$

(د) $-(س - ٢)^٢$

⑦ د (س) = $س^٢$ جتاس دالة .... حيث د : ح ⟵ ح

(أ) فردية (ب) ليست فردية وليست زوجية

(جـ) زوجية (د) أحادية

⑧ إذا كان : $لو_٥$ س = ٢ فإن $لو_٥$ (٥ س) + لو (٤ س) = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

⑨ إذا كان : $(٢ س - ١)^٤$ = ٨١ فإن : س ∈ ....

(أ) {١} (ب) {١ ، -٢} (جـ) {٢} (د) {-١ ، ٢}

⑩ إذا كان : $لو_س$ (٣ س - ٢) = ٢ فإن : س ∈ ....

(أ) {٢} (ب) {١} (جـ) {١ ، ٢} (د) {٣ ، ٢}

⑪ إذا كان : د (س) = $٢^س$ فإن : $\frac{د (س + ١) + د (س)}{د (س - ١)}$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٤ (د) ٨

⑫ إذا كان : $لو_٢$ $لو_٣$ (٣ س + ٥) = ١ فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

⑬ إذا كانت : د (س) = $هـ^س$ ، ر (س) = $لو_هـ$ س فإن : (د ○ ر) (٢) = ...

(أ) $هـ^٢$ + $لو_هـ$ ٢ (ب) $لو_هـ$ ٢ (جـ) $هـ^٢$ (د) ٢

⑭ إذا كان : $٣^{|س| - ٢}$ = ٢٧ فإن : س ∈ ....

(أ) {٣ ، -٣} (ب) {٥ ، -٥} (جـ) {٢ ، -٢} (د) {٢٧ ، -٢٧}

⑮ $\lim_{س \to \infty}$ $\frac{(٣ س + ٢) (٢ س - ١)}{س (٣ س + ٤)}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) -٢

⑯ $\lim_{س \to ٢}$ $\frac{س^٧ - ١٢٨}{س - ٢}$ = ...

(أ) ١٤ (ب) ٢٢٤ (جـ) ٦٩٦ (د) ٤٤٨

(١٧) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \frac{س^{٢} - ٥ س + ٦}{س^{٢} - ٩} = ...$

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٦}$ (جـ) $\frac{١}{٥}$ (د) $\frac{١}{٤}$

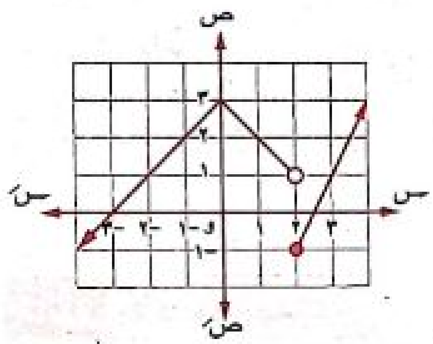
(١٨) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{(٤ س + ٥)^{٤} - ٦٢٥}{٤ س} = ...$

(أ) ٥٠٠ (ب) ١٢٥ (جـ) ٢٥٠ (د) ٦٢٥

(١٩) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{٣ س + طا ٥ س}{جا ٤ س جتا ٢ س} = ...$

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٨ (د) $\frac{١٥}{٨}$

(٢٠) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د



فإن : $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ د (س) = ...

(أ) ٣ (ب) ١

(جـ) −١ (د) ليس لها نهاية.

(٢١) إذا كانت د (س) لها نهاية عند س = ٠ فإن : أ = ...

حيث : د (س) = $\begin{cases} \frac{جا أ س}{س} & ، س > ٠ \\ جتا ٣ س + ٤ & ، س < ٠ \end{cases}$

(أ) ٧ (ب) ١٢ (جـ) ٥ (د) ٣

(٢٢) Δ أ ب حـ فيه : أ َ = ٥ سم ، ب َ = ٣ سم ، ق (∠ حـ) = ١٢٠° فإن : حـَ = ... سم.

(أ) ١٤ (ب) ١٢ (جـ) ١٠ (د) ٧

(٢٣) Δ أ ب حـ فيه : أ ب = ٦ سم ، جا حـ = $\frac{١}{٢}$ فإن طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث = ... سم.

(أ) ٦ (ب) ١٢ (جـ) ٣ (د) ٩

(٢٤) Δ ل م ن فيه : ل َ = م َ = ١٠ سم ، ق (∠ ن) = ١٢٠°

فإن مساحة سطح المثلث = ... سم^{٢}

(أ) ٢٠ $\sqrt{٣}$ (ب) ١٠٠ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٢٥ $\sqrt{٣}$ (د) ٢٤ $\sqrt{٣}$

(٢٥) في Δ أ ب ح : ٢ أ ب ما ح = أ^{٢} + ب^{٢} − ....

(أ) ح   (ب) $\frac{١}{٢}$ ح^{٢} (ج) ٢ ح^{٢} (د) ح^{٢}

(٢٦) في Δ أ ب ح إذا كان محيطه = ٢٧ سم ، ما أ : ما ب : ما ح = ٢ : ٤ : ٣

فإن : أ = ... سم.

(أ) ٦   (ب) ١٢   (ج) ٩   (د) ١٥

(٢٧) Δ أ ب ح فيه : ق (∠ أ) = ٦٠° ، ق (∠ ح) = ٣٠° ، ح = ٤ سم

فإن : ب = ... سم.

(أ) ٤ $\sqrt{٣}$ (ب) ٨   (ج) ٨ $\sqrt{٣}$ (د) ٤

(٢٨) نهـــا$_{س \leftarrow \infty}$ (س$^{-٢}$ − س$^{-١}$ + ٣) = ...

(أ) ٣   (ب) ∞   (ج) − ∞   (د) صفر

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ ارسم منحنى الدالة د (س) = س^{٢} + ١ مبينًا المجال والمدى ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك والاطراد.

---

٢ إذا كانت : د (س) = ٥^{س} أوجد مجموعة حل المعادلة :

د (٢ س + ١) + د (٢ س + ٢) = ١٥٠ في ح

---

٣ أوجد النهايات التالية :

(١) نهـــا$_{س \leftarrow ١}$ $\frac{\sqrt{٤ س + ٥} - ٣}{س - ١}$ (٢) نهـــا$_{س \leftarrow -١}$ $\frac{(٢ س + ٢)^{٢} - ١}{س + ١}$

---

٤ ابحث اتصال الدالة د عند س = ٣ حيث :

$$د (س) = \begin{cases} \frac{س^{٤} - ٨١}{س^{٢} - ٩} & ، \quad س > ٣ \\ س^{٢} + ٢ س + ٣ & ، \quad س \leq ٣ \end{cases}$$

٤ محافظة القليوبية

إدارة القناطر الخيرية
توجيه الرياضيات

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{س - ٤}$ هو ....

(أ) ح − {٤}　　(ب) ح　　(جـ)]٤ ، ∞[　　(د)]−∞ ، ٤]

② لو$_٢$ ٢ + لو$_٢$ ١٢ + لو$_٢$ $\frac{٤}{٣}$ = ...

(أ) ٨　　(ب) ٢　　(جـ) ٤　　(د) ٥

③ $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{١}{٢س قتا ٦س}$ = ...

(أ) ١٢　　(ب) $\frac{١}{١٢}$　　(جـ) ٣　　(د) $\frac{١}{٢}$

④ أ ب جـ مثلث فيه أ = ٥ سم ، طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه ٥ سم

فإن : ق (∠ أ) = ...°

(أ) ٦٠　　(ب) ٣٠　　(جـ) ٤٥　　(د) ٩٠

⑤ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

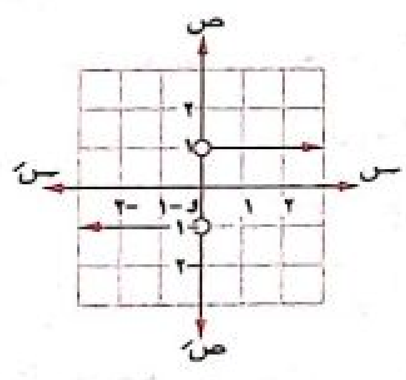
يكون مداها ....

(أ) ح − {١}

(ب) ح

(جـ) ح − {١ ، ١}

(د) {١ ، −١}



⑥ $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} \frac{س^٦ - ١}{س - ١}$ = ...

(أ) ١　　(ب) −٦　　(جـ) ٦　　(د) ٥

⑦ مساحة المثلث المتساوى الأضلاع الذى محيطه ١٢ سم يساوى .... سم^٢

(أ) ٤$\sqrt{٣}$　　(ب) ٢$\sqrt{٣}$　　(جـ) ٨$\sqrt{٣}$　　(د) ٤

⑧ إذا كان : $س^{\frac{2}{5}} = 8$ فإن : س = ...

(أ) ٣٢ (ب) −١٦ (جـ) ± ٣٢ (د) ١٦

⑨ إذا كانت : د (س) = س − ١ ، ر (س) = ١ − س

فإن : (د ∘ ر) (−١) = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ١٣ (د) −١٣

⑩ $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\frac{3}{س^2} + \frac{5}{س} + 7 \right)$ = ...

(أ) ٨ (ب) ١٥ (جـ) ٧ (د) صفر

⑪ إذا كانت د دالة فردية مجالها ح وكان د (٣) = ٥ فإن د (٣) + د (−٣) = ...

(أ) ١٠ (ب) −١٠ (جـ) ١٥ (د) صفر

⑫ إذا كان د (س) = $5^{س}$ وكان د (س − ١) + د (س + ١) = ١٣٠ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ١ (د) −٢

⑬ $\lim\limits_{س \to 7} \frac{س^2 - 49}{7 - س}$ = ...

(أ) ١٤ (ب) −٤٩ (جـ) ٤٩ (د) −١٤

⑭ أ ب جـ مثلث فيه : أ = ب = ٦ سم ، ق (∠ جـ) = ٤٩°

فإن محيطه = ... لأقرب عدد صحيح.

(أ) ١٥ (ب) ٢٢ (جـ) ١٧ (د) ٢٠

⑮ إذا كانت : د (س) = ٢ س − ٦ فإن : $د^{-1}$ (س) = ...

(أ) ٢ س + ٦ (ب) س + ٣ (جـ) ٢ س + ٣ (د) $\frac{1}{2}$ س + ٣

⑯ مجموعة حل المعادلة : | س − ٢ | − ٣ = صفر هي ....

(أ) {١ ، ٥} (ب) {١ ، −٥} (جـ) {−١ ، ٥} (د) {−١ ، −٥}

⑰ $\lim\limits_{س \to 0} \frac{جا^2 3 س}{5 س^2}$ = ...

(أ) $\frac{9}{25}$ (ب) $\frac{3}{5}$ (جـ) ٩ (د) $\frac{9}{5}$

(١٨) لو$_{\text{س ص}}$ س + لو$_{\text{س ص}}$ ص = ...

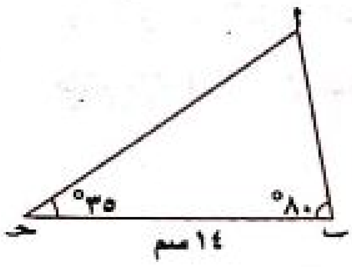
(أ) س ص　　(ب) س + ص　　(جـ) صفر　　(د) ١

(١٩) $\underset{\text{س} \leftarrow \cdot}{\text{نهـا}}$ $\frac{\text{٧ س + ٢ ظا ٤ س}}{\text{جا ٥ س}}$ = ...

(أ) $\frac{٨}{٥}$　　(ب) $\frac{٩}{٥}$　　(جـ) ٣　　(د) $\frac{٩}{٥}$

(٢٠) طول أكبر ضلع فى المثلث المرسوم

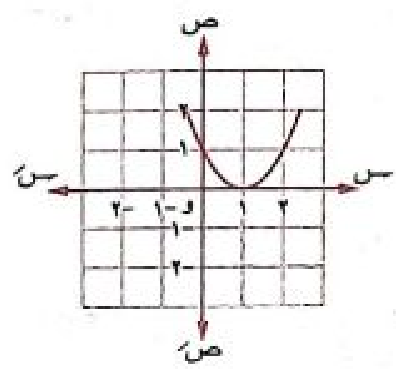
≃ .... سم. (لأقرب عدد صحيح)



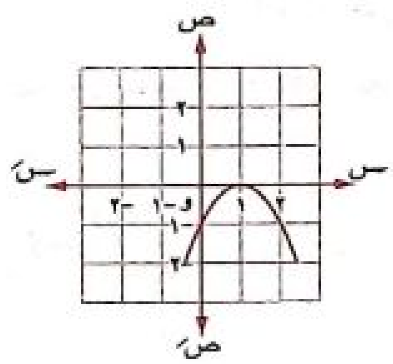
(أ) ٢٠　　(ب) ١٦

(جـ) ١٥　　(د) ١٤

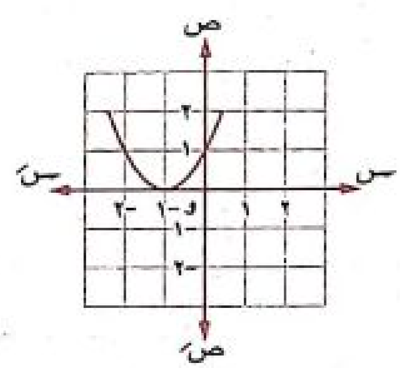
(٢١) الشكل الذى يبين التمثيل البيانى لمنحنى الدالة د : د (س) = ١ − س^{٢} هو ....



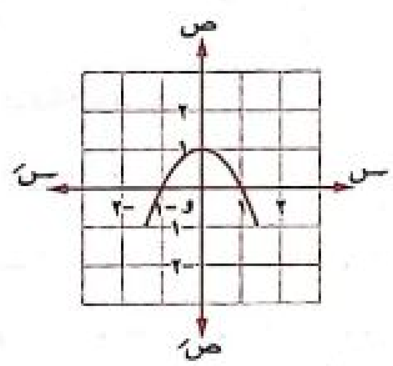
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

(٢٢) مدى الدالة د (س) = $\frac{٢}{\text{س} - ٢}$ − ١ ....

(أ) ح − {٢}　　(ب) ح − {−١}　　(جـ) ح − {١}　　(د)]٢ ، ∞[

(٢٣) فى المثلث أ ب حـ يكون $\frac{ب^٢ + حـ^٢ - أ^٢}{ب حـ}$ = ...

(أ) ٢ جتا أ (ب) جتا أ (جـ) $\frac{١}{٢}$ جتا أ (د) جتا ٢ أ

(٢٤) إذا كانت د (س) = $٢^{س}$ وكان د (س + ٢) = $\frac{١}{٨}$ فإن : س = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ٥ (د) −٥

(٢٥) إذا كانت ك تنتمي لمجموعة حل المتباينة | س − ١ | > ٣

فإن : ك يمكن أن تساوى ....

(أ) −٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٢٦) إذا كان د : د (س) = $\begin{cases} \frac{جا ٢ س}{\frac{١}{٢} س} &، س > ٠ \\ ٤ س + ك &، س < ٠ \end{cases}$

لها نهاية عند س ← ٠ فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) ٤ (د) $\frac{١}{٢}$

(٢٧) إذا كان : $\sqrt{س^٢}$ = ٣ فإن : س = ...

(أ) ٩ (ب) ٣ (جـ) $\sqrt{٣}$ (د) ± ٣

(٢٨) الدالة الأحادية فيما يلى هى د (س) = ...

(أ) | س | (ب) ٢ − س (جـ) ٣ (د) $س^٢$

ثانيا الأسئلة المقالية

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ ارسم الشكل البيانى للدالة د (س) = $س^٢$ + ٢ ومن الرسم أوجد المدى وابحث الاطراد ثم بين نوع الدالة من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

---

٢ أوجد قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى نسب أطوال أضلاعه هى ٣ : ٥ : ٧

---

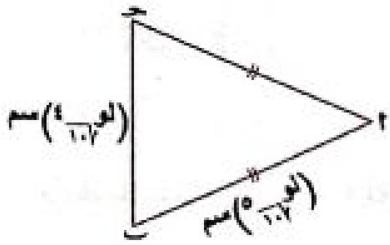
٣ أوجد : (١) $\lim_{س \to ٠} \frac{(س + ٢)^٧ - ١٢٨}{٥ س}$ (٢) $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{س + ١١} - ٤}{س^٢ - ٢٥}$

٤ في الشكل الموضح :

أوجد محيط المثلث أ ب حـ

باستخدام البيانات على الرسم.

(بدون استخدام الحاسبة)



٥ محافظة الغربية — إدارة غرب طنطا — مدرسة تلبنت الثانوية المشتركة

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① مدى الدالة د : د (س) = | ٤ − س٢ | ....

(أ) ح+ (ب) ح (جـ) [٠ ، ∞[(د)]−∞ ، ٠]

② د (س) = لس ، د (٢ب + ٢) = ٤ ، د (١ + ٢ب) = ٨ فإن : ل = ...

(أ) ٢ (ب) ٨ (جـ) ٤ (د) ٠,٥

③ مجال الدالة د (س) = $\sqrt{\frac{س - ٣}{س - ٥}}$ ....

(أ) [٣ ، ٥[(ب) ح − {٣} (جـ)]٣ ، ٥] (د) ح −]٣ ، ٥]

④ إذا كانت د (س) = $\sqrt{س}$ ، ر (س) = س٢ − ١ فإن : (د ∘ ر) (−٣) = ...

(أ) ٢ (ب) −٤ (جـ) $٢\sqrt{٢}$ (د) غير معرفة.

⑤ إذا كان : $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} \frac{س^م + س^ن - ٢}{س - ١} = ٨$ ، $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} \frac{س^م - س^ن}{س - ١} = ٢$

فإن : (م ، ن) ....

(أ) (٦ ، ٢) (ب) (٣ ، ١) (جـ) (٥ ، ٣) (د) (٤ ، ٢)

⑥ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\left[\frac{٢}{ك}\right]^{س}$ دالة أسية تناقصية عندما ....

(أ) ك > ١ (ب) ك < ١ (جـ) ك > ٢ (د) ك < ٢

⑦ مجال الدالة د : د (س) = $\frac{1}{|س| - 2}$ ....

(أ) ح − {٢}　(ب) ح − {−٢ ، ٢}

(جـ) ح　(د) ح − {١ ، ٢}

⑧ قيمة المقدار : لو (حا θ) + لو (قا θ) = ... حيث θ زاوية حادة.

(أ) صفر　(ب) ١　(جـ) −١　(د) ٢

⑨ مجموعة حل المعادلة لو (٢ + س) × لو (س + ٢) = −١ فى ح هى ....

(أ) {١٠}　(ب) {٢٠}　(جـ) {٢٠ ، ٠,٢}　(د) {٠,٢}

⑩ مجموعة حل المعادلة (٤)^س − (٢)^س − ٢ = صفر ....

(أ) {١}　(ب) {−١ ، ٢}　(جـ) {٢}　(د) {−١}

⑪ إذا كان : (٣)^س = ٢　فإن : (٩)^س + ١ = ...

(أ) ٥　(ب) ٣٦　(جـ) ١٢　(د) ٢٧

⑫ مجموعة حل المعادلة : س^2 − |س| = ١٢ فى ح هى ....

(أ) {−٣ ، ٣}　(ب) {−٤ ، ٣}　(جـ) {−٤ ، ٤}　(د) {−٢ ، ٢}

⑬ إذا كان : ن ، م جذرا المعادلة ٣ س^2 − ١٦ س + ١٢ = ٠

فإن : لو$_2$ (ن) + لو$_2$ (م) = ...

(أ) ٤　(ب) ١٢　(جـ) ١　(د) ٢

⑭ الدالة د : د (س) = | ٥ س + ٣ ك − ١٢ | تكون زوجية عندما ك = ...

(أ) ٤　(ب) ١٢　(جـ) ٥　(د) صفر

⑮ إذا تقاطع منحنى الدالتين د (س) ، د$^{-1}$ (س) فى النقطة (ك ، ٢ ك − ٣)

فإن : ك = ...

(أ) ٤　(ب) ١　(جـ) ٢　(د) ٣

⑯ إذا كان : نهــا$_{س \leftarrow م}$ $\frac{س + 2}{س^2 - س - 6}$ غير موجودة ، فإن : م = ...

(أ) ٦　(ب) ٣　(جـ) −٢　(د) ٢

(١٧) إذاكانت د (س) = $\frac{٤ س - ٨}{س^٢ - ٤}$ حيث س ≠ ± ٢ ، فإن قيمة د (٢) التى تجعل الدالة متصلة عند هذا الموضع تساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) -١ (د) ٤

(١٨) فى Δ أ ب حـ إذا كان : $\frac{جا أ}{٣} = \frac{٢ جا ب}{٥} = \frac{جا حـ}{٤}$ فإن : أَ : بَ : حَ = ...

(أ) ٣ : ٥ : ٤ (ب) ٦ : ٥ : ٨ (جـ) ٦ : ١٠ : ٨ (د) ٣ : ٢ : ٤

(١٩) إذا كان : Δ س ص ع قائم الزاوية ومتساوى الساقين نق هو نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه فإن مساحة Δ س ص ع ....

(أ) نق (ب) ٢ نق (جـ) $نق^٢$ (د) ٢ $نق^٢$

(٢٠) فى Δ س ص ع إذا كان ق (∠ س) : ق (∠ ص) : ق (∠ ع) = ٢ : ٣ : ١

فإن : سَ : صَ : عَ = ...

(أ) ٣ : $\sqrt{٢}$: ١ (ب) $\sqrt{٣}$: ٢ : ١ (جـ) $\sqrt{٢}$: $\sqrt{٣}$: ١ (د) ٢ : ٣ : ١

(٢١) $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{نهـا} \frac{١ - ظا س}{جا س - جتا س}$ = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) $-\sqrt{٢}$ (د) -١

(٢٢) $\underset{س \leftarrow \infty}{نهـا} \frac{(ل - ٢) س^٢ + ٦ س + ١٢}{٤ - ٢ س}$ = م فإن : (ل ، م) = ...

(أ) (٢ ، ٦) (ب) (٢ ، -٦) (جـ) (-٣ ، ٢) (د) (٢ ، -٣)

(٢٣) مساحة Δ س ص ع = ٢٤ $\sqrt{٣}$ $سم^٢$ حيث سَ = ٨ سم ، ق (∠ ص) = ١٢٠°

فإن : عَ = ...

(أ) ٨ (ب) ٤ (جـ) ١٢ (د) ١٢ $\sqrt{٣}$

(٢٤) فى Δ أ ب حـ إذا كان : أَ = ١٥ سم ، بَ = ١٠ سم ، ق (∠ أ) = ١٢٠°

فإن الشروط المعطاة ....

(أ) تعين مثلثين. (ب) تعين ثلاث مثلثات.

(جـ) لا تعين أى مثلث. (د) تعين مثلث واحد.

(٢٥) إذا كانت مساحة الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب ح = $\frac{ك أ ب}{حا أ جا ب}$

فإن ك = ...

(أ) $\frac{\pi}{٢}$ (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{\pi}{٣}$ (د) $\frac{\pi}{٦}$

(٢٦) $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـــا}} \sqrt{٤ - س}$ = ...

(أ) صفر (ب) ٤ (جـ) غير موجودة. (د) ٢

(٢٧) إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٢ س + ب & ، س < ٣ \\ س^٢ - س + ٥ & ، س \geq ٣ \end{cases}$

متصلة عند س = ٣ فإن : ب = ...

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) -٥ (د) ٢

(٢٨) $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـــا}} (٤ + س^٢ - س^٣)$ = ...

(أ) ∞ (ب) $-\infty$ (جـ) ٤ (د) -١

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) إذا كان : $\frac{٢}{لو_س (ص)} + \frac{٥}{لو_ع (ص)} = ٢ لو_ص (ع)$ أوجد : س × ع

---

(٢) إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} م س + ل & ، س < ١ \\ ل س^٢ - س + ٧ & ، س \geq ١ \end{cases}$

لها نهاية عند س = ١ قيمتها ٤ أوجد قيمة ل ، م

---

(٣) أوجد مجموعة حل المتباينة : | ٢ س + ١ | ≤ ٥

---

(٤) حدد فترات اتصال الدالة د : د (س) = $\frac{س + ٣}{لو (س - ٢)}$

٦ محافظة الدقهلية

إدارة شرق المنصورة
مدرسة جيهان السادات الثانوية للبنات

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت الدالة د دالة زوجية فى الفترة [أ ، ب] فإن : ب = ...

(أ) أ (ب) − أ (جـ) ٢ أ (د) $أ^٢$

② جميع الدوال الآتية أحادية على مجالها ما عدا الدالة د (س) = ...

(أ) ٣ س (ب) $\frac{١}{س}$ (جـ) ٥ (د) $س^٣$

③ مدى الدالة د : د (س) = $س^٢$ − ١ هو ....

(أ) [١ ، ∞[(ب) [−١ ، ∞[(جـ) [٠ ، ∞[(د)]−∞ ، −١]

④ الدالة د (س) = | س + ٢ | تكون تناقصية فى الفترة ....

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]٢ ، ∞[(جـ)]−٢ ، ∞[(د)]−∞ ، −٢[

⑤ مجموعة حل المعادلة : $س^٢$ − | س | = ١٢ فى ح هى ....

(أ) {−٣ ، ٣} (ب) {−٤ ، ٤}
(جـ) {٣ ، ٤} (د) {−٢ ، ٣ ، ٤ ، −٤}

⑥ مجال الدالة د : د (س) = $\frac{\sqrt{س - ٢}}{س - ٤}$ هو ....

(أ) [٢ ، ∞[(ب)]−∞ ، ٢]
(جـ) [٢ ، ∞[− {٤} (د)]−∞ ، ٢] − {٤}

⑦ مجموعة حل المتباينة : | ٢ س − ٥ | ≤ ٧ فى ح هى ....

(أ) [−١ ، ٦] (ب)]−١ ، ٦[(جـ) [−٦ ، ١] (د)]−٦ ، ١[

⑧ أبسط صورة للمقدار : $\frac{٤ \times ٣^{س+١} - ١١ \times ٣^{س-١}}{٢ \times ٣^{س} + ٧ \times ٣^{س-٢}}$ هى ....

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) −٣ (د) $\frac{١}{٣}$

⑨ إذا كان : $لو_٢$ س ص = ٤ فإن : ٣ $لو_٢$ س + ٤ $لو_٢$ ص − $لو_٢$ س $ص^٢$ = ...

(أ) صفر   (ب) ٢   (جـ) ٤   (د) ٨

⑩ إذا كانت : د (س) = س − ٣ ، ر (س) = $س^٢$

فإن : (د ∘ ر) (٥) = ...

(أ) ٢   (ب) ٤   (جـ) ٢٢   (د) ٢٥

⑪ إذا كان : $٢^{س+١} − ٢^{س−١} = ٣$ فإن : س = ...

(أ) صفر   (ب) ١   (جـ) ٢   (د) ٣

⑫ الدالة العكسية للدالة د : د (س) = س + ٤ هي ....

(أ) $د^{-١}$ (س) = س − ٤   (ب) $د^{-١}$ (س) = $\frac{١}{٤}$ س

(جـ) $د^{-١}$ (س) = $\sqrt[٤]{س}$ (د) $د^{-١}$ (س) = ٤ س

⑬ إذا كانت : د (س) = $٥^س$ ، د (س + ١) = ١٢٥ فإن : س = ...

(أ) صفر   (ب) ١   (جـ) ٢   (د) ٣

⑭ إذا كان : لو (س + ١١) = ٢ فإن : س = ...

(أ) −٩   (ب) ٢٢   (جـ) ٨٩   (د) ٩١

⑮ $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{س^٢ − ٨}{س − ٢}$ = ...

(أ) ٢   (ب) ٤   (جـ) ٨   (د) ١٢

⑯ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{(س + ٣)^٤ − ٨١}{س} & ، س \neq ٠ \\ ك & ، س = ٠ \end{cases}$ متصلة عند س = ٠

فإن : ك = ...

(أ) ٩   (ب) ٢٧   (جـ) ٥٤   (د) ١٠٨

⑰ $\underset{س \leftarrow \infty}{نهـا} \frac{٥ + س^{-٢}}{٣ س^{-٢} + ١}$ = ...

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (جـ) ٥   (د) $\frac{١}{٣}$

(١٨) إذا كان : $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ل}{س - ٢} = م$ فإن : (ل ، م) = ...

(أ) (٣ ، ٣) (ب) (-٩ ، ٠) (جـ) (٩ ، ٦) (د) (٠ ، ٠)

(١٩) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا ٨ س}{٤ س} = $ ....

(أ) ٨ (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) صفر

(٢٠) $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{٤ س + ١} - ٣}{س^٢ - ٤} = $ ....

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) $\frac{١}{٢٤}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) ١

(٢١) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا^٢ س ظا ٣ س}{٤ س^٣} = $ ....

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٣}{١٦}$ (جـ) صفر (د) غير موجودة.

(٢٢) $\lim_{س \to \pi} \frac{جا س}{\pi - س} = $ ....

(أ) ١ (ب) $\pi^٢$ (جـ) π (د) $-\pi$

(٢٣) فى المثلث س ص ع إذا كان : سَ = صَ فإن : جتا س = ...

(أ) $\frac{٢ صَ}{عَ}$ (ب) $\frac{٢ عَ}{صَ}$ (جـ) $\frac{عَ}{٢ سَ}$ (د) $\frac{صَ}{٢ عَ}$

(٢٤) فى المثلث ء هـ و يكون : $\frac{جا (ء + هـ)}{جا ء + جا هـ} = $ ....

(أ) ١ (ب) $\frac{وَ}{ءَ + هَ}$ (جـ) $\frac{ءَ}{هَ + وَ}$ (د) $\frac{هَ}{ءَ + وَ}$

(٢٥) فى المثلث أ ب حـ يكون $\frac{٤ بَ}{جا ب} = $ .... نق

حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٨}$

(٢٦) فى المثلث أ ب حـ إذا كان : أَ : بَ : حَ = ٣ : ٢ : ٢ فإن : جتا أ = ...

(أ) $\frac{١}{٨}$ (ب) $-\frac{١}{٨}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

(٢٧) فى المثلث س ص ع إذا كان : سَ = ٢٠ سم ، عَ = ١٦ سم ، جاص = ٤٫٠

فإن : صَ = ... سم.

(أ) ١٥ (ب) ١٦ (جـ) ٢٠ (د) ٢٥

(٢٨) عدد حلول المثلث ل م ن الذى فيه : ق(د ل) = ٤٠° ، مَ = ١٥ سم

، لَ = ١٢ سم هو ....

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) صفر

ثانيا الأسئلة المقالية

أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) ارسم الشكل البيانى للدالة د : د (س) = $(س - ١)^٢$

ومن الرسم استنتج مدى الدالة وابحث اطرادها.

---

(٢) اوجد فى ح مجموعة حل المعادلة : $(س + ١)^{\frac{٢}{٣}} = ٤$

---

(٣) إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ + ٢س - ٣}{س + ٣} & ، س \neq -٣ \\ س + أ & ، س = -٣ \end{cases}$

متصلة عند س = -٣ أوجد قيمة : أ

---

(٤) إذا كانت : $\lim\limits_{س \to ك} \frac{س^٨ - ك^٨}{س^٦ - ك^٦} = ١٢$ أوجد قيمة : ك

٧ محافظة السويس

إدارة الجناين
مدرسة أبو حامد الغزالى ث-م

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : د (س) = $\sqrt{|س| - ٤}$ فإن مجالها هو ....

(أ) {-٤ ، ٤} (ب)]٤ ، ∞[(جـ) ح - [-٤ ، ٤] (د) ح -]-٤ ، ٤[

② مجموعة حل متباينة | ٥ - ٢ س | ≥ ١ فى ح هى ....

(أ) [٢ ، ٣] (ب)]٢ ، ٣[

(جـ) ح -]٢ ، ٣[(د) ح - [٢ ، ٣]

③ إذا كان لو|س + ٢| ٦٤ = ٣ فإن مجموعة الحل هى ....

(أ) {٦ ، -٢} (ب) {٢ ، -٦} (جـ) {٠ ، -٨} (د) {٤ ، -٨}

④ فى Δ س ص ع يكون $\frac{\text{سَ}}{\text{جا س}}$ يساوى ....

(أ) $\frac{\text{صَ}}{\text{جا ع}}$ (ب) $\frac{\text{عَ}}{\text{جا ص}}$ (جـ) $\frac{\text{صَ + عَ}}{\text{جا ع + جا ص}}$ (د) ٣ نق

⑤ إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا مثلث هى ٨ : ٣ : ١ فإن النسبة بين طولى أكبر ضلعين فى المثلث = ...

(أ) $\sqrt{٢}$: ٢ (ب) $\sqrt{٦}$: ٢ (جـ) ٨ : ٣ (د) ٨ : ٥

⑥ نهـا (س ← ∞) $\left(\frac{٣}{\text{س}} - ٤\right)$ = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) -٤

⑦ نهـا (س ← ٠) $\frac{(٣\text{س} + ١)^٢ - ١}{٣\text{س}}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

⑧ مدى الدالة د حيث د (س) = $\frac{٣}{\text{س} + ٢}$ - ٥ هو ....

(أ) ح - {٣} (ب) ح - {٢} (جـ) ح - {٥} (د) ح - {-٥}

⑨ لو (جا هـ) + لو (قتا هـ) = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) -١

⑩ إذا كان : $٧^{\text{س} + ١} = ٣^{\text{س}^٢ + ٢}$ فإن : س = ...

(أ) صفر (ب) -١ (جـ) ١ (د) ٤

⑪ فى Δ س ص ع يكون $\frac{\text{سَ}^٢ + \text{صَ}^٢ - \text{عَ}^٢}{\text{سَ صَ}}$ = ...

(أ) جتا ع (ب) جا ع (جـ) ٢ جتا ع (د) ٢ جا ع

(١٢) إذا كان : $\sin\theta = \frac{٣}{٥}$ فإن : $\cos(٩٠° + \theta) =$ ....

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{-٣}{٥}$ (د) $\frac{-٤}{٥}$

(١٣) $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س} - ٢}{س - ٤} =$ ....

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٤}$

(١٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{\sin ٢س \tan ٣س}{س^٢} =$ ....

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) ٩

(١٥) الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هي ....

(أ) $د_١(س) = س + ٢$ (ب) $د_٢(س) = س^٢$

(جـ) $د_٣(س) = |س|$ (د) $د_٤(س) = ٥$

(١٦) مجموعة حل المعادلة : $٣^س + ٣^{س+١} = ٣٦$ هي ....

(أ) {٢} (ب) {٣} (جـ) {٦} (د) {-٦ ، ٦}

(١٧) إذا كان : $\frac{\sin أ}{٥} = \frac{٢ \sin ب}{٤} = \frac{\sin حـ}{٣}$ فإن : أ : ب : حـ = ...

(أ) ٥ : ٤ : ٣ (ب) ١٠ : ٨ : ٦ (جـ) ٥ : ٨ : ٣ (د) ١٠ : ٤ : ٦

(١٨) س ص ع مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه $١٥\sqrt{٣}$ سم فإن طول قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث يساوي .... سم.

(أ) ١٠ (ب) ١٥ (جـ) ٢٠ (د) ٣٠

(١٩) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^{-٣} + ٢س^{-٢} + ١}{٢س^{-٣} - س^{-١} + ٢} =$ ....

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ٣ (د) $\frac{١}{٣}$

(٢٠) $\lim_{س \to ٢} \frac{\sin(س - ٢)}{٣س - ٦} =$ ....

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) ٣

(٢١) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - \tan س}{\sin س - \cos س} =$ ....

(أ) صفر (ب) -١ (جـ) ١ (د) ∞

(٢٢) إذا كان : د (١) = ٥ ، ر (٥) = ٦ فإن : (ر ∘ د) (١) = ...

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ١١

(٢٣) منحنى د (س) = | س − ٢ | متماثل حول المستقيم ....

(أ) ص = ٢ (ب) ص = −٢ (جـ) س = −٢ (د) س = ٢

(٢٤) إذا كانت مساحة Δ أ ب حـ = ١٢ سم^2 فإن : (ب^2 + حـ^2 − أ^2) ظا أ = ...

(أ) ١٢ (ب) ٢٤ (جـ) ٤٨ (د) ٩٦

(٢٥) أ ب حـ مثلث فيه أ = ٤ سم ، ب = ٤ $\sqrt{٣}$ سم ، حـ = ٨ سم

فإن جيب أصغر زاوية فيه = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٥}$ (جـ) ١ (د) صفر

(٢٦) نهـــا$_{س \leftarrow \infty}$ $\frac{١}{س}$ × $\sqrt{٣ + ٤ س^2}$ = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) −٢

(٢٧) إذا كانت : نهـــا$_{س \leftarrow ٢}$ د (س) = ٤ فإن : نهـــا$_{س \leftarrow ٢}$ ٢ (د (س) − ٤) = ...

(أ) ٢ (ب) −٤ (جـ) ٤ (د) صفر

(٢٨) إذا كانت : نهـــا$_{س \leftarrow ٢}$ $\frac{أ س^2}{٢}$ = ٣٢ فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٤ $\sqrt{٢}$ (د) ٨

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ ارسم منحنى الدالة د (س) = $\sqrt{س^2 − ٦ س + ٩}$ − ٢

ومن الرسم حدد مداها ثم ابحث اطرادها.

---

٢ أوجد : (١) نهـــا$_{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}}$ $\frac{حا ٢ س − ١}{ظا س + ظتا س}$ (٢) نهـــا$_{س \leftarrow −١}$ $\frac{س^2 − ٣ س − ٤}{س^2 + ١}$

٣ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{(س + ٢)^{٥} - ٣٢}{س} & \text{عندما } س \neq ٠ \\ ٥ك & \text{عندما } س = ٠ \end{cases}$

متصلة عند س = ٠ أوجد قيمة : ك

---

٤ أوجد قيمة : $\lim_{س \to -٣} \frac{\sqrt{س + ٧} - ٢}{س + ٣}$

٨ محافظة المنيا

إدارة المنيا
مدرسة الشهيد إسلام مصطفى نجيب

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مدى الدالة د (س) = ٣ هو ....

(أ) ح (ب) $ح^{+}$ (جـ) {٣} (د) ح − {٣}

(٢) إذا كان مجال الدالة د (س) = $\frac{س}{|س| + أ}$ هو ح − {± ٥} فإن : أ = ...

(أ) ٥ (ب) ± ٥ (جـ) −٥ (د) صفر

(٣) نقطة رأس المنحنى د (س) = $(س - ٢)^{٢} + ٣$ هي ....

(أ) (−٢ ، ٣) (ب) (٣ ، ٢) (جـ) (٢ ، ٣) (د) (−٢ ، −٣)

(٤) إذا كانت : د (س) = $\sqrt[٣]{س}$ ، ر (س) = $س^{٣}$ فإن : (د ∘ ر) (س) = ...

(أ) |س| (ب) $\sqrt[٣]{س}$ (جـ) $س^{٣}$ (د) س

(٥) منحنى الدالة ر : ر (س) = $س^{٢} + ٤$ هو نفس منحنى الدالة د (س) = $س^{٢}$ بإزاحة مقدارها ٤ وحدات في اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{وس}$ (ب) $\overleftarrow{وص}$ (جـ) $\overrightarrow{وس}$ (د) $\overrightarrow{وص}$

(٦) إذا كانت د دالة حقيقية مجالها [−٢ ، ٥] فإن مجال الدالة ر :
ر (س) = د (س) + ٢ هو ....

(أ) [٠ ، ٧] (ب) [−٤ ، ٣] (جـ) [−٢ ، ٥] (د)]٢ ، ∞[

⑦ مجموعة حل المتباينة $|$ س − ٣ $| \geq$ ٤ في ح هو ....

(أ) [−٤ ، ٤] (ب) [−٣ ، ٣] (جـ) [−١ ، ٧] (د) [−٢ ، ٨]

⑧ إذا كانت د (س) = أ^س دالة تزايدية فإن ....

(أ) أ > صفر (ب) أ < صفر (جـ) أ > ١ (د) ٠ < أ < ١

⑨ إذا كانت د : ح ← ح حيث د (س) = س + ٢ فإن : د^{-١} (٥) = ...

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) ٢ (د) −٢

⑩ أبسط صورة للمقدار : لو_ب أ^٢ × لو_جـ ب^٣ × لو_أ جـ = ...

(أ) ٣ (ب) ١ (جـ) ٦ (د) ٢

⑪ مجموعة حل المعادلة : ٤^س + ٢^{س+١} = ٨ في ح هي ....

(أ) {١ ، −٤} (ب) {١ ، ٢} (جـ) {١} (د) {−١}

⑫ لو ٢٥ + $\frac{\text{لو } ٨ \times \text{لو } ١٦}{\text{لو } ٦٤}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٢

⑬ مجموعة حل المعادلة : لو (س + ٢) + لو (س − ٢) = ١ − لو ٢ في ح هي ....

(أ) {٣} (ب) {±٣} (جـ) {١ ، ٢} (د) {٥}

⑭ إذا كان : لو س + لو ٤ = ٢ فإن : س = ...

(أ) ٢٠ (ب) ١٥ (جـ) ٢٥ (د) ٥٠

⑮ نهــــا_{س ← ٣} $\frac{\text{س}^٢ - ٧\text{س} + ١٢}{\text{س} - ٣}$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) −١ (د) ١

⑯ إذا كانت : نهــــا_{س ← ∞} $\frac{\text{أس} + ٥}{٣\text{س} + ٦}$ = ٢ حيث أ ∈ ح فإن : أ = ...

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ٦ (د) ٢

⑰ إذا كان ∆ أ ب جـ فيه : أَ = ٣ سم ، بَ = ٥ سم ، جَـ = ٧ سم

فإن قياس أكبر زاوية فيه = ...

(أ) ١٥٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ٦٠° (د) ٣٠°

(١٨) عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب حـ الذى فيه ق (∠ أ) = ٣٠° ، بَ = ٩ سم

، أَ = ٦ سم هو ....

(أ) واحد. (ب) اثنان. (جـ) لا يوجد مثلث. (د) عدد لا نهائى.

(١٩) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٥} - ٣٢}{\text{س}^{٣} - ٨} = $ ....

(أ) ٤ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (جـ) $٦\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٥}$

(٢٠) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} + ٢)^{٥} - ٣٢}{\text{س}} = $ ....

(أ) ٣٥ (ب) ٤٠ (جـ) ٥٥ (د) ٨٠

(٢١) فى Δ أ ب حـ ، إذا كانت ق (∠ أ) = ٤٠° ، ق (∠ ب) = ٣٠° ، بَ = ١٠ سم

فإن : حَ = ... سم

(أ) ١٧ (ب) ١٦ (جـ) ١٤ (د) ١٩

(٢٢) $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س} + ١}{\sqrt{\text{س} + ٥} - ٢} = $ ....

(أ) ٥ (ب) −٢ (جـ) ٤ (د) −٤

(٢٣) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}^{٢}\, ٣\text{س}}{٥\, \text{س}^{٢}} = $ ....

(أ) $\frac{٩}{٢٥}$ (ب) $\frac{٩}{٥}$ (جـ) $\frac{٢٥}{٩}$ (د) $\frac{٥}{٩}$

(٢٤) فى أى مثلث أ ب حـ يكون $\dfrac{\text{أَ}}{\text{بَ}} \times \dfrac{\text{جا ب}}{\text{جا أ}} = $ ....

(أ) $\frac{\text{حَ}}{\text{جا حـ}}$ (ب) $\frac{\text{جا حـ}}{\text{حَ}}$ (جـ) ٤ نق² (د) ١

(٢٥) فى Δ أ ب حـ إذا كان : ٦ جا أ = ٤ جا ب = ٣ جا حـ فإن : أَ : بَ : حَ = ...

(أ) ٢ : ٣ : ٤ (ب) ٤ : ٣ : ٥ (جـ) ٢ : ٣ : ٥ (د) ٣ : ٥ : ٦

(٢٦) فى Δ أ ب حـ يكون $\dfrac{٢\, \text{بَ}}{\text{جا ب}} = $ .... نق.

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ٤

(٢٧) فى Δ أ ب حـ إذا كان : جا أ : جا ب : جا حـ = ٢ : ٤ : ٥ حيث حَ − بَ = ٣ سم

فإن : أَ = ...

(أ) ١٢ سم (ب) ٨ سم (جـ) ١٠ سم (د) ٦ سم

(٢٨) فى Δ أ ب حـ إذا كان : أَ = بَ فإن : جتا أ = ...

(أ) $\frac{٢\, \text{بَ}}{\text{حَ}}$ (ب) $\frac{\text{حَ}}{\text{بَ}}$ (جـ) $\frac{\text{حَ}}{٤\, \text{أَ}}$ (د) $\frac{\text{حَ}}{٢\, \text{أَ}}$

ثانيا الأسئلة المقالية

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ ارسم منحنى الدالة د (س) = | س − ٢ | ومن الرسم حدد المدى وابحث الاطراد وبين ما إذا كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك.

---

٢ أوجد في ح مجموعة حل المعادلة الآتية : $٢^{٢س} + ٣٢ = ١٢ \times ٢^{س}$

---

٣ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ - ٥س + ٤}{س - ٤} & ، \quad س > ٤ \\ ٢س - ٥ & ، \quad س < ٤ \end{cases}$

أبحث وجود $\lim_{س \leftarrow ٤}$ د (س)

---

٤ إذا كانت : الدالة د حيث د (س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ - ٢س - ٣}{س + ٣} & ، \quad س \neq -٣ \\ س + أ & ، \quad س = -٣ \end{cases}$

متصلة عند س = −٣ أوجد قيمة : أ

٩ محافظة أسيوط

إدارة أسيوط

مدرسة الشهيد أحمد فايز الثانوية بنات

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كانت د (س) = $\frac{٣}{س}$ ، ر (س) = $\sqrt{س}$ فإن مجال (د + ر) هو ....

(أ) ح − {٠} (ب) ح (جـ) ح⁺ (د)]٠ ، ∞[

٢ إذا كانت د دالة حيث د]−٤ ، ٤[⟵ ح ، د (س) = $س^٢$

فإن : د (س) تكون ....

(أ) أحادية. (ب) زوجية.

(جـ) فردية. (د) ليست زوجية وليست فردية.

③ إذا كان : $٥^{س} = ٢$ فإن : $٢٥^{س} =$ ....

(أ) ١٠ (ب) ٦ (جـ) ٥ (د) ٤

④ إذا كان $لو_{٣} (٢س + ٣) = ٢$ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ٩ (د) ٤

⑤ $\underset{س \to ٠}{نهــا} \frac{١٢ - ١٢ جتا س}{س} =$ ....

(أ) صفر (ب) ١٢ (جـ) ١ (د) ٢٤

⑥ $\underset{س \to ٢}{نهــا} \frac{س^{٢} - ٩}{س^{٢} + س - ١٢} =$ ....

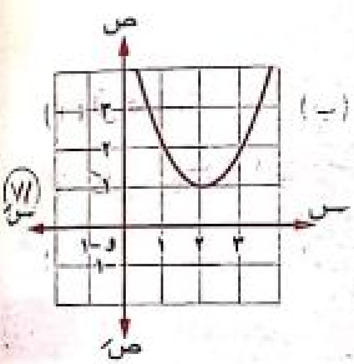
(أ) صفر (ب) $\frac{٧}{٦}$ (جـ) $\frac{٦}{٧}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

⑦ عدد حلول المثلث س ص ع الذى فيه : سَ = ٥ سم ، صَ = ٦ سم

، ق (∠ س) = ٧٠° يساوى ....

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ١ (د) ٣

⑧ فى الشكل المجاور الدالة تزايدية



فى الفترة..............

(أ)]− ∞ ، ∞[

(ب)]٠ ، ∞[

(جـ)]٢ ، ∞[

(د)]− ∞ ، ٢[

⑨ مجموعة حل المعادلة |س − ٢| = ٥ فى ح هى ....

(أ) {٧ ، −٣} (ب)]−٣ ، ٧[(جـ) ∅ (د) {٧}

⑩ إذا كان : $س^{\frac{٣}{٢}} = ٨$ فإن : س = ...

(أ) ± ٢ (ب) ± ٤ (جـ) ٤ (د) ٢

⑪ إذا كانت : ص = $\sqrt[٥]{س}$ فإن الدالة العكسية لها ص = ...

(أ) س (ب) $س^{\frac{٥}{٢}}$ (جـ) $س^{٥}$ (د) $س^{٢}$

(١٢) $\lim_{س \to \infty} \frac{1}{س}\sqrt{3 + 4س^2}$ = ...

(أ) $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{3}{4}$ (جـ) ٢ (د) $\frac{1}{2}$

(١٣) إذا كانت الدالة د متصلة عند س = ٢ حيث :

$د(س) = \begin{cases} أس^2 + 5 & \text{عندما } س \leq 2 \\ 9 - ب س^2 & \text{عندما } س > 2 \end{cases}$ فإن : أ + ب = ...

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٤) قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه ٣ سم ، ٥ سم ، ٧ سم تساوى ....°

(أ) ٦٠ (ب) ١٥٠ (جـ) ٩٠ (د) ١٢٠

(١٥) منحنى الدالة د (س) = $س^2$ − ٣ هو نفس منحنى الدالة د (س) = $س^2$ بإزاحة مقدارها ٣ وحدات فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{وس}$ (ب) $\overleftarrow{وص}$ (جـ) $\overrightarrow{وس}$ (د) $\overrightarrow{وص}$

(١٦) إذا كان : $2^{س} = 5$ فإن : س = ...

(أ) لو٥ (ب) لو ٢ (جـ) $لو_2 5$ (د) $لو_5 2$

(١٧) إذا كان : $5^{س+1} = 7^{س+1}$ فإن : $3^{س+1}$ = ...

(أ) صفر (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١

(١٨) إذا كانت د (س) = $س^2$ − ٤ فإنها تكون متصلة على ....

(أ) ح (ب) ح − {٢ ، −٢}

(جـ) [−٢ ، ٢] (د) ح − {٠}

(١٩) $\lim_{س \to 2} \frac{س^5 - 32}{س - 2}$ = ...

(أ) ٥ (ب) ١٦ (جـ) ٨٠ (د) ١٠٠

(٢٠) أ ب جـ Δ فيه : ق (∠ أ) : ق (∠ ب) : ق (∠ جـ) = ٤ : ٣ : ٢ ، أ ب = ١٢ سم

فإن طول $\overline{أجـ}$ ≃ .... سم

(أ) ٢٠ (ب) ١١ (جـ) ١٦ (د) ١٨

(٢١) فى أى مثلث أ ب حـ يكون $\frac{٣ أ}{جا أ}$ = ...

(أ) ٣ نق (ب) ٦ نق (جـ) نق (د) $\frac{٢}{٣}$ نق

(٢٢) نقطة تماثل الدالة د (س) = س^٢ − ٢ هى ....

(أ) (٠ ، ٠) (ب) (٠ ، ٢) (جـ) (٠ ، −٢) (د) (٢ ، ٠)

(٢٣) رأس المنحنى د (س) = (س − ٣)^٢ هى ....

(أ) (٠ ، −٣) (ب) (−٣ ، ٠) (جـ) (٣ ، ٠) (د) (٣ ، ٢)

(٢٤) إذا كان : لو س + لو ٥ = ٢ فإن : س = ...

(أ) ٢٥ (ب) $\frac{٥}{٢}$ (جـ) ٢٠ (د) ١٠٠

(٢٥) إذا كانت د (س) = $\begin{cases} \frac{جا^٢ ٢ س}{س^٢} & ، س < ٠ \\ ٢ أ + ٣ جتا س & ، س > ٠ \end{cases}$

وكانت : نهـا د (س) موجودة فإن : أ = ...
س ← ٠

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) $\frac{−١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٢}$

(٢٦) نهـا $\frac{٢ س + جا ٣ س}{٥ س + ظا ٢ س}$ = ...
س ← ٠

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) $\frac{٥}{٧}$

(٢٧) أ ب حـ مثلث فيه : أ = ٤ سم ، ق (∠ أ) = ٣٠° فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث هو .... سم.

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ٢

(٢٨) أ ب حـ مثلث فيه : أ = ٩ سم ، ب = ١٥ سم ، ق (∠ حـ) = ١٠٦°

فإن محيطه = ... سم.

(أ) ١٩,٥ (ب) ٤٥ (جـ) ٤٧,٥ (د) ٤٣,٥

ثانيا الأسئلة المقالية

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ (أ) ارسم منحنى الدالة د (س) = $\frac{١}{س - ١}$ + ٢ من الرسم حدد المجال - المدى - الاطراد - ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

(ب) أوجد مجموعة حل المتباينة : $\frac{١}{|س - ٢|} \leq ٥$

---

٢ (أ) أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة : $س^{\frac{٤}{٣}} - ١٠ س^{\frac{٢}{٣}} + ٩ = ٠$.

(ب) أوجد مجموعة الحل فى ح للمعادلة : $لو_{\sqrt{٢}} س + لو_{\sqrt{٢}} (س + ١) = ٢$

---

٣ أوجد قيمة النهايات :

① $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س + ٤} - ٢}{س}$

② $\lim_{س \to ٠} \frac{٣ س^٢ + جا^٢ ٥ س}{س جا ٦ س}$

---

٤ إبحث اتصال الداله : د (س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢} & ، س \neq ٢ \\ ٢ & ، س = ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

وإن لم تكن متصلة أعد تعريفها لكى تكون متصلة.

١٠ محافظة أسوان

إدارة دراو
مدرسة دراو الثانوية بنين

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① الدالة العكسية للدالة د (س) = ٧ - س هى $د^{-١}$ (س) = ...

(أ) س + ٧ (ب) س - ٧ (جـ) ٢ س + ٧ (د) ٧ - س

② نقطة تماثل الدالة د (س) = $(س + ٢)^٢$ هى ....

(أ) (-٢ ، ١) (ب) (-٢ ، ٠) (جـ) (٠ ، -٢) (د) (٠ ، ٢)

③ طول قطر الدائرة الخارجة للمثلث س ص ع المتساوى الأضلاع ، طول ضلعه = ٣ سم هو .... سم.

(أ) ٦ (ب) ٦$\sqrt{3}$ (جـ) ١٢ (د) ٢$\sqrt{3}$

④ فى أى مثلث أ ب جـ يكون : جـ^2 + ٢ أ ب جتا جـ = ...

(أ) أ^2 + ب^2 (ب) أ^2 + جـ^2 (جـ) ب^2 + جـ^2 (د) أ^2 − ب^2

⑤ إذا كانت الدالة د : د (س) = { أ س^2 + ٩ ، س ≠ ١ ؛ ٤ أ ، س = ١ } متصلة عند س = ١

فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٩ (د) ٣٦

⑥ إذا كان : لو$_{س}$ ٢ (٣ س + ٨) = ٢ فإن : لو ١٢٥ س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

⑦ مجموعة حل المعادلة | س | = −٣ فى ح هو ....

(أ) {−٣} (ب) {٣} (جـ) {−٣ ، ٣} (د) ∅

⑧ إذا كانت د (س) = ٢$^{س + ١}$ فإن : د (٤) = ...

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ١٦ (د) ٣٢

⑨ معادلة محور التماثل لمنحنى الدالة د : د (س) = (٣ − س)^2 + ٢ هى ....

(أ) س = −٣ (ب) س = ٢ (جـ) س = ٣ (د) ص = ٣

⑩ مجال الدالة د (س) = $\sqrt{4 - س^2}$ هو ....

(أ)]−٢ ، ٢[(ب)]−∞ ، −٤] (جـ) [−٢ ، ٢] (د)]−∞ ، ٢]

⑪ إذا كانت د (س) = ٤ س − ٥ ، ر (س) = ٣$^{−س}$ فإن : (د ∘ ر) (٢) = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢٧ (د) ٣١

⑫ نهـا$_{س ← صفر}$ س ظتا س = ...

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٢

⑬ إذا كان : $\sqrt{س^3}$ = ٦٤ فإن : س = ...

(أ) ٥١٢ (ب) ١٦ (جـ) ٤ (د) ٢

(١٤) إذا كان : ٢ ط أ = ٣ ط ب = ٤ ط حـ فإن : أ : ب : حـ = ...

(أ) ٢ : ٣ : ٤ (ب) ٣ : ٤ : ٢ (جـ) ٤ : ٣ : ٦ (د) ٦ : ٤ : ٣

(١٥) أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٩ سم ، ب حـ = ٨ سم ، ق (∠ ب) = ٣٠°

فإن مساحته = ...

(أ) ٩ (ب) ١٨ (جـ) ٣٦ (د) ٧٢

(١٦) إذا كان : $٢^{س}$ = ٥ فإن : $٤^{س}$ = ...

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ١٥ (د) ٢٥

(١٧) تكون الدالة الأسية التى أساسها أ تزايدية إذا كان ....

(أ) أ = ١ (ب) أ > ١ (جـ) أ < ١ (د) صفر < أ < ١

(١٨) مدى الدالة د (س) = $س^{٢}$ هو ....

(أ) ∅ (ب)]−∞ ، ٠] (جـ) [٠ ، ∞[(د) ح

(١٩) إذا كان لو لو (س − ٣) = صفر فإن : س = ...

(أ) ٥ (ب) ١٣ (جـ) ١٥ (د) ٢٥

(٢٠) نهـــا (س ← ∞) $\sqrt{٩ س^{٢} + ٦ س}$ − ٣ س = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ٩

(٢١) أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٧ سم ، ق (∠ أ) = ٧٠° ، ق (∠ ب) = ٤٠°

فإن : أ حـ ≃ .... سم تقريبًا.

(أ) ٣,٦ (ب) ٦,٣ (جـ) ٤,٨ (د) ٨,٤

(٢٢) الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) د (س) = س − ٥ (ب) د (س) = $س^{٢}$ + ٣

(جـ) د (س) = |س| (د) د (س) = ٥

(٢٣) إذا كانت الدالة د (س) دالة فردية فإن : د (−س) + د (س) = ...

(أ) د (−س) (ب) − د (س) (جـ) ٢ د (س) (د) صفر

(٢٤) قيمة ٤ $لو_{٩}$ ٣٢ × $لو_{١٦}$ ١٢٥ × $لو_{٢٥}$ ٨١ = ...

(أ) ٥ (ب) ١٥ (جـ) ٨١ (د) ١٢٥

(٢٥) $\lim_{س \to \infty} \frac{١٦ س^{-٣} + ٥ س^{-٢} + ٦}{٤ س^{-٢} + ٢ س^{-١} + ٣}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٢٦) مجموعة حل المتباينة : |س - ٢| < ٣ فى ح هى ....

(أ) ح - {٢} (ب)]-١ ، ٥[(جـ)]-∞ ، ٢[(د) ∅

(٢٧) مجال الدالة لو (س - ٥) = ...

(أ) ح - {٦} (ب)]-∞ ، ٥] (جـ)]٥ ، ∞[(د) $ح^+$

(٢٨) لو ٥ + لو ١٢ - لو ٦ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) ١٠

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ ارسم منحنى الدالة د : د (س) = ٣ - |٢ - س|

ثم عين المدى وادرس اطرادها وبين نوع الدالة ثم أوجد مجموعة حل د (س) = ٠

---

٢ إذا كان : $٢^{س} = ٥$ ، $٥^{ص} = ٩$ أوجد : قيمة $لو_٢ س + لو_٣ ص$

---

٣ أوجد : (١) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٥ - ٣٢}{س^٢ + ٢ س - ٨}$

(٢) $\lim_{س \to \infty} \frac{(٢ س - ١)(٣ س + ١)}{\sqrt{٤ س^٤ + ٥}}$

---

٤ (أ) ابحث اتصال الدالة د حيث : د (س) = $\begin{cases} \frac{٢ س + جا س}{٣ س - ظا ٢ س} & ، س < ٠ \\ ٥ - ٢ جا ٤ س & ، س \geq ٠ \end{cases}$

عند س = صفر

(ب) حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ = ٨ سم ، ب = ٥ سم ، ق (∠حـ) = ٧٦°

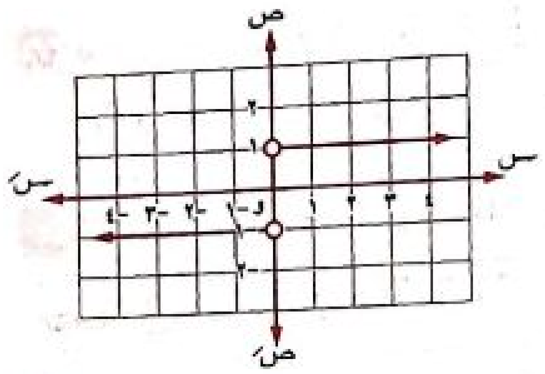
النمــوذج الأول

امتحان تفاعلي ١

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ مدى الدالة الممثلة بالشكل المقابل هو ....



(أ) $\{1\}$

(ب) $\{1 ، -1\}$

(جـ) $\{-1\}$

(د) ح

---

٢ إذا كانت النقطة $\left(س ، \frac{4}{س}\right)$ نقطة تقاطع منحنى الدالة د والدالة العكسية لها $د^{-1}$ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ±٢ (د) ±٤

---

٣ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{2س + 3}{5س^2 + 4}$ = ...

(أ) ٢ (ب) صفر (جـ) $\frac{3}{4}$ (د) $\frac{2}{5}$

---

٤ في Δ أ ب حـ إذا كان : ٤ جا أ = ٣ جا ب = ٦ جا حـ فإن : ق(∠ حـ) = ...

(أ) $89°$ (ب) $29°$ (جـ) $57°$ (د) $82°$

---

٥ إذا كانت : د (١) = ٢ ، ر (٣) = ٥ فإن : (ر ∘ د) (١) = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ١٥ (د) $\frac{3}{5}$

---

٦ مجموعة حل المعادلة : $2^{2س} - 12 \times 2^{س} + 2^5$ = صفر في ح هي ....

(أ) $\{2 ، 3\}$ (ب) $\{2\}$ (جـ) $\{3\}$ (د) $\{4 ، 8\}$

٧ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{(س + ٢)^{٥} - ٣٢}{س}$ = ...

(أ) ٢٥ (ب) ٦٤ (جـ) ٨٠ (د) ١٠٠

٨ عدد الحلول الممكنة للمثلث ل م ن حيث : ق(∠ ل) = ٤٠°

، لَ = ١٢ سم ، مَ = ١٥ سم يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) عدد لا نهائى.

٩ مجموع جذرى المعادلة : $٢٥^{س} - ١٢ \times ٥^{س} + ٢٧ = ٠$ يساوى ....

(أ) $لو_{٥}$ ١٢ (ب) ١٢ (جـ) $لو_{٥}$ ٢٧ (د) ٢٧

١٠ إذا كان : س = ٥ + ٢ $\sqrt{٦}$ فإن : لو $\left(س + \frac{١}{س}\right)$ = ...

(أ) ١ (ب) ٥ − ٢ $\sqrt{٦}$ (جـ) ١٠ (د) ٥ + ٢ $\sqrt{٦}$

١١ أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٥ $\sqrt{٣}$ سم فإن طول قطر الدائرة المارة

برؤوسه يساوى .... سم.

(أ) ٥ $\sqrt{٣}$ (ب) ١٠ $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٠ (د) ٥

١٢ إذا كانت د : ح ← ح حيث د (س) = (أ + ١) س + ب − ٢ وكانت د (س) تربط

كل عدد حقيقى بنفسه فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (١ ، ٣) (ب) (٠ ، ٣) (جـ) (٠ ، ٢) (د) (١ ، ٢)

١٣ إذا كانت د (س) = $\frac{س^{٢} - ١٦}{س - ٤}$ عند س ≠ ٤ فإن : قيمة د (٤) التى تجعل الدالة

متصلة عند هذا الموضع تساوى ....

(أ) غير معرفة. (ب) $\lim\limits_{س \to ٤} \frac{س^{٢} - ١٦}{س - ٤}$

(جـ) صفر (د) ١٦

١٤ مجموعة حل المعادلة : $لو_{٣}$ س × $لو_{س}$ ٣ = ٥ فى ح هى ....

(أ) {٣٢} (ب) {٥} (جـ) {٣} (د) {٢}

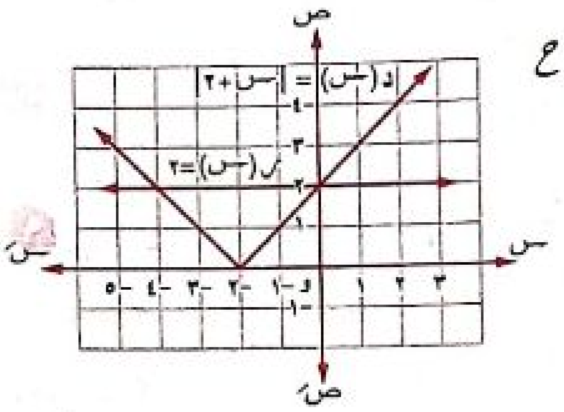
١٥ إذا كان أ ب حـ مثلثًا فيه ق (∠ أ) : ق (∠ ب) : ق (∠ حـ) = ٢ : ٥ : ٤

فإن حـ^٢ : أ^٢ = ...

(أ) $\sqrt{٦}$: ٢ (ب) ٢ : ٣ (جـ) ٤ : ٣ (د) ٣ : ٢

---

١٦ في الشكل المقابل :



مجموعة حل المتباينة د (س) < ر (س) في ح

هي ....

(أ) {−٤ ، ٠}

(ب) [−٤ ، ٠]

(جـ) ح − [−٤ ، ٠]

(د)]−٤ ، ٠[

---

١٧ نوع الدالة د : د (س) = $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ هي ....

(أ) زوجية. (ب) فردية.

(جـ) ليست زوجية وليست فردية. (د) زوجية وفردية.

---

١٨ نهــا$_{\text{س} \leftarrow ٠}$ $\frac{\text{جا } \pi |\text{س}|}{٤ \text{ س}}$ = ...

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) غير موجودة.

---

١٩ إذا كان : س$^{\frac{٣}{٢}}$ = ٨ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ٩

---

٢٠ إذا كانت : نهــا$_{\text{س} \leftarrow ١}$ $\frac{٢ \text{ س} + \text{أ}}{\text{س} + ١}$ = ٥ فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) ١٠

---

٢١ في أي Δ س ص ع يكون : سَ^{٢} + صَ^{٢} − ٢ سَ صَ جتا ع = ...

(أ) سَ^{٢} (ب) صَ^{٢} (جـ) عَ^{٢} (د) عَ

---

٢٢ مجموعة الحل في ح للمتباينة : $\sqrt{٤ \text{ س}^٢ - ١٢ \text{ س} + ٩}$ ≥ ٩ تساوي ....

(أ)]−٣ ، ٦[(ب) [−٣ ، ٦] (جـ) ح − [−٣ ، ٦] (د) ح −]−٣ ، ٦[

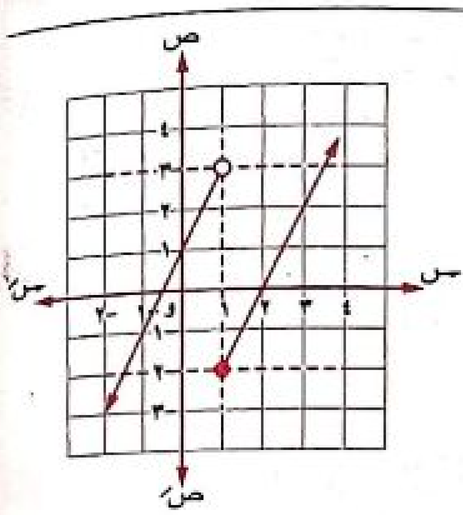
٢٣ مجموعة حل المعادلة : | ٣ − ٢ س | − ٥ س = ٣ فى ح هى ....

(أ) {٠ ، ٣}　(ب) {٠ ، −٢}　(جـ) {٠}　(د) ∅

٢٤ إذا كانت : د (س − ١) = ٢^(س − ٥) ، د (س + ٣) = $\frac{١}{٣٢}$ فإن : س = ...

(أ) −٤　(ب) −٢　(جـ) ٤　(د) ٦

٢٥ إذا كان الشكل المقابل



يمثل منحنى الدالة د فإن :

نهـــا د (س) + د (١⁺) + د (١⁻) = ...
س ← ١

(أ) ٢

(ب) ٣

(جـ) ٤

(د) ٦

٢٦ Δ أ ب حـ محيطه ٣٣ سم ، وكان : حا أ + حا حـ = $\frac{٢}{٣}$ ، حا ب = $\frac{١}{٤}$

فإن : ب = ... سم.

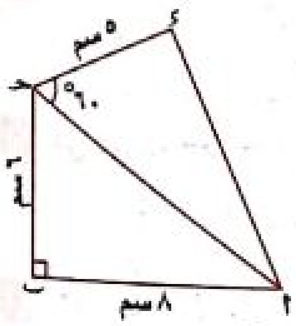
(أ) ٦　(ب) ٩　(جـ) ١٢　(د) [illegible]

٢٧ أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ حـ) = ٢٣ َ ٩٦° ، أ = ٧ سم ، ب = ٩ سم

فإن مساحة Δ أ ب حـ = ... سم٢

(أ) ٢٩　(ب) ٣١　(جـ) ٣٣　(د) ٣٤

٢٨ فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء شكل رباعى فيه :

أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ٦ سم ، ق (∠ ب) = ٩٠°

، ء حـ = ٥ سم ، ق (∠ أ حـ ء) = ٦٠°

فإن مساحة الدائرة المارة برؤوس Δ أ ء حـ = ... سم٢

(أ) ٩ π　(ب) ١٦ π　(جـ) ٢٥ π　(د) ٤٩ π

ثانيا الأسئلة المقالية

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ استخدم منحنى الدالة د حيث د (س) = $\frac{١}{س}$ لتمثيل منحنى الدالة ر حيث ر (س) = د (س – ٢) + ٢ ومن الرسم عيِّن مداها وابحث اطرادها.

---

٢ إذا كانت د (س) = ٢ + $\sqrt{٣ - س}$ فأوجد مجال ومدى د ثم أوجد $د^{-١}$ (س) وعين مجال $د^{-١}$ ومداها.

---

٣ إذا كانت د دالة حيث :

$$د (س) = \begin{cases} س^٢ - س + ٤ & \text{عندما } س < ٢ \\ ك & \text{عندما } س = ٢ \\ ٥ س - ٤ & \text{عندما } س > ٢ \end{cases}$$

(١) ابحث وجود $\lim_{س \to ٢}$ د (س)

(٢) أوجد إن أمكن قيمة ك التي تجعل د متصلة عند س = ٢

---

٤ أوجد قيمتي أ ، ن إذا كانت $\lim_{س \to \infty} \frac{٤ أ س^{ن} - ٤ س + ٥}{٣ - ٩ س + ٨ س^٢} = ٢$

النمـــوذج الثانى

امتحان تفاعلى ٢

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كانت د : ط ⟵ ط حيث د (س) = ٢ س ، ت : ط ⟵ ط حيث

$$ت(س) = \begin{cases} \frac{س}{٢} & ، \quad س \text{ زوجى} \\ \frac{س + ١}{٢} & ، \quad س \text{ فردى} \end{cases}$$

فإن : (د ∘ ت) (٣) − (د ∘ ت) (٨) = ...

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) −٤ (د) −٥

٢ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} \left(\frac{٣}{٥}\right)^{\frac{١}{س}} =$ ....

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) ∞

٣ إذا كانت د : $د(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - ١}{س - ١} & ، \quad س \neq ١ \\ ٢ أ & ، \quad س = ١ \end{cases}$ متصلة عند س = ١

فإن : أ = ...

(أ) صفر (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) ١

٤ △ أ ب جـ فيه : $\frac{أ}{جا أ} = ٦$ سم فإن طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٦

٥ إذا كانت : د دالة فردية وكان س د (س) + $س^٢$ د (−س) = ٢

فإن : د (٢) = ...

(أ) ٣ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{-١}{٢}$ (د) −٣

٦ فى △ س ص ع يكون : $\frac{س^٢ + ص^٢ - ع^٢}{٢ س ص} =$ ....

(أ) جتا س (ب) جتا ص (جـ) جتا ع (د) جا ع

٧ إذا كانت : د (س) = $٣^{-س}$ فإن مجموعة الحل فى ح للمعادلة :

د (٢ س) − ٢٨ د (س) + د (٣) = صفر هى ....

(أ) {١ ، ٢٧} (ب) {٢٧} (جـ) {٠ ، ٣} (د) {٣}

٨ إذا كان : لو أ ∈]٠ ، ١[فإن : أ ∈ ....

(أ)]٠ ، ١[(ب)]١ ، ٢[(جـ)]١ ، ١٠[(د)]١ ، ∞[

---

٩ منحنى الدالة الزوجية يكون متماثلًا حول المستقيم ....

(أ) ص = س (ب) $\overleftrightarrow{ص ص}$ (جـ) $\overleftrightarrow{س س}$ (د) ص = − س

---

١٠ △ ل م ن فيه : $\frac{جا ل}{٣} = \frac{٢ جا م}{٣} = \frac{جا ن}{٤}$ فإن : لَ : مَ : نَ = ...

(أ) ٦ : ٨ : ٣ (ب) ٣ : ٦ : ٨ (جـ) ٨ : ٣ : ٦ (د) ٦ : ٣ : ٨

---

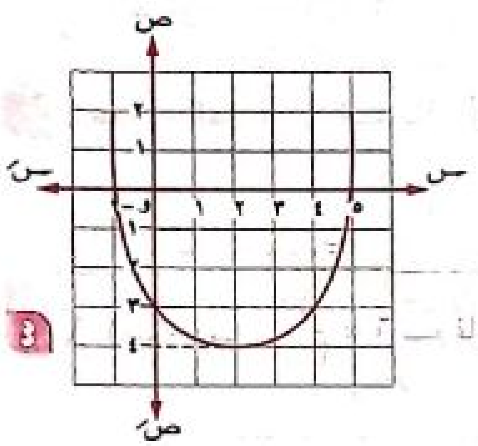
١١ أ ب جـ مثلث فيه : جـَ = ٧ سم ، ق (∠ أ) = ٧٠° ، ق (∠ ب) = ٤٠°

فإن : بَ = ... سم

(أ) ٦,٢ (ب) ٨,٤ (جـ) ٣,٦ (د) ٤,٨

---

١٢ إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د فإن :



$$\lim_{س \to ٢} \frac{[د(س)]^{٢} + د(س) - ١٢}{د(س) + ٤} = ...$$

(أ) −٧ (ب) −٤

(جـ) −١ (د) ٣

---

١٣ مدى الدالة د : د (س) = $\frac{س - ٢}{٢ - س}$ يساوى ....

(أ) ح (ب) ح − {٢} (جـ) ح − {−٢} (د) {−١}

---

١٤ إذا كان : ص = أ$^{٢ لو_{أ} س}$ فإن : ....

(أ) س + ص = ٠ (ب) س = ٢ ص

(جـ) س − ص = ٠ (د) س = $\frac{١}{٢}$ ص

---

١٥ لو$_{٣}$ ٥ × لو$_{٢}$ ٣ × لو$_{٥}$ ١٦ = ...

(أ) ٢٠ (ب) ١٥ (جـ) لو ١٠٠٠٠ (د) لو$_{٢٠}$ ٢٤٠

١٦ المنحنى $\acute{د}$: $\acute{د}$ (س) = $س^٢$ + ٤ هو نفس المنحنى د : د (س) = $س^٢$ بإزاحة مقدارها ٤ وحدات فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{وس}$ (ب) $\overrightarrow{وس}$ (جـ) $\overleftarrow{وص}$ (د) $\overleftarrow{وص}$

---

١٧ الدالة د حيث د (س) = $أ^{س}$ تكون تناقصية على مجالها إذا كان ....

(أ) أ = ١ (ب) أ > ١ (جـ) ٠ < أ < ١ (د) أ = -١

---

١٨ $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}}$ (٢ س + جا س) = ...

(أ) π (ب) π - ١ (جـ) ١ - π (د) π + ١

---

١٩ $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{س^٢}}{س}$ = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) -١ (د) ١

---

٢٠ مجموعة الحل فى ح للمعادلة : | س - ٧ | = ٢ س - ٢ تساوى ....

(أ) {٣ ، -٥} (ب) {٣} (جـ) {-٥} (د) $\emptyset$

---

٢١ إذا كانت : د (س) = $\sqrt[٣]{س}$ فإن الدالة العكسية لها هى $د^{-١}$ (س) = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ $س^٣$ (ب) $س^٣$ (جـ) $س^٣$ - ١ (د) $س^{-\frac{١}{٣}}$

---

٢٢ إذا كان محيط Δ أ ب حـ = ٣٣ سم وكان جا أ + جا حـ = $\frac{٢}{٣}$ ، جا ب = $\frac{١}{٤}$

فإن : أ حـ = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ١٥

---

٢٣ $\lim_{س \to ٠} \frac{جا ٢ س + ٥ ظا ٢ س}{س}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ١٥ (جـ) ٢١ (د) ١٧

---

٢٤ مجموعة حل المتباينة : $\sqrt{س^٢ - ٤ س + ٤}$ > ٠ فى ح هى ....

(أ) ح - {٢} (ب) ح - {-٢} (جـ) ح (د) $\emptyset$

٢٥ عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب حـ حيث : ق (∠ أ) = ١١٠° ، أ = ٧ سم ، ب = ٤ سم هو ....

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) عدد لا نهائى. (د) ٢

٢٦ مجموعة حل المعادلة : لو (س + ٢) + لو (س − ٢) = ١ − لو ٢ فى ح هى ....

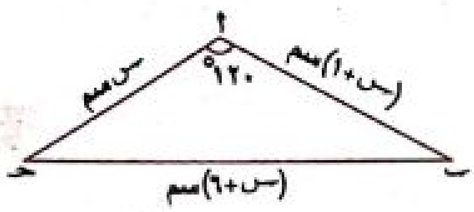
(أ) {لو٥ ١٢٥} (ب) {لو٢ ١٦} (جـ) {لو٣ ٩} (د) {لو١٠ ١٠٠}

٢٧ أ ب حـ مثلث فيه : ب = ٤ سم ، أ + حـ = ١١ سم ، أ − حـ = ١ سم فإن : ....

(أ) المثلث منفرج الزاوية. (ب) المثلث قائم الزاوية.

(جـ) ق (∠ ب) = ٢ ق (∠ أ) (د) ق (∠ أ) = ٢ ق (∠ ب)

٢٨ فى الشكل المقابل :



قيمة س = ... سم

(أ) ٧ (ب) ٨

(جـ) ٩ (د) ١٠

ثانيا الأسئلة المقالية

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ إذا كان : س = ٥ + ٢ $\sqrt{6}$ أوجد فى أبسط صورة قيمة : لو $\left(\frac{1}{س} + س\right)$ بدون الحاسبة.

٢ استخدم منحنى الدالة د : د (س) = $\frac{1}{س}$ لرسم منحنى الدالة ر : ر (س) = $\frac{1}{س - 2}$ + ٣ ومن الرسم عين مجال ومدى ر واطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك ، هل الدالة ر أحادية أم لا ؟

٣ ابحث وجود نهاية د : د (س) = $\begin{cases} س^2 + 1 & \text{لكل } س < 2 \\ 2س + 1 & \text{لكل } س \geq 2 \end{cases}$ عند س = ٢

٤ أوجد قيمة أ إذا كانت نهـــا (س ← ∞) $\frac{\sqrt{أس^2 + 3}}{\sqrt{4س^2 + 7}} = \frac{1}{2}$

النمـــوذج الثالث

امتحان تفاعلي ٣

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان : لو ٣ = س ، لو ٥ = ص فإن : لو ١٥ = ...

(أ) س ص   (ب) $\frac{س}{ص}$ (جـ) س + ص   (د) س − ص

---

٢ $\underset{س \to \infty}{نهــا} \frac{٥ + س^{-٢}}{١ + ٣ س^{-٢}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٥}{٤}$ (جـ) $\frac{٥}{٣}$ (د) ٥

---

٣ إذا كان : $٩^{س} = ٢$ ، $٢٧^{ص} = ٤$ فإن : $\frac{س - ص}{س + ص}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٧}$ (ب) $\frac{-١}{٧}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{-٤}{٣}$

---

٤ إذا كانت : د (س) = $لو_{أ}$ (٢ س + ٤) ، $د^{-١}$ (٥) = ١٤ فإن : أ = ...

(أ) ١   (ب) ٢   (جـ) ٣   (د) ٤

---

٥ $\underset{س \to ١٦}{نهــا} \frac{\sqrt{س} - ١}{س - ١٦}$ = ...

(أ) صفر   (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ١   (د) ليس لها وجود.

---

٦ $\underset{س \to ٠}{نهــا} \frac{س (جا س + جا ٣ س + جا ٥ س)}{جا س}$ = ...

(أ) ١   (ب) ٣   (جـ) ٩   (د) ١٥

---

٧ لو ٢٥ + $\frac{لو ٨ \times لو ١٦}{لو ٦٤}$ = ...

(أ) ٢   (ب) لو ٢   (جـ) ٣   (د) ١

٨ $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{١ - ظا س}{ظتا س - ١} = ...$

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) صفر (د) −١

---

٩ المساحة المحصورة بين منحنيى الدالتين د : د (س) = |س + ٢| − ٢

، ر : ر (س) = صفر هى .... وحدة مربعة.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

---

١٠ إذا كان : لو$_٢$ ص = س فإن الصورة الأسية هى ....

(أ) ص = س^٢ (ب) س = ص^٢ (جـ) س = ٢^{ص} (د) ص = ٢^{س}

---

١١ إذا كانت : د دالة فردية على [− س ، س] فإن : د (− س) + د (س) = ...

(أ) ٢ س (ب) غير معرفة. (جـ) −٢ س (د) صفر

---

١٢ فى Δ أ ب حـ إذا كان : ٢ جا أ = ٣ جا ب = ٤ جا حـ فإن أ : ب : حـ = ...

(أ) ٢ : ٣ : ٤ (ب) ٤ : ٣ : ٢ (جـ) ٢ : ٤ : ٦ (د) ٦ : ٤ : ٣

---

١٣ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٥ - ٣٢}{س^٢ + ٣ س - ١٠} = ...$

(أ) ٨٠ (ب) $\frac{٨٠}{٧}$ (جـ) $\frac{١٦}{٧}$ (د) ١٦

---

١٤ طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ الذى فيه :

ق(∠ أ) = ٣٠° ، أ = ١٠ سم يساوى .... سم

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٥ (د) ٤٠

---

١٥ الدالة د : د (س) = $\begin{cases} س^٢ & ، \quad س < ٢ \\ -س^٢ & ، \quad س \geq ٢ \end{cases}$

متناقصة فى الفترة ....

(أ)]٠ ، ٢[(ب)]−∞ ، ٠[(جـ) ح −]٠ ، ٢[(د)]٠ ، ∞[

١٦ مجال الدالة د : د (س) = لو $_{١ - س}$ س هو ....

(أ) س > ٠ (ب) س < ١ (جـ) ٠ < س < ١ (د) ٠ ≤ س ≤ ١

---

١٧ إذا كانت د : د (س) = $\sqrt{س - ٢}$ ، ر : ر (س) = $\sqrt{٥ - س}$

فإن مجال (د ∘ ر) = ...

(أ)]−∞ ، ٥] (ب)]−∞ ، ١] (جـ) [١ ، ∞[(د) [٥ ، ∞[

---

١٨ مجموعة حل المعادلة : |س + ٢| + س = −٢ فى ح هى ....

(أ) ∅ (ب) ح (جـ)]−∞ ، −٢[(د)]−∞ ، −٢]

---

١٩ قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه ٣ سم ، ٥ سم ، ٧ سم

يساوى ....

(أ) ١٥٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ٦٠° (د) ٣٠°

---

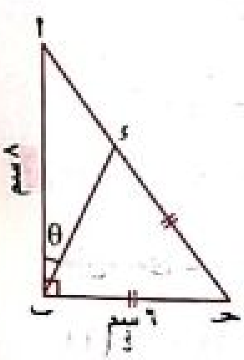
٢٠ أ ب حـ مثلث حاد الزوايا فيه : أ = ٥ سم ، ب = ٧ سم ، ق(∠أ) = ٤٠°

فإن مساحة سطح Δ أ ب حـ تساوى .... سم^{٢}

(أ) ١٦ (ب) ١٧ (جـ) ١٨ (د) ٧

---

٢١ فى الشكل المقابل :



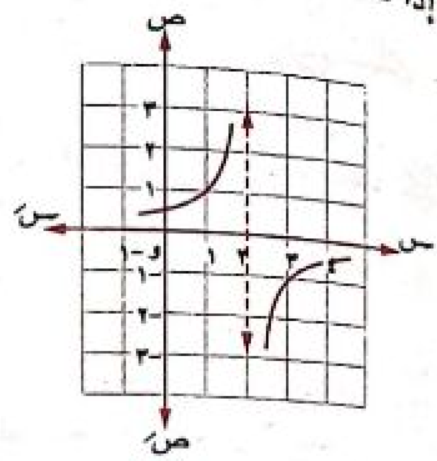
إذا كان : حـ ء = حـ ب = ٦ سم

فإن : ظا θ = ...

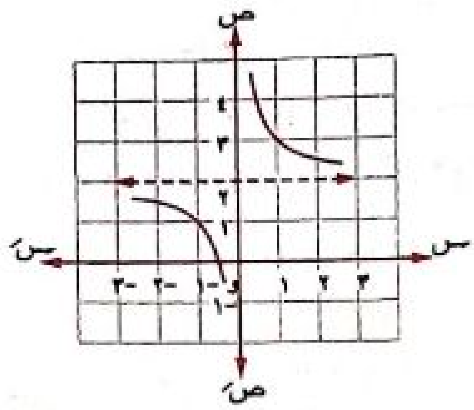
(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$

(جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ٢

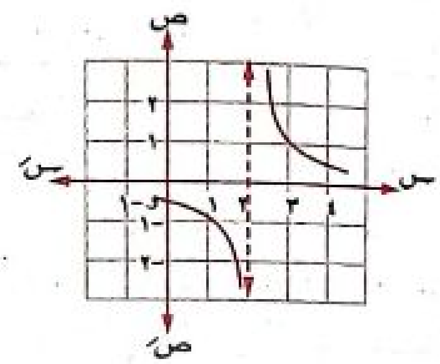
٢٢ إذا كانت د : د (س) = $\frac{١}{س - ٢}$ فإن الشكل الذى يمثل الدالة د هو ....



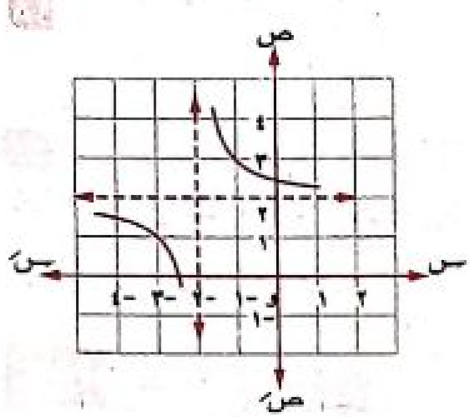
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

---

٢٣ $\lim_{س \to \infty}$ $\frac{\sqrt{٩س^٢ + ٤} + ٥س}{٤س + ٣}$ = ...

(أ) ∞   (ب) ٥   (جـ) ٣   (د) ٢

---

٢٤ مجموعة حل المتباينة : | ٢س − ٦ | + | ٣ − س | > ١٢ هى ....

(أ)]−١ ، ٧[(ب) ح − [−٣ ، ٩]

(جـ) ح − [−١ ، ٧]   (د)]−٣ ، ٩[

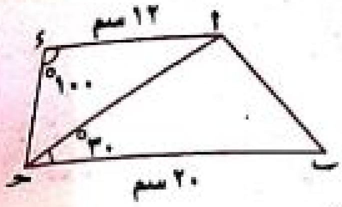
---

٢٥ إذا كان : ٢ لو ص + ٤ لو س − ٣ لو س ص = ٢ (١ − لو ٢) وكان : س = ك ص

فإن : ك = ...

(أ) ٤   (ب) ٥   (جـ) ١٦   (د) ٢٥

٢٦ في الشكل المقابل :



$\overline{أء} // \overline{بحـ}$

، ق (∠ أحـب) = ٣٠° ، بحـ = ٢٠ سم

، ق (∠ أءحـ) = ١٠٠° ، أء = ١٢ سم

فإن : مساحة Δ أبحـ = ... سم^2 تقريبًا.

(أ) ٦٠ (ب) ٧٧ (جـ) ١٠٤ (د) ١٢٠

---

٢٧ إذا كان طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أبحـ يساوي ٣ سم

وكان : حا أ + حا ب + حا حـ = ٢ فإن محيط المثلث أبحـ = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ٢٤

---

٢٨ عدد حلول المثلث س ص ع الذي فيه : سَ = ٥ سم ، صَ = ٦ سم

، ق (∠ س) = ٧٠° يساوي ....

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ١ (د) ٣

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ إذا كانت : د (س) = ٧$^{س + ١}$

أوجد قيمة س التي تحقق : د (٢ س − ١) + د (س − ٢) = ٥٠

---

٢ ارسم الشكل البياني للدالة د : د (س) = { |س| ، س ≤ ٠ ؛ س^2 ، س > ٠ }

ومن الرسم حدد مدى الدالة وابحث اطرادها.

---

٣ إذا كانت د : د (س) = { $\frac{(س + ٣)^5 - ٢٤٣}{س}$ ، س ≠ صفر ؛ ك ، س = صفر }

متصلة عند س = صفر أوجد : قيمة ك

---

٤ إذا كانت : د (س) = $\frac{س^2 + ٢ \sqrt{س^2}}{س}$ ابحث وجود : نهـا د (س) عندما س ← ٠

النمــوذج الرابع

امتحان تفاعلى ٤

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ نهـــا ٥ س ظتا ٢ س = ... (س ← ٠)

(أ) $\frac{٥}{٢}$ (ب) ١٠ (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) صفر

٢ فى Δ أ ب جـ : $\frac{ب^٢ + جـ^٢ - أ^٢}{٢ ب جـ}$ = ...

(أ) جتا أ (ب) جتا ب (جـ) جتا جـ (د) جا أ

٣ مجموعة الحل في ح للمتباينة : | س - ١ | ≤ ٣ يساوى ....

(أ) [-٢ ، ٤] (ب)]-٢ ، ٤[(جـ) ح -]-٢ ، ٤[(د) ح - [-٢ ، ٤]

٤ نهـــا $\frac{س^٢ + س}{س^٢ + ١}$ = ... (س ← -١)

(أ) صفر (ب) $-\frac{١}{٢}$ (جـ) -١ (د) ليس لها وجود.

٥ طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس Δ س ص ع الذى فيه : س َ = ٢٠ جا س سم يساوى .... سم.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢٠ (د) ٤٠

٦ إذا كان : $٢^{س} = ٣^{ص} = ٦$ فأى مما يأتى صحيح ؟

(أ) ص - س = س ص (ب) س - ص = س ص

(جـ) س ص = $\frac{س}{ص}$ (د) س + ص = س ص

٧ مجموعة حل المعادلة : لو ٥ س = -١ فى ح هى ....

(أ) $\{\frac{١}{١٠}\}$ (ب) $\{\frac{١}{٥٠}\}$ (جـ) $\{١\}$ (د) $\{٥٠\}$

٨ نهـا (هـ ← ٠) $\frac{(٢ - ٣هـ)^{٧} - ١٢٨}{٤هـ}$ = ...

(أ) -٣٣٦ (ب) ٣٣٦ (جـ) ١٩٢ (د) -١٩٢

---

٩ إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = لو$_{٤}$ (١ - أس) يمر بالنقطة $\left(\frac{١}{٨} ، \frac{-١}{٢}\right)$

فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٨

---

١٠ | د (س) | = ...

(أ) { د (س) ، س ≥ ٠ ؛ - د (س) ، س < ٠ }

(ب) { د (س) ، س < ٠ ؛ - د (س) ، س ≥ ٠ }

(جـ) { د (س) ، د (س) ≥ ٠ ؛ - د (س) ، د (س) < ٠ }

(د) { د (س) ، د (س) < ٠ ؛ - د (س) ، د (س) ≥ ٠ }

---

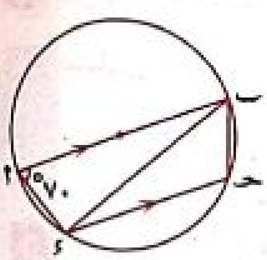
١١ جميع العلاقات الآتية تكون فيها ص دالة فى س ما عدا العلاقة ....

(أ) ص = ٢ س + ١ (ب) ص = س^{٢} - ٤

(جـ) س = ص^{٢} - ٢ (د) ص = جا س

---

١٢ فى الشكل المقابل :



إذا كان : ب حـ = ١٠ سم

فإن محيط Δ ب ء حـ = ... سم.

(أ) ٦٠ (ب) ٦٢

(جـ) ٦٤ (د) ٦٧

---

١٣ إذا كانت : د (س) = ٢^{س} فإن قيمة س التى تحقق المعادلة :

د (س + ١) - د (س - ١) = ٢٤ تساوى ....

(أ) ١٦ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ٢

١٤ إذا كانت : $٣^{س - ٢} = ٢^{س - ٢}$ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) −٢ (ج) صفر (د) ٢

---

١٥ مجال الدالة د : د (س) = $\frac{١}{|س| - ٢}$ هو ....

(أ) {٢ ، −٢} (ب) [−٢ ، ٢]

(ج) ح − [−٢ ، ٢] (د) ح − {−٢ ، ٢}

---

١٦ نقطة رأس منحنى الدالة د : د (س) = $(٢ - س)^٢ + ٣$ هي ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٢ ، −٣) (ج) (−٢ ، ٣) (د) (−٢ ، −٣)

---

١٧ أ ب حـ مثلث فيه ق (∠أ) : ق (∠ب) : ق (∠حـ) = ٣ : ٤ : ٣ فإذا كان : أ = ٥ سم

فإن محيط الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ يساوى تقريبًا .... سم

(أ) ١٧ (ب) ١٨ (ج) ١٩ (د) ١٥

---

١٨ $\lim_{س \to ٠} \frac{٣^{٢س} - ١}{٣^{س+٢} - ٩}$ = ...

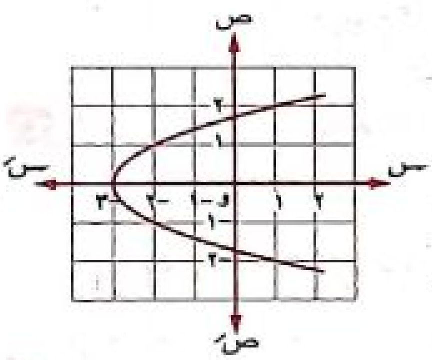
(أ) $\frac{١}{٩}$ (ب) $\frac{٢}{٩}$ (ج) $\frac{٩}{٢}$ (د) $\frac{١}{٦}$

---

١٩ المنحنى الموضح بالشكل المقابل

متماثل حول المستقيم الذى

معادلته ....



(أ) س = صفر (ب) ص = صفر

(ج) ص = −٢ (د) س = ٢

---

٢٠ إذا كانت : ∠أ تكمل ∠حـ فإن : حتا أ + حتا حـ = ...

(أ) ١ (ب) صفر (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) −١

٢١ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \text{جا ٩ س ظتا س} & \text{، } س \in]-\frac{\pi}{٢} \text{ ، } \frac{\pi}{٢}[- \{٠\} \\ ك^٢ & \text{، } س = ٠ \end{cases}$

متصلة عند س = ٠ فإن : ك = ...

(أ) ٣ (ب) ± ٣ (جـ) ٩ (د) ± $\frac{١}{٣}$

---

٢٢ لو (جتا θ) + لو (قا θ) = ... حيث θ ∈ $]٠ \text{ ، } \frac{\pi}{٢}[$

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) -١

---

٢٣ إذا كان : د (س) = | س - ٢ | + ٤ فإن مجموعة حل المعادلة د (س + ٢) = ٦

هى ....

(أ) {٠ ، ٤} (ب) {٢ ، -٢} (جـ) {٢ ، ٤} (د) {-٢ ، -٤}

---

٢٤ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\text{٢ س جتا ٨ س + ٢ جا ٥ س}}{\text{ظا ٢ س}}$ = ...

(أ) ١٣ (ب) ١٠ (جـ) ٩ (د) ٦

---

٢٥ إذا كانت الدالة د : د (س) دالة أحادية ، وكان : د (٢ ك + ٣) = د (ك - ١)

فإن : ك = ...

(أ) -١ (ب) -٢ (جـ) -٣ (د) -٤

---

٢٦ أ ب حـ مثلث فيه : ب حـ = ١٤ سم ، ق (∠ ب) = ٦٠° ومساحة المثلث تساوى ٤٢ $\sqrt{٣}$ سم^٢

فإن : أ ب = ... سم

(أ) ١٤ (ب) ١٢ (جـ) ٧ (د) ٦

---

٢٧ إذا كانت الشروط التالية لا تحقق وجود للمثلث س ص ع حيث س = ١٧ سم

، ق (∠ ص) = ٩٢° فإن : ص يمكن أن يساوى .... سم

(أ) ٢٠ (ب) ٢٥ (جـ) ١٨ (د) ١٦

٢٨ أ ب حـ مثلث فيه : أ = $\sqrt{2}$ سم ، ب = $\sqrt{2}$ ٢ سم ، حـ = ٢ سم

فإن : $\frac{\text{حا أ حا ب}}{\text{حا (أ + ب)}}$ = ...

(أ) $\frac{8}{15}$ (ب) $\frac{-15}{8}$ (جـ) $\frac{-17}{15}$ (د) $\frac{8}{17}$

ثانيا الأسئلة المقالية

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ إذا كانت كل من د ، ر حيث د (س) = ٢ س + أ ، ر (س) = ب س + ٣ دالة عكسية للأخرى فما قيمة كل من أ ، ب ؟

---

٢ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \text{أ س} - 3 & \text{عندما س} < -1 \\ 3\text{ س} - 2 & \text{عندما س} > -1 \end{cases}$

لها نهاية عند س = −١ **أوجد : قيمة أ**

---

٣ ارسم الشكل البيانى للدالة د : د (س) = $\begin{cases} -\text{س}^2 & \text{، س} < 0 \\ \text{س} & \text{، س} \geq 0 \end{cases}$

ومن الرسم أوجد مدى الدالة ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك موضحا اطرادها.

---

٤ أوجد قيمة ك إذا كانت : $\lim_{\text{س} \to -1} \frac{\text{س}^{15} + 1}{\text{س} + 1} = \lim_{\text{س} \to \text{ك}} \frac{\text{س}^5 - \text{ك}^5}{\text{س}^2 - \text{ك}^2}$

النمـــوذج الخامس

امتحان تفاعلى ٥

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ $\lim_{س \to ١} \frac{س^{\frac{1}{2}} ^{١} \frac{1}{2} - س^{\frac{1}{2}}}{س^{\frac{1}{2}} ^{٢} \frac{1}{2} - س^{\frac{1}{2}}} = $ ....

(أ) $\frac{١٣}{٧}$　(ب) ١　(جـ) ٢　(د) س

٢ إذا كان : $٥^{س+١} = ٧^{س+١}$　فإن : $٣^{س+١} = $ ....

(أ) صفر　(ب) ٣　(جـ) ٢　(د) ١

٣ إذا كان : س < ١　فإن : | ٣ − س | − | س − ٤ | = ...

(أ) −١　(ب) ١　(جـ) ٢ س − ٧　(د) ٧ − ٢ س

٤ مجموعة الحل فى ح للمعادلة : | ٢ س − ٤ | = | س + ١ | تساوى ....

(أ) {٠ ، ٥}　(ب) {١ ، ٥}　(جـ) {٢ ، ٥}　(د) {٥}

٥ مجال الدالة د : د (س) = $\frac{\sqrt{س - ٢}}{س - ٣}$ هو ....

(أ) ح　(ب) {٣}　(جـ) [٢ ، ∞[　(د) [٢ ، ∞[− {٣}

٦ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣} & ، س \neq ٣ \\ ٢ أ & ، س = ٣ \end{cases}$ متصلة عند س = ٣

فإن : أ = ...

(أ) ٢　(ب) $\frac{٣}{٢}$　(جـ) −٣　(د) ٣

٧ فى Δ أ ب حـ إذا كان : ق (∠ أ) = ٣٠° ، ب = ١٥ $\sqrt{٣}$ سم ، ق (∠ ب) = ٦٠°

فإن : أ = ... سم

(أ) ٣٠　(ب) ٤٥　(جـ) ١٥　(د) ٦٠

$\underset{س \to \infty}{نهـا}$ (٣ + ٥ $س^{٢}$ + ٣ س) = ...

(أ) غير موجودة. (ب) ٥ (جـ) ∞ (د) ١١

إذا كانت : د (س) = ٤ س − ٥ ، ر (س) = ٢س

فإن : (د ∘ ر) (٢) = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢٧ (د) ٢١

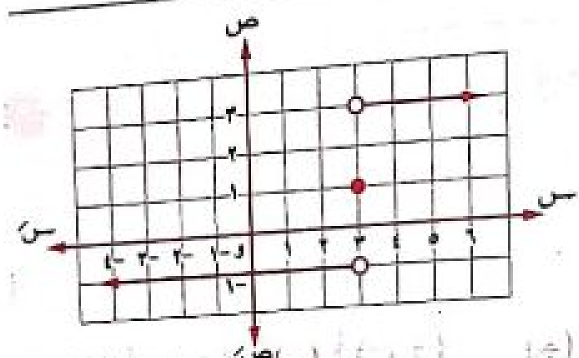
إذا كانت : د (أ) = $٢^{أ}$ فإن : $لو_{٢}$ د (أ) = ...

(أ) ٢ (ب) د (أ) (جـ) أ (د) $\frac{١}{أ^{٢}}$

من الشكل المقابل :

د (٣^{+}) + د (٣) = ...

(أ) ٢ (ب) ٠ (جـ) ٤ (د) ٦



$\underset{س \to ٠}{نهـا}$ ($\frac{جا ٢ س}{س}$ − جتا ٥ س) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

من بين الدوال الآتية الدالة الزوجية هى د (س) = ...

(أ) جاس (ب) جا ٣٠° (جـ) س جتاس (د) $س^{٢}$ + ظاس

فى أى مثلث س ص ع يكون ٢ سَ عَ × .... = $سَ^{٢}$ + $عَ^{٢}$ − $صَ^{٢}$

(أ) جتاس (ب) جتا ع (جـ) جتا ص (د) جاص

إذا كانت : $\underset{س \to -١}{نهـا} \frac{س^{٢} + ك س + م}{س^{٢} - ١}$ = ٢ فإن : ك + م = ...

(أ) −٤ (ب) −٥ (جـ) −٨ (د) −٩

١٦ مدى الدالة د : د $(س) = \frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٠} (ج) ح − {١} (د) ح − {٢}

---

١٧ إذا كان : $\frac{أ + ب}{١٣} = \frac{ب + حـ}{١١} = \frac{حـ + أ}{١٢}$ فإن : جتا أ = ...

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٧}$ (ج) $\frac{١٩}{٣٥}$ (د) $\frac{٤}{١١}$

---

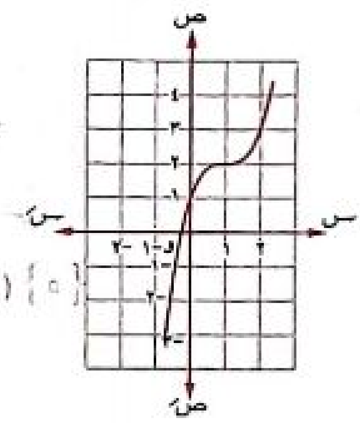
١٨ عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب حـ

حيث : ق (∠ أ) = ٤٧° ، أ = ٤ سم ، ب = ٦ سم يساوى ....

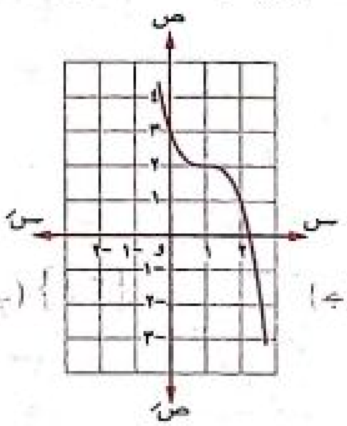
(أ) ١ (ب) صفر (ج) ٢ (د) عدد لا نهائى.

---

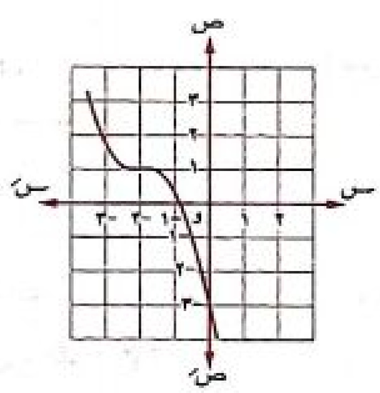
١٩ إذا كانت د : د (س) = ٢ − $(س - ١)^{٣}$ فإن الشكل الذى يمثل الدالة د هو ....



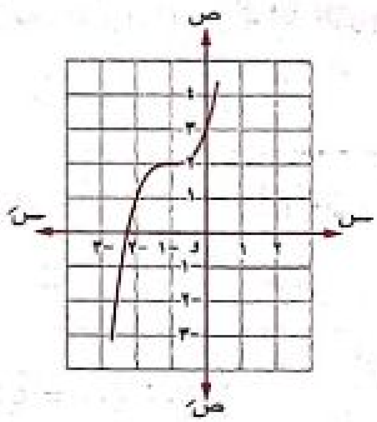
(أ)



(ب)



(ج)



(د)

٢٠ مجموعة حل المعادلة : لو$_{س}$ (س + ٦) = ٢ فى ح هى ....

(أ) {٣ ، -٢} (ب) {٣} (جـ) {٣ ، ١} (د) {٦ ، ١}

---

٢١ الدالة العكسية للدالة د : د (س) = ٨ س^{٣} - ١ هى د$^{-١}$ (س) = ...

(أ) $\sqrt[٣]{س^{٣} - \frac{١}{٨}}$ (ب) $\frac{\sqrt[٣]{س + ١}}{٢}$

(جـ) $٨\sqrt[٣]{س} - ١$ (د) $\frac{\sqrt[٣]{س - ١}}{٢}$

---

٢٢ Δ ل م ن فيه : ق (∠ ل) = ٣٠° ، م ن = ٧ سم فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه يساوى .... سم.

(أ) ٧ (ب) ٣,٥ (جـ) ١٤ (د) $\frac{١٤}{\sqrt{٣}}$

---

٢٣ مجموعة حل المعادلة : ٢$^{س^{٢}}$ = ١٦ فى ح هى ....

(أ) {٢} (ب) {-٢} (جـ) {٢ ، -٢} (د) {٤ ، -٤}

---

٢٤ الدالة د : د (س) = ٥ - س^{٢} - ٤ س تزايدية عندما س ∈ ....

(أ)]٢ ، ∞[(ب)]-٢ ، ∞[(جـ)]-∞ ، ٢[(د)]-∞ ، -٢[

---

٢٥ فى Δ أ ب جـ إذا كان : ٢ جا أ = ٤ جا ب = ٢ جا جـ فإن جيب تمام أصغر زاوية فى Δ أ ب جـ = ...

(أ) $\frac{١١}{٢٤}$ (ب) $\frac{٤٣}{٤٨}$ (جـ) $\frac{٢٩}{٣٦}$ (د) $\frac{١١}{٣٦}$

---

٢٦ مجموعة حل المتباينة : $\sqrt{س^{٢} - ٦ س + ٩} + ٢ \geq ٩$ هى ....

(أ) ح -]-٤ ، ١٠[(ب) ح -]-٨ ، ١٠[

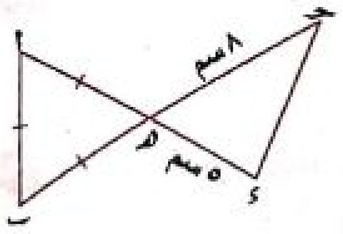
(جـ) [-٤ ، ١٠] (د) [-٨ ، ١٠]

---

٢٧ إذا كان أ ب جـ مثلث فيه : جا (ب + جـ) = $\frac{٣}{٥}$ ، ب جـ = ٨ سم فإن طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب جـ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) ١٠

٢٨ في الشكل المقابل :



حـ ء = ... سم

(أ) ٦	(ب) ٧
(جـ) ٨	(د) ٩

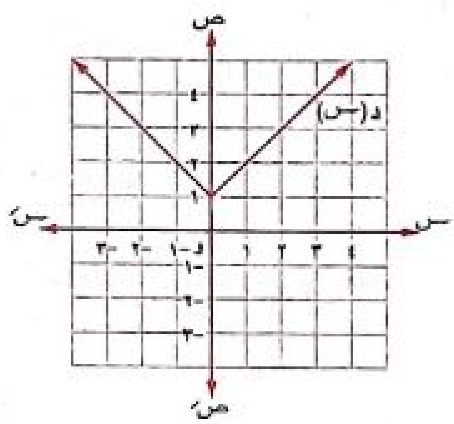
ثانيًا الأسئلة المقالية

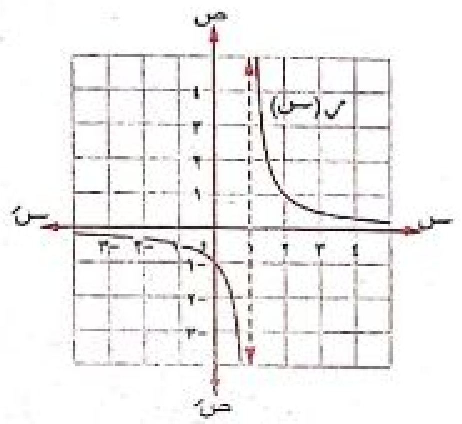
أجب عن الأسئلة الآتية :

١ أوجد مجموعة حل المعادلة :

$\text{٣}^{\text{٢س} - \text{١}} - \text{٤} \times \text{٣}^{\text{س}} + \text{٩} = \text{٠}$ حيث س عدد حقيقى موضحًا خطوات الحل

٢ من الشكلين التاليين :





أوجد (د ∘ ر) ومثلها بيانيًا مبينًا المجال وكونها زوجية أم فردية وابحث تماثلها وكونها أحادية أم لا.

٣ ابحث اتصال الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{س} + \text{جاس}}{\text{٣س} - \text{جا٢س}} & \text{، س} < \text{٠} \\ \text{٣س} - \text{١} & \text{، س} \geq \text{٠} \end{cases}$ عند س = ٠

٤ أوجد قيمة أ إذا كان : $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \dfrac{\text{س}^{\text{١٢}} - \text{أ}^{\text{١٢}}}{\text{س}^{\text{١٠}} - \text{أ}^{\text{١٠}}} = \text{٣٠}$

النمــوذج السادس

امتحان تفاعلى ٦

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كانت : $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ + ٧س + ب}{س^٢ - ٦س + ٨} = \frac{١٥}{٢}$ فإن : ب = ...

(أ) -٤٤ (ب) ٧ (جـ) -٨ (د) ٨

٢ إذا كان : لو$_ب$ س + لو$_ب$ ٣ = لو$_ب$ ٢٧ - ١ فأى مما يأتى يعبر عن س بدلالة ب ؟

(أ) س = ٩ ب (ب) س = $\frac{١}{٩}$ ب (جـ) س = $\frac{٩}{ب}$ (د) س = $\frac{١}{٩ب}$

٣ إذا كان : لو$_٢$ (س + ٢) - لو$_٢$ (س - ١) = لو$_٢$ ٤ فإن : س = ...

(أ) -٢ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) -١

٤ $\lim_{س \to ٠} \frac{س^٢ - ١}{س} = ...$

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) غير موجودة. (د) -١

٥ إذا كان : $س^{\frac{٢}{٣}} = ٦٤$ فإن : س = ...

(أ) ٥١٢ (ب) ١٦ (جـ) ٤ (د) ٢

٦ مساحة سطح الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ المتساوى الأضلاع الذى طول ضلعه ٩ سم تساوى .... سم^٢

(أ) ٩ π (ب) ٩ $\sqrt{٣}$ π (جـ) ٢٧ π (د) ٨١ π

٧ إذا كانت : د (س) = ٣ س - ١ ، ى (س) = س^٢

فإن : (ى ∘ د) (-٢) = ...

(أ) -٧ (ب) ١١ (جـ) -٤٩ (د) ٤٩

٨ $\lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{(س + هـ)^{٧} - س^{٧}}{هـ} = \dots\dots\dots$

(أ) $س^{٧}$ (ب) $٧ س^{٦}$ (جـ) صفر (د) ١

٩ في Δ أ ب جـ يكون : $أ^{٢} + ب^{٢} - جـ^{٢} = \dots\dots\dots$

(أ) جتا أ (ب) أ ب جتا جـ (جـ) جتا جـ (د) ٢ أ ب جتا جـ

١٠ منحنى ر (س) = | س + ٣ | هو نفس منحنى د (س) = | س |

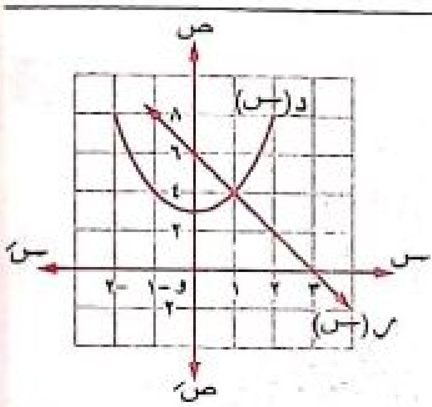
بإزاحة مقدارها ٣ وحدات في اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{و س}$ (ب) $\overleftarrow{و س'}$ (جـ) $\overleftarrow{و ص}$ (د) $\overleftarrow{و ص'}$

١١ مجموعة حل المتباينة : | ٢ - ٢ س | ≥ ١ في ح هي ....

(أ) [١ ، ٢] (ب)]١ ، ٢[(جـ) ح -]١ ، ٢[(د) ح - [١ ، ٢]

١٢ الشكل المقابل يوضح منحنيي الدالتين د ، ر



فإن : (ر ∘ د) (١) = ...

(أ) -٨ (ب) -٢

(جـ) ٤ (د) ٥

١٣ نقطة تماثل الدالة د : د (س) = $\frac{٢ س - ١}{س}$ هي ....

(أ) (١ ، ٢) (ب) (٢ ، ١) (جـ) (٢ ، ٢) (د) (٠ ، ٢)

١٤ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{جا ٢ س^{٢} + ظا^{٢} ٢ س}{٣ س^{٢}} = \dots\dots\dots$

(أ) $\frac{٨}{٣}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) ٢ (د) ٣

١٥ إذا كان : لو (٢ س + ص) = $\frac{١}{٢}$ (لو س + لو ص) + لو ٢ حيث س ≠ ص

وكانت : ص = ك س فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) −٤

١٦ الدالة الزوجية المتصلة عند النقطة (أ ، ب) تكون متصلة أيضًا عند النقطة ....

(أ) (أ ، ب) (ب) (−أ ، ب) (جـ) (أ ، −ب) (د) (−أ ، −ب)

١٧ مدى الدالة د : د (س) = { ٠ ، س ≥ ٠ ؛ ١ ، س < ٠ } هو ....

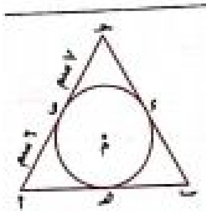
(أ) {١} (ب) {٠} (جـ) ح (د) {٠ ، ١}

١٨ طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث س ص ع الذى فيه :

سَ = ٣ سم ، صَ = ٥ سم ، عَ = ٧ سم يساوى .... سم.

(أ) $\frac{٧}{٣}$ $\sqrt{٣}$ (ب) ٢ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٤,٤ (د) $\frac{١٤}{٣}$ $\sqrt{٣}$

١٩ فى الشكل المقابل :



إذا كان محيط Δ أ ب جـ = ٤٢ سم

، الدائرة م تمس أضلاع المثلث من الداخل

فإن : ق (∠ أ) = ...

(أ) ٧َ ٥٣° (ب) ٢٣َ ٦٧° (جـ) ٥٣َ ٣٦° (د) ٣٧َ ٢٢°

٢٠ إذا كان : $٥^{س - ٣} = ٤^{٣ - س}$ فإن : س = ...

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) ٣ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) صفر

٢١ القيمة العددية للمقدار : $\frac{لو ٦٤}{لو ٨}$ تساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٨ (جـ) ٨٠ (د) ٧٢

... منحنى د (س) = |س + ٢| هو نفس منحنى ... مقدارها ٢ وحدات فى اتجاه ....

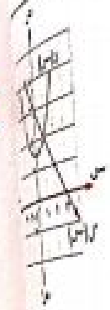
(ب) و س (جـ) و ص

... المتباينة : |٢ − ٢ س| ≥ ١ فى ح هى ....

(أ) [١ ، ٢] (ب)]١ ، ٢[

... الشكل المقابل يوضح منحنى الدالتين د ، ر

... إن : (ر ∘ د) (١) = ...



... −٨ (ب) −٢ ... ٤ (د) ٥

... تماثل الدالة د : د (س) = $\frac{٢ س - ١}{س}$ هى ....

... (٢ ، ١) (ب) (١ ، ٢) (جـ) (٢ ، ٢)

... $\frac{حا ٢ س^٢ + طا^٢ ٢ س}{٢ س^٢}$ = ...

(ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) ٢

٢٢ ء هـ و مثلث فيه : ق(∠ء) = ٨٠° ، ق(∠هـ) = ٦٠° إذا كان وَ = ١٢ سم

فإن : ءَ = ... سم

(أ) $\frac{\text{١٢ جا ٨٠°}}{\text{جا ٤٠°}}$ (ب) $\frac{\text{١٢ جا ٨٠°}}{\text{جا ٦٠°}}$ (جـ) $\frac{\text{١٢ جا ٤٠°}}{\text{جا ٨٠°}}$ (د) $\frac{\text{١٢ جتا ٨٠°}}{\text{جتا ٤٠°}}$

---

٢٣ $\text{نهـا}_{\text{س} \to \infty} \frac{(\text{٢س} + ١)^{٤٠} (\text{٤س} - ١)^{٥}}{(\text{٢س} + ٣)^{٤٥}}$ = ...

(أ) ١٦ (ب) ٣٢ (جـ) ٦٤ (د) ٨

---

٢٤ نقطة تقاطع المنحنى د : د(س) = ٤ − $\frac{٢}{\text{س} - ١}$ مع محور الصادات هى ....

(أ) (٠ ، ٢) (ب) (١ ، ٤) (جـ) (٠ ، ٦) (د) (٠ ، −٢)

---

٢٥ مجموعة حل المعادلة : $٣^{\text{س}+١} + ٣^{٢-\text{س}}$ = ٣٠ فى ح هى ....

(أ) {١ ، ٩} (ب) {$\text{لو}_{٣}$ ٢٧ ، لو ١}

(جـ) {$\text{لو}_{٥}$ ٢٥ ، لو ١} (د) {$\text{لو}_{٣}$ ٢٥ ، $\text{لو}_{٣}$ ٥}

---

٢٦ أ ب حـ مثلث فيه : ق(∠ب) = ٢ ق(∠حـ) = ٨٤° ، أ حـ = ١٦ سم

فإن محيط Δ أ ب حـ = ... سم تقريبا.

(أ) ٨١,٥ (ب) ٦٢,٢ (جـ) ٤١,٣ (د) ٣٨,٥

---

٢٧ إذا كان للمثلث أ ب حـ حيث أ = ١٥ سم ، ق(∠ب) = ٣٠° حل وحيد

فإن : بَ يمكن أن يساوى .... سم.

(أ) ٨ (ب) ٧ (جـ) ٧,٥ (د) ٨,٥

---

٢٨ فى Δ أ ب حـ يكون : حـَ (أَ جتا ب + بَ جتا أ) = ...

(أ) ٢ $\text{حـَ}^{٢}$ (ب) $\text{حـَ}^{٢}$ (جـ) $\text{أَ}^{٢}$ (د) $\text{بَ}^{٢}$

ثانيا الأسئلة المقالية

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ ابحث نوع كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

① $د_١(س) = س جتا س$

② $د_٢(س) = \begin{cases} س^٢ &، س \leq ٠ \\ |س| &، س > ٠ \end{cases}$

---

٢ إذا كانت د : $ح^+ \longrightarrow ح$ حيث $د(س) = \frac{١}{س^٢ + ١}$

أوجد : $د^{-١}(س)$ وعين مجال $د^{-١}$ ومداها.

---

٣ إذا كانت الدالة د حيث $د(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ + ٢س - ٣}{س + ٣} &، س \neq -٣ \\ -٣ + أ &، س = -٣ \end{cases}$

متصلة عند س = −٣ أوجد : قيمة أ

---

٤ إذا كانت : $د(س) = \frac{١}{س^٤}$ أوجد : $\lim_{س \to ٢} \frac{د(س) - د(٢)}{س - ٢}$

النمــوذج السابع

امتحان تفاعلى ٧

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كانت : د (س) = $(١٠)^{٢س}$ ، ر (س) = لو (√س) فإن : (ر ∘ د) (س) = ...

(أ) $١٠^{٢س}$ (ب) لو √س (جـ) $١٠^{٢س}$ لو √س (د) س

---

٢ فى Δ أ ب جـ يكون : $\frac{أ}{أ + ب} = \frac{جا أ}{.........}$

(أ) جا ب (ب) جا جـ (جـ) جا أ + جا ب (د) جا أ + جا جـ

---

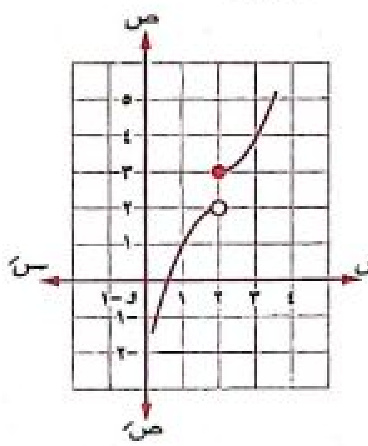
٣ فى Δ أ ب جـ إذا كان : جا أ = ٢ جا جـ ، ب جـ = ٦ سم فإن : أ ب = ... سم.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٦

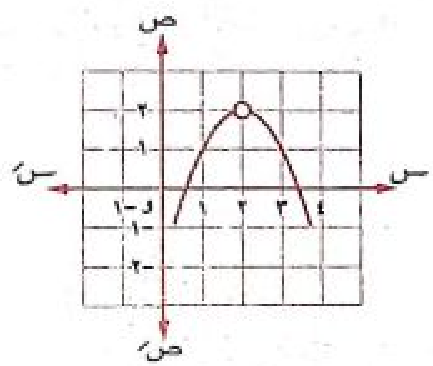
---

٤ الشكل الذى يبين الدالة المتصلة عندما س = ٢ هو الشكل ....

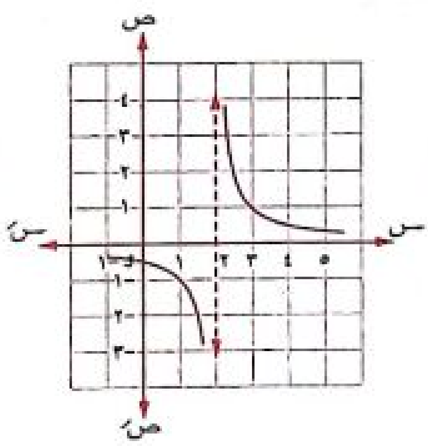
(أ)



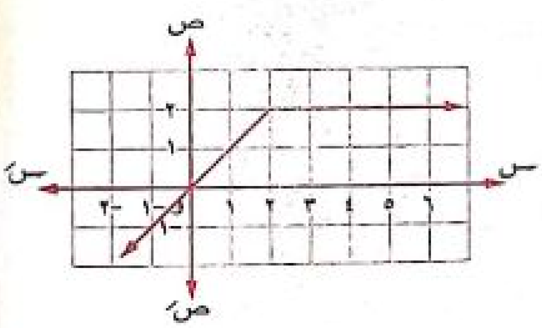
(ب)



(جـ)



(د)



٥ مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{س + ٢}$ + $\sqrt{٥ - س}$ هو ....

(أ)]-٢ ، ∞[(ب)]-٢ ، ٥[(جـ) [-٢ ، ٥] (د)]٣ ، ∞[

٦ في Δ أ ب جـ يكون : $ب^٢ + جـ^٢ - أ^٢$ = ٢ ب جـ × ....

(أ) جا (٩٠° - ب) (ب) جا (٩٠° - أ)

(جـ) جتا ب (د) جتا (٩٠° - ب)

٧ عدد الحلول الممكنة للمثلث س ص ع الذي فيه :

ق (∠ س) = ٣٠° ، س ع = ٦ سم ، ص ع = ٩ سم يساوي ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) عدد لا نهائي.

٨ نهـــا$_{س \leftarrow ١}$ $\frac{٤ - \sqrt{س + ١٥}}{١ - س^٢}$ = ...

(أ) $\frac{١}{١٦}$ (ب) ١٦ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) ٤

٩ إذا كان طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب جـ يساوي ٦ سم

فإن : $\frac{٢ أ}{جا أ}$ = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ٦ (جـ) ١٨ (د) ٢٤

١٠ مجموعة حل المعادلة : $(لو_٥ ص)^٢ - ٧ لو_٥ ص + ١٢ = ٠$ في ح هي ....

(أ) {٢٥ ، ١٢٥} (ب) {٢٥ ، ٦٢٥}

(جـ) {$\frac{١}{٢٥}$ ، ٦٢٥} (د) {١٢٥ ، ٦٢٥}

١١ $لو_٢ \frac{٣}{٢٥} + ٥ لو_٢ ٥ + لو_٢ ٢٧ - لو_٢ \frac{١٢٥}{١٢} - لو_٣ ٢٤٣$ = ...

(أ) ٤ (ب) $لو_٢ ٩$ (جـ) لو ٢٥ (د) لو $\frac{١}{١٠٠}$

١٢ إذا كانت : نهـــا$_{س \leftarrow ١}$ $\frac{س^٢ - ك^٢}{س + ٢}$ = -١ فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) -٢ (جـ) ٤ (د) ± ٢

١٣ إذا كانت د : د (س) = س^{٣} + ١ فأى العبارات الآتية غير صحيحة ؟

(أ) د دالة أحادية.

(ب) د دالة فردية.

(جـ) د تزايدية على مجالها.

(د) منحنى الدالة د يقطع محور السينات عند س = −١

---

١٤ إذا كان : لو$_{٢}$ س = ٣ فإن : لو$_{س}$ ٢ = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) ٨ (د) ٩

---

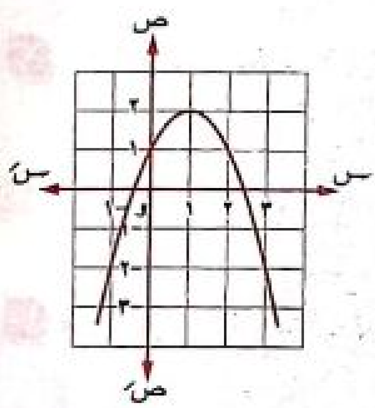
١٥ إذا كانت : د$^{-١}$ هى الدالة العكسية للدالة د فإن : ....

(أ) مجال د$^{-١}$ = مجال د (ب) مجال د$^{-١}$ = مدى د

(جـ) مدى د$^{-١}$ = مدى د (د) مدى د$^{-١}$ = مجال د$^{-١}$

---

١٦ قاعدة الدالة التى تمثل الشكل المقابل هى



د (س) = ...

(أ) (س − ٢)^{٢} + ١

(ب) − (س − ٢)^{٢} + ١

(جـ) − (س − ١)^{٢} + ٢

(د) (− س + ١)^{٢} + ٢

---

١٧ مجموعة حل المعادلة : | ٢ س − ١ | = ٥ فى ح هى ....

(أ) {٣} (ب) {−٢} (جـ) ∅ (د) {٣ ، −٢}

---

١٨ إذا كانت الدالة د : د (س) = { س − ٤ ، س ≥ ٤ ؛ ر (س) ، س < ٤ } متماثلة حول المستقيم س = ٤

فإن : الدالة ر تكون ....

(أ) تزايدية. (ب) تناقصية. (جـ) زوجية. (د) ثابتة.

١٩ $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{٣س + ٢س^{-١}}{س + ٤س^{-١}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ٢ (د) ٤

٢٠ إذا كان: أ ∈]٠، ٩[فإن: $لو_٣$ أ ∈ ....

(أ)]-∞، ٢[(ب)]٢، ٨١[(جـ)]٢، ∞[(د)]-∞، ٠[

٢١ $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\dfrac{١}{س - ٢} + ١\right)$ = ...

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) صفر (د) ∞

٢٢ مجموعة الحل في ح للمعادلة: $\sqrt{س^٢ - ٦س + ٩} + ٢س = ٩$ تساوي ....

(أ) {٤، ٦} (ب) {٦} (جـ) {٤} (د) ∅

٢٣ مجموعة الحل في ح للمتباينة: |س − ٣| ≥ ٢ هي ....

(أ)]١، ٥[(ب) [١، ٥] (جـ) ح −]١، ٥[(د) ح − [١، ٥]

٢٤ إذا كانت الدالة د: د(س) = $\begin{cases} \dfrac{س^٢ - ٤}{س - ٢} & ، س \neq ٢ \\ ك & ، س = ٢ \end{cases}$

متصلة عند س = ٢ فإن: ك = ...

(أ) صفر (ب) ٨ (جـ) ٢ (د) ٤

٢٥ إذا كانت: $ب^{س} - ٢ب^{-س} = ١$ حيث ب > ١ فإن: س = ...

(أ) ٢ (ب) لو ٢ (جـ) $لو_٢$ ب (د) $لو_ب$ ٢

٢٦ إذا كان: أ ب جـ مثلث مساحته ٢٤ سم^٢، وطول نصف قطر الدائرة الخارجة عنه ٥ سم

فإن: جا أ جا ب جا (أ + ب) = ...

(أ) $\frac{٣}{٢٥}$ (ب) $\frac{٦}{٢٥}$ (جـ) $\frac{٩}{٢٥}$ (د) $\frac{١٢}{٢٥}$

٢٧ أ ب جـ مثلث فيه : ب = ٢ سم ، جـ = ٢,٥ سم ، جا أ = $\frac{٢}{٥}$

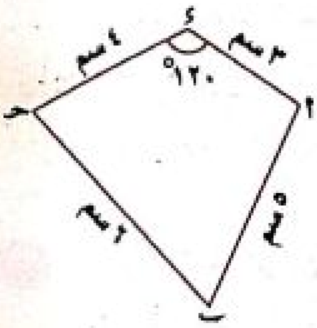
فإن : Δ أ ب جـ يكون ....

(أ) قائم الزاوية. (ب) متساوى الساقين.

(جـ) متساوى الأضلاع. (د) مختلف الأضلاع.

---

٢٨ فى الشكل المقابل :



جا ب = ...

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$

(جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة : $س^{\frac{٤}{٣}} - ١٠ س^{\frac{٢}{٣}} + ٩ =$ صفر

---

٢ ابحث وجود نهاية للدالة د حيث :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{طا ٢ س}{جا س} & \text{عندما } س < ٠ \\ \frac{٥ س + ٦}{س + ٣} & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$$

عندما س تؤول إلى الصفر.

---

٣ إذا كان د (س) = $س^٢ - ٣$ ، ر (س) = $\sqrt{س - ٢}$ أوجد : (د ∘ ر) (س)

فى أبسط صورة محددًا المجال ثم أوجد : (د ∘ ر) (٣)

---

٤ إذا كانت : $\lim_{س \to ٢} \frac{س^ن - ٦٤}{س - ٢} =$ ل أوجد قيمتى : ن ، ل

النمــوذج الثامن

امتحان تفاعلى ٨

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ لو$_{أ}$ س ÷ لو$_{أب}$ س = ...

(أ) ١ - لو$_{أ}$ ب (ب) ١ + لو$_{أ}$ ب (جـ) ١ - لو$_{ب}$ أ (د) ١ + لو$_{ب}$ أ

---

٢ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٣ س^{٢} + أ س - ٢ & ، س < ٢ \\ ٢ س + ب & ، س > ٢ \end{cases}$

وكان : نهـــا$_{س \leftarrow ٢}$ د (س) = ١٦ فإن : أ + ب = ...

(أ) ٤ (ب) ١٠ (جـ) -١٣ (د) ٧

---

٣ طول قطر الدائرة الداخلة للمثلث المتساوى الأضلاع الذى طول ضلعه ٤ $\sqrt{٣}$ سم يساوى .... سم.

(أ) ٢ $\sqrt{٣}$ (ب) ٤ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٤ (د) ٨

---

٤ قيمة : لو$_{٣}$ ٥٤ - لو$_{٣}$ $\frac{٨}{١٥}$ + لو$_{٣}$ $\frac{٤}{٥}$ = ...

(أ) لو ٣ (ب) ٣ (جـ) ٢٧ (د) ٤

---

٥ إذا كانت : ص = د (س) منحنى دالة حقيقية فإن صورته بإزاحة قدرها ٢ وحدة جهة اليمين هى ر (س) = ...

(أ) د (س - ٢) (ب) د (س + ٢) (جـ) د (س) + ٢ (د) د (س) - ٢

---

٦ عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب جـ حيث : ق (∠ أ) = ٦٠° ، ب جـ = ٣ سم ، أ ب = ٥ سم هو ....

(أ) ١ (ب) ٢

(جـ) لا يوجد مثلث. (د) عدد لا نهائى من المثلثات.

---

٧ نهـــا$_{س \leftarrow صفر}$ $\frac{س^{٢} + س}{س}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٨ في Δ أ ب جـ يكون : جتا (أ + ب) = ...

(أ) $\frac{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 - \text{جـ}^2}{2\,\text{أ}\,\text{ب}}$ (ب) $\frac{\text{أ}^2 + \text{جـ}^2 - \text{ب}^2}{2\,\text{أ}\,\text{جـ}}$ (جـ) $\frac{\text{ب}^2 + \text{جـ}^2 - \text{أ}^2}{2\,\text{ب}\,\text{جـ}}$ (د) $\frac{\text{جـ}^2 - \text{أ}^2 - \text{ب}^2}{2\,\text{أ}\,\text{ب}}$

---

٩ إذا كان : $1 < \text{س} < 2$ فإن : $\sqrt{\text{س}^2 - 2\text{س} + 1} + \sqrt{\text{س}^2 - 4\text{س} + 4}$ = ...

(أ) $2\text{س} - 3$ (ب) $2\text{س} - 1$ (جـ) 1 (د) 3

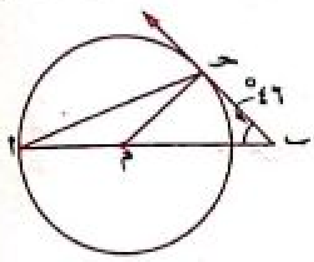
---

١٠ مجال الدالة د : د(س) = $\sqrt{\frac{\text{س} - 5}{\text{س} + 4}}$ = ...

(أ) $]5, \infty[$ (ب) $[-4, 5]$ (جـ) $\text{ح} - [-4, 5[$ (د) $\text{ح} -]-4, 5]$

---

١١ في الشكل المقابل :



إذا كان : أ جـ = ٢٠ سم

فإن محيط Δ أ جـ م = ... سم.

(أ) ٤١٫٦ (ب) ٤٣٫٥ (جـ) ٤٥ (د) ٤٧٫٥

---

١٢ $3^{\text{لو}_3 4} + \text{لو}_5 25$ = ...

(أ) ٦ (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) ١

---

١٣ مجال الدالة د : د(س) = $\sqrt{9 - \text{س}}$ هو ....

(أ) ح (ب) $\text{ح} - \{9\}$ (جـ) $]-\infty, 9]$ (د) $[9, \infty[$

---

١٤ $\lim_{\text{س} \to 5} \frac{\text{س}^2 - 5\text{س}}{\sqrt{\text{س} + 4} - 3}$ = ...

(أ) ٣٠ (ب) ٦ (جـ) ٥ (د) ٢٥

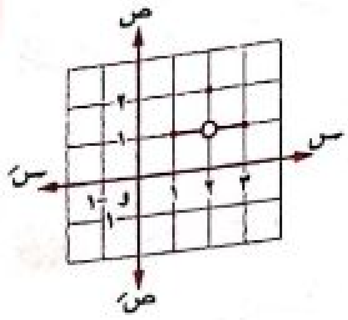
---

١٥ مجال الدالة د : د(س) = $\text{لو}_{1 - \text{س}}\, \text{س}$ هو ....

(أ) $0 < \text{س}$ (ب) $1 > \text{س}$ (جـ) $0 < \text{س} < 1$ (د) $0 \le \text{س} \le 1$

١٦ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فأى من الجمل الآتية صحيح ؟



(أ) د متصلة على الفترة [١ ، ٣]

(ب) د متصلة على الفترة]١ ، ٣[

(جـ) $\lim_{س \leftarrow أ}$ د (س) موجودة حيث أ ∋ [١ ، ٣]

(د) $\lim_{س \leftarrow أ}$ د (س) موجودة حيث أ ∋]١ ، ٣[

---

١٧ $\lim_{س \leftarrow \infty} \left(\frac{٣ س^٢ + ٢ س + ١}{س^٢ - ٣ س + ٢} \right)^٤ =$ ....

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢٧ (د) ٨١

---

١٨ أى مما يأتى لا يساوى ($\sqrt[٥]{س^٤}$) ؟

(أ) $\left(\sqrt[٥]{س} \right)^٤$ (ب) $\sqrt[٤]{س^٥}$ (جـ) $س^{\frac{٤}{٥}}$ (د) $\left(س^{\frac{١}{٥}} \right)^٤$

---

١٩ إذا كانت الدالة د دالة زوجية فى الفترة [حـ ، ء] فإن : حـ + ء = ...

(أ) ٢ حـ (ب) ٢ ء (جـ) حـ − ء (د) صفر

---

٢٠ إذا كانت : د (س) = (س − ٥) (س + ٥) ، ر (س) = س − ٥

فإن : $\frac{د}{ر}$ (٥) = ...

(أ) ١٠ (ب) ١ (جـ) $\frac{د}{ر}$ (−٥) (د) غير معرفة.

---

٢١ إذا كان : $\left(\frac{١}{٢} \right)^{أ^٢ - أ - ٢} = ١$ حيث أ > صفر فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) −٣ (جـ) ٢ (د) ٣

---

٢٢ Δ أ ب حـ الذى فيه : ق (∠ حـ) = ١١٦° ، حـَ = ١٢ سم ، أَ = ١٠ سم

يكون : بَ = ... سم (لأقرب جزء من عشرة).

(أ) ٢,٦ (ب) ٣,٦ (جـ) ٤,٦ (د) ٥,٦

٢٣ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتا} س + \text{ظا} ٥ س}{١ - \text{جتا} س - \text{ظا} س} =$ ....

(أ) −٥ (ب) ٥ (جـ) صفر (د) غير معرفة.

---

٢٤ Δ أ ب حـ فيه : جتا ب = $\frac{حـ}{٢ أ}$ فإن : Δ أ ب حـ يكون ....

(أ) متساوى الأضلاع. (ب) متساوى الساقين.

(جـ) مختلف الأضلاع. (د) قائم الزاوية.

---

٢٥ مجموعة حل المتباينة : $\frac{١}{|٢ س - ٣|} > ٢$ فى ح هى ....

(أ) $[\frac{٥}{٤} ، \frac{٧}{٤}] - \{\frac{٣}{٢}\}$ (ب) $]\frac{٥}{٤} ، \frac{٧}{٤}[$

(جـ) $]\frac{٥}{٤} ، \frac{٧}{٤}[- \{\frac{٣}{٢}\}$ (د) $[\frac{٥}{٤} ، \frac{٧}{٤}]$

---

٢٦ الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد التالية هى ....

(أ) $د_١$ (س) = س + ٥ (ب) $د_٢$ (س) = $س^٢$

(جـ) $د_٣$ (س) = | س − ٢ | (د) $د_٤$ (س) = −٣

---

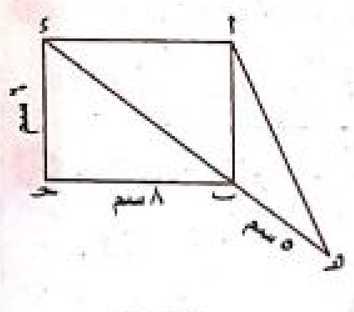
٢٧ إذا كان : أ ب حـ مثلث فيه : ٦ أ = ٤ ب = ٣ حـ

فإن قياس أصغر زوايا المثلث ≃ ....

(أ) ٢٨ ٥٧° (ب) ١٢ ٤١° (جـ) ٥٧ ٢٨° (د) ٥٢ ٣٦°

---

٢٨ فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء مستطيل فيه : ء حـ = ٦ سم

، ب حـ = ٨ سم ، هـ ∈ $\overleftrightarrow{ءب}$ حيث : ب هـ = ٥ سم

فإن : أ هـ = ... سم

(أ) $\sqrt{٩٣}$ (ب) $\sqrt{٩٧}$ (جـ) ١٠ (د) $\sqrt{١٠٣}$

ثانيا الأسئلة المقالية

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ إذا كان : د (س) = $٥^{س}$ فأوجد فى ح مجموعة حل المعادلة : د (س) + د (س − ١) = ١٥٠

٢ إذا كانت د : ح ⟵ ح حيث د (س) = ٤ س − ٢ ، ى : [−٢ ، ٢] ⟵ ح

حيث ى (س) = ٤ − ٣ س ارسم الدالة (د + ى) محددًا مجالها ومداها وابحث اطرادها.

٣ أوجد قيمة أ التى تجعل الدالة د متصلة عند أ حيث د (س) = { ٢ − $س^{٢}$ ، س ≤ أ ؛ س ، س > أ }

٤ أوجد قيمة كل من : م ، ك إذا كانت :

نهـا (س ⟵ ٢) د (س) = ٧ ، د (س) = { $س^{٢}$ + ٢ م ، س < ٢ ؛ ٥ س + ك ، س > ٢ }

النمـــوذج التاسع

امتحان تفاعلى ٩

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ مجموعة حل المعادلة : لو$_{(س + ٢)}$ ١٢٥ = ٣ فى ح هى ....

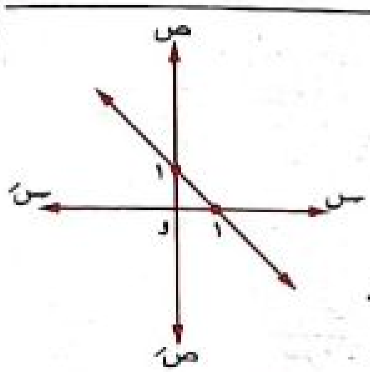
(أ) {٥} (ب) {٣} (جـ) ∅ (د) {٢}

٢ △ ل م ن الذى فيه : ق (∠ ل) = ٣٠° ، مَ = ٩ سم يكون له حلان عندما لَ = ... سم.

(أ) ٦ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ٢

٣ إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن : نهــــا$_{س ← ٢}$ | د (س) | = ...



(أ) -١ (ب) صفر

(جـ) ١ (د) غير موجودة.

٤ إذا كانت د : ح ← ح حيث د (س + ١) - د (س) = س - ١

فإن : د (١٠) - د (٩) = ...

(أ) ١ (ب) ٩ (جـ) ٨ (د) ١٨

٥ نهــــا$_{س ← ٠}$ $\frac{٢ س}{جا ٣ س}$ = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) ٦ (د) ليس لها وجود.

٦ صورة المنحنى : ص = | س | - ٥ بالانتقال ٣ وحدات فى اتجاه و س⃖ ، ٥ وحدات فى اتجاه و ص⃖ هى ....

(أ) ص = | س - ٣ | + ٥ (ب) ص = | س - ٣ |

(جـ) ص = | س - ٣ | - ١٠ (د) ص = | س + ٣ |

٧ $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{س + ٥} - \sqrt{٥}}{\sqrt{س} - \sqrt{٥}}$ = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ∞ (د) $-\infty$

٨ إذا كانت : د (س) = $\sqrt[٥]{س}$ فإن الدالة العكسية لها $د^{-١}$ (س) = ...

(أ) $\frac{١}{٥}$ $س^٥$ (ب) $س^٥$ (جـ) $س^٥ - ١$ (د) ٥ $س^٥$

٩ فى Δ أ ب حـ يكون : حـَ (أَ جتا ب + بَ جتا أ) = ...

(أ) $أَ^٢$ (ب) $بَ^٢$ (جـ) $حـَ^٢$ (د) ٢ $حـَ^٢$

١٠ أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ ب = ٩ سم ، ب حـ = ١٣ سم ، أ حـ = ٢٠ سم

فإن : طول $\overline{ب ء}$ = ... سم.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢,٥ (د) ٤

١١ إذا كان : د (س) = س − ١ ، ر (س) = $\sqrt{س}$ فإن مجال (ر ∘ د) هو ....

(أ) ح (ب)]−∞ ، ١] (جـ) [١ ، ∞[(د) ح − {١}

١٢ $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ \sqrt{س} - ١٢٨}{س - ٤}$ = ...

(أ) ١١٢ (ب) ٩٦ (جـ) ٨٤ (د) ٧٢

١٣ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\frac{\sqrt{س^٢ - ٢ س + ١}}{س - ١}$ فإن مدى الدالة د هو ....

(أ) {١} (ب) ح (جـ) [−١ ، ١] (د) {−١ ، ١}

١٤ مجموعة الحل فى ح للمعادلة :

$لو_٢ س - \frac{٣}{لو_٢ س}$ = ٢ تساوى ....

(أ) {−١ ، ٣} (ب) {٨ ، $\frac{١}{٢}$} (جـ) {٨ ، ٢} (د) {$\frac{١}{٨}$ ، ٢}

١٥ $\lim_{هـ \to ٠} \frac{(س + هـ)^٩ - س^٩}{هـ}$ = ...

(أ) $س^٩$ (ب) ٩ $س^٨$ (جـ) صفر (د) غير موجودة.

١٦ إذا كان : $أ > ب > جـ > ١$ فإن : $لو_{جـ} لو_{ب} لو_{أ} أ^{ب^{جـ}} =$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) أ ب جـ

---

١٧ إذا كان أ ب جـ مثلث فيه : $أ = ٤$ سم ، $ب = ٤\sqrt{٣}$ سم ، $جـ = ٨$ سم

فإن جيب قياس أصغر زاوية فيه يساوى ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (جـ) ١ (د) صفر

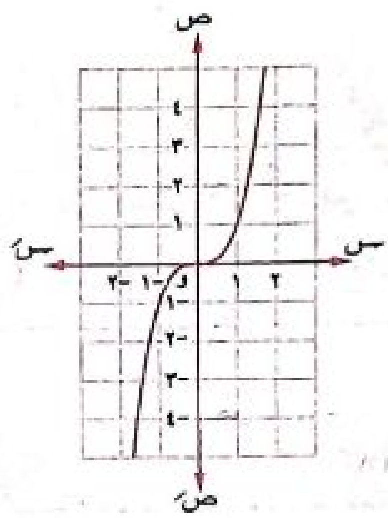
---

١٨ إذا كان : $س = ٥ + ٢\sqrt{٦}$ فإن : $لو \left(\frac{١}{س} + س\right) =$ ....

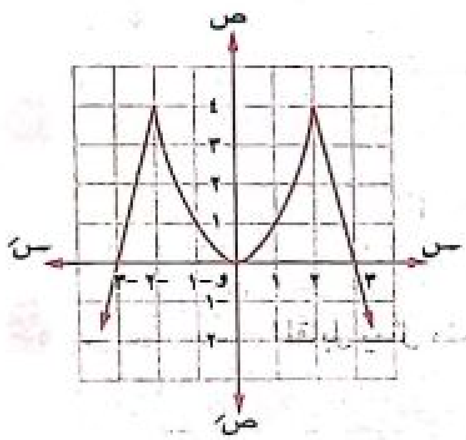
(أ) ١ (ب) $٥ - ٢\sqrt{٦}$ (جـ) ١٠ (د) $٥ + ٢\sqrt{٦}$

---

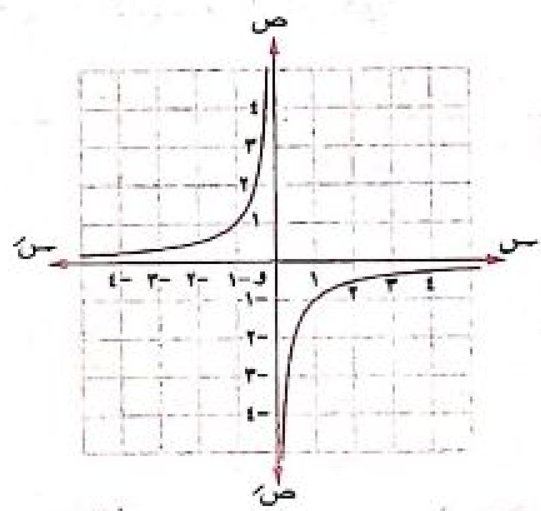
١٩ أى من الدوال الممثلة بيانيًا كالتالى تكون ليست زوجية وليست فردية ؟



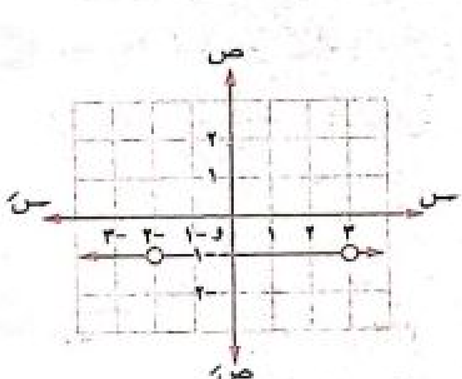
(أ)



(ب)

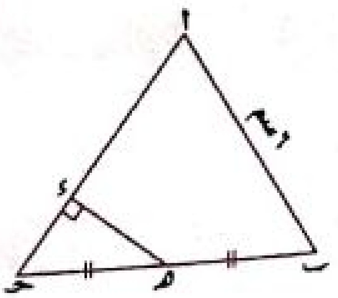


(جـ)



(د)

٢٠ في الشكل المقابل :



إذا كان : طا (∠ ء هـ حـ) = $\frac{٣}{٤}$

فإن طول نصف قطر الدائرة المارة

برؤوس Δ أ ب حـ = ... سم.

(أ) ٩ (ب) ٥,٧ (جـ) ٤ $\frac{٣}{٤}$ (د) ٣,٧٥

---

٢١ إذا كانت : د (س) = $س^٢$ + |س| حيث س عدد حقيقى

فإن مجموعة حل المعادلة د (س) = ٢ فى ح تساوى ....

(أ) {-٢} (ب) {-٢ ، -١ ، ١}

(جـ) {١ ، -١} (د) {١}

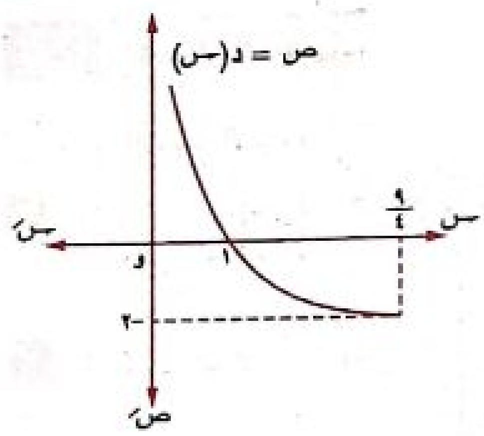
---

٢٢ نهـــا (س ← ٢) $\sqrt{٤ - س^٢}$ = ...

(أ) -١ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) غير موجودة.

---

٢٣ إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى



الدالة د : د (س) = $لو_م$ س

فإن : $لو_م \frac{١٦}{٨١}$ = ...

(أ) -٢ (ب) ١

(جـ) ٢ (د) ٤

---

٢٤ إذا كان محيط المثلث أ ب حـ = ٣٢ سم ، حا أ + حا حـ = $\frac{٢}{٣}$ ، حا ب = $\frac{١}{٤}$

فإن : أ حـ = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ١٥

٢٥ مدى الدالة د : د (س) = $\frac{س + ١}{س + ٢}$ يساوى ....

(أ) ح (ب) ح − {−٢} (جـ) ح − {١} (د) ح$_+$

٢٦ إذا كانت الدالة د : د (س) = أ س + ب ، د$^{-1}$ (٩) = ٣ ، د$^{-1}$ (٥) = ٢

فإن : أ + ب = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ٧ (د) −٧

٢٧ أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ٦٠° ، ب حـ : حـ = ٥ : ٨ وكانت مساحة الدائرة المارة برؤوس المثلث تساوى ١٤٧ π سم^2 فإن : محيط Δ أ ب حـ = ... سم

(أ) ٢١ (ب) ٢٤ (جـ) ٥٤ (د) ٦٠

٢٨ Δ س ص ع فيه : ق (∠ س) = ١٠٠° ، س = ٣ سم ، ص = ٤ سم

هذه الشروط ....

(أ) تحقق وجود مثلث وحيد. (ب) تحقق وجود مثلثين.

(جـ) تحقق وجود ثلاثة حلول. (د) لا تحقق وجود أى مثلث.

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ إذا كانت : د (س) = ٣ + $\sqrt{س - ١}$ أوجد الدالة العكسية.

٢ إذا كانت الدالة د : د (س) =
$$\begin{cases} س^2 + أ س - ٢ &، س < ٢ \\ ٤ &، س = ٢ \\ ٥ أ + ب س &، س > ٢ \end{cases}$$
متصلة عند س = ٢

أوجد قيمة كل من : أ ، ب

٣ ارسم منحنى الدالة د : د (س) = $\sqrt{س^2 - ٤ س + ٤}$ وعين مداها وابحث اطرادها.

٤ إذا كانت : د (س) =
$$\begin{cases} س |س| + ٢ &، س < ٠ \\ \frac{|س|}{س} + ١ &، س > ٠ \end{cases}$$
أوجد : $\lim_{س \to ٠}$ د (س)

النمـــوذج العاشر

امتحان تفاعلى ١٠

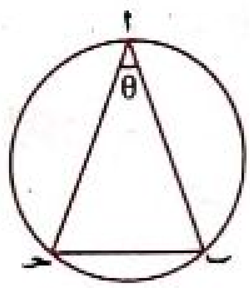
أولا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ لو ظا ١° + لو ظا ٢° + لو ظا ٣° + ... + لو ظا ٨٨° + لو ظا ٨٩° = ...

(أ) صفر　(ب) ١　(جـ) ١٠　(د) ٨٩

٢ فى الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة

طول نصف قطرها ٤ سم

، ق(∠ ب أ حـ) = θ°

فإن : نهـــا (θ ← ٠) $\frac{ب حـ}{θ^ء}$ = ...

(أ) ٢　(ب) ٤　(جـ) ٦　(د) ٨

٣ إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا المثلث هى ٨ : ٣ : ١ فإن النسبة بين طولى أكبر ضلعين فى المثلث هى ....

(أ) $\sqrt{٣}$: ٢　(ب) $\sqrt{٦}$: ٢　(جـ) ٨ : ٣　(د) ٨ : ٥

٤ إذا كان : $٣^أ = ٤^ب$　فإن : $٩^{\frac{أ}{ب}} + ١٦^{\frac{ب}{أ}}$ = ...

(أ) ٧　(ب) ١٢　(جـ) ٢٠　(د) ٢٥

٥ إذا كانت : نهـــا (س ← ∞) $\frac{٢ ك |س|}{٤ س + ٣} = ٦$　فإن : ك = ...

(أ) ٦　(ب) $\frac{٣}{٤}$　(جـ) ٨　(د) ٣

٦ إذا كانت د : د (س) = $س^٣$ فإن صورة منحنى د بالانعكاس فى محور السينات والانتقال ٣ وحدات فى اتجاه و س ووحدتين فى اتجاه و ص هى ....

(أ) $-(س - ٣)^٣ - ٢$　(ب) $-(س + ٣)^٣ + ٢$

(جـ) $-(س + ٣)^٣ - ٢$　(د) $-[(س + ٣)^٣ + ٢]$

٧ إذا كان : د (س) = س + ١ ، ر (س) = $\frac{س^٢ - ١}{س - ١}$

فإن : $\lim_{س \to ١}$ (ر ٥ د) س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) −٢ (د) ٣

---

٨ إذا كان : لو$_٢$ ٣ × لو$_٣$ ٤ × لو$_٤$ ٥ × ... × لو$_ن$ (ن + ١) = ١٠ فإن : ن = ...

(أ) ٩ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ١٠٢٣

---

٩ مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt[ن]{س^٢ - ١}$ هو ....

(أ)]−١ ، ١[(ب) [−١ ، ١] (جـ) ح −]−١ ، ١[(د) ح − {−١ ، ١}

---

١٠ أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ١١٢° ، ق (∠ ب) = ٣٣° ، حَ = ١٩ سم

فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه = ... سم

(أ) ١٦ (ب) ١٧ (جـ) ٣٢ (د) ٣٣

---

١١ إذا كان : $٢^{س}$ = ٢٠ ، ن < س < ن + ١ ، ن عددًا صحيحًا فإن : ن = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ١٠

---

١٢ فى ∆ س ص ع يكون صَ^{٢} + عَ^{٢} − سَ^{٢} = ٢ صَ عَ × ....

(أ) حتا س (ب) حا ع (جـ) حتا ع (د) حا س

---

١٣ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٢س - ١ & ، س \neq ٢ \\ ٦ & ، س = ٢ \end{cases}$

فإن : $\lim_{س \to ٢}$ د (س) = ...

(أ) −٥ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ليس لها وجود.

---

١٤ إذا كان : د (س) = لو$_٢$ (س + أ) وكان : $د^{-١}$ (٢) = −٢ فإن : أ = ...

(أ) −٧ (ب) ٧ (جـ) ٣ (د) ١

---

١٥ تكون الدالة الأسية التى أساسها أ تزايدية إذا كانت : ....

(أ) أ > ٠ (ب) أ > ١ (جـ) ٠ < أ < ١ (د) أ = ١

١٦ $\lim_{س \to \infty}$ (٤ − ٣ س − $س^٣$) = ...

(أ) ∞ (ب) غير موجودة. (جـ) −١ (د) −∞

١٧ إذا كانت د دالة فردية ، أ ∋ مجال د فإن : د (أ) + د (− أ) = ...

(أ) ٢ د (أ) (ب) ٢ د (− أ) (جـ) صفر (د) د (أ)

١٨ إذا كانت : د دالة فردية فإن : $\frac{٢ د (٣) + ٧ د (−٣)}{١٠ د (−٣)}$ = ...

(أ) ٢ (ب) −٣ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) − $\frac{١}{٢}$

١٩ إذا كانت : د (س) = $\sqrt{س + ٣}$ ، ر (س) = $\sqrt{٦ − س}$

فإن : (د ∘ ر) (٥) = ...

(أ) غير معرفة. (ب) صفر (جـ) ٥ (د) ٢

٢٠ مدى الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٢ س + ٣ & ، س > ٢ \\ ٩ & ، س < ٢ \end{cases}$ هو ....

(أ) {٣} (ب) ح (جـ)]٩ ، ∞[(د) [٩ ، ∞[

٢١ في Δ أ ب حـ إذا كان : ق (∠ ب) = ٦٠° ، ق (∠ حـ) = ٣٠° ، حَ = ٤ سم

فإن : بَ = ... سم.

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ٢ $\sqrt{٣}$ (د) ٤ $\sqrt{٣}$

٢٢ إذا كانت مساحة Δ أ ب حـ هي م ، نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه

فإن : $\frac{٤ \text{ نق} \times م}{أَ بَ حَ}$ = ...

(أ) $\frac{أ}{جا أ}$ (ب) جا أ (جـ) ١ (د) نق

٢٣ إذا كان : $\lim_{س \to أ^+}$ د (س) = ل ، $\lim_{س \to أ^-}$ د (س) = م وكانت الدالة متصلة

عند س = أ فإن : $ل^٢ + م^٢ − ٢$ ل م = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) صفر (د) ٦

٢٤ إذا كان : أَ = جا ب ، بَ = جا حـ ، حَ = جا أ فإن محيط الدائرة المارة برؤوس

المثلث أ ب حـ يساوي ....

(أ) ١ (ب) ٢ π (جـ) $\frac{١}{٢}$ π (د) π

٢٥ مجموعة الحل في ح للمتباينة : $\sqrt{٩ س^٢ - ١٢ س + ٤}$ + ٢ | ٤ - ٦ س | ≤ ٢٠

هي ....

(أ) ح -] $\frac{-٢}{٣}$ ، ٢ [(ب)] - $\frac{٢}{٣}$ ، ٢ [

(جـ) ح - [$\frac{-٢}{٣}$ ، ٢] (د) [$\frac{-٢}{٣}$ ، ٢]

---

٢٦ إذا كانت : د (س) = $(س + ١)^٣$ فإن : $د^{-١}$ (س) = ...

(أ) $(س + ١)^٣$ (ب) $\sqrt[٣]{س}$ - ١ (جـ) $\sqrt[٣]{س}$ + ١ (د) $س^٣$ - ١

---

٢٧ في المثلث أ ب حـ أي من العبارات التالية صحيحة ؟

(أ) حا أ + حتا ب = أ + ب (ب) أ حا ب = ب حا أ

(جـ) أ = ب حا حـ (د) $\frac{أ}{حا أ} = \frac{حا ب}{ب}$

---

٢٨ إذا كان للمثلث س ص ع حيث س ص = ١٠ سم ، ق (∠ ص) = ٥٠° حلان

فإن : ص ع يمكن أن يساوى .... سم

(أ) ٦ (ب) ١١ (جـ) ٧,٦٦ (د) ٨

ثانيا الأسئلة المقالية

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} س^٢ + أ س - ٢ & ، س < ٢ \\ ٤ & ، س = ٢ \\ ٥ أ + ب س & ، س > ٢ \end{cases}$ متصلة عند س = ٢

أوجد قيمتي : أ ، ب

---

٢ أوجد جبريًا في ح مجموعة حل المعادلة : | س - ٣ | = | ٩ - ٢ س |

---

٣ إذا كانت : د (س) = $٧^{س + ١}$

فأوجد قيمة س التي تحقق : د (٢ س - ١) + د (س - ٢) = ٥٠

---

٤ إذا كانت : $\lim_{س \to أ}$ | ٣ س + ٢ | = ١٤ **فما قيمة : (أ) ؟**



إجابات الاختبارات التراكمية القصيرة في الجبر

الاختبار الأول

١ ١ (جـ) ٢ (د) ٣ (جـ) ٤ (أ)

٢
١ تزايدية في]٠ ، ٢[وثابتة في]٢ ، ∞[
٢ تزايدية في]-١ ، ٠[وتناقصية في]٠ ، ٤[
٣ تناقصية في]-∞ ، ١[وتزايدية في]١ ، ∞[

الاختبار الثاني

١ ١ (جـ) ٢ (جـ) ٣ (جـ) ٤ (ب) ٥ (د) ٦ (جـ)

٢
١ (د ∘ ر) (س) = $\frac{١}{س + ٢}$
، مجال (د ∘ ر) = ح - {-٢}
٢ (ر ∘ د) (س) = $\frac{١}{س}$ + ٢
، مجال (ر ∘ د) = ح - {٠}

الاختبار الثالث

١ ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (أ)

٢ (د١ + د٢) (س) = س٥ + جا س ونوعها فردية

الاختبار الرابع

١ مثل بنفسك ، المدى = [٠ ، ∞[والنوع : ليست زوجية وليست فردية الاطراد : تناقصية في]-∞ ، ٠[وتزايدية في]٠ ، ∞[

٢ المجال = ح - {٢} وأثبت بنفسك

٣ مثل بنفسك ، المجال = ح - {-١}
، المدى = ح - {-٢}
الاطراد : تزايدية في ح - {-١}

٤
مثل بنفسك ، المدى =]١ ، ٢[∪ {-١}

الاختبار الخامس

١ ١ (جـ) ٢ (أ) ٣ (جـ) ٤ (أ) ٥ (جـ) ٦ (ب)

٢
مثل بنفسك ، المدى = [٠ ، ∞[والنوع : زوجية
الاطراد : تناقصية في]-∞ ، -٢[،]٠ ، ٢[
وتزايدية في]-٢ ، ٠[،]٢ ، ∞[

الاختبار السادس

١ ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (جـ) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦ (د)

٢
١ م.ح = {٤}
٢ م.ح = [$\frac{٥}{٤}$ ، $\frac{٧}{٤}$] - {$\frac{٣}{٢}$}

الاختبار السابع

١ ١ (ب) ٢ (أ) ٣ (ب) ٤ (د) ٥ (أ) ٦ (أ)

٢
١ م.ح = {١ ، -١ ، ٢٧ ، -٢٧}
٢ م.ح = {٦}

الاختبار الثامن

١ ١ (د) ٢ (جـ) ٣ (جـ) ٤ (ب) ٥ (د) ٦ (ب)

٢
د (ن) = ٦٠ (١ + ٠,٢٥)ن ، ٢٢٩ نخلة تقريبًا

الاختبار التاسع

١ ١ (أ) ٢ (أ) ٣ (ب) ٤ (د) ٥ (ب) ٦ (جـ)

٢
١ المجال = ح - {-١} ، المدى = ح - {٢}
٢ د-١ (س) = $\frac{-س + ٣}{س - ٢}$ ، مجال د-١ = ح - {٢}
، مدى د-١ = ح - {-١}

الاختبار العاشر

١ ١ (جـ) ٢ (جـ) ٣ (جـ) ٤ (جـ) ٥ (ب) ٦ (أ)

٢
١ مجموعة الحل = {٨}
٢ مجموعة الحل = {-١ ، ٥}

الاختبار الحادي عشر

١ ١ (جـ) ٢ (أ) ٣ (جـ) ٤ (ب) ٥ (أ) ٦ (د)

٢ أثبت بنفسك.

إجابات الاختبارات التراكمية القصيرة فى التفاضل

الاختبار الأول

1. ① ١ ② ٤ ③ غير معرفة ④ ٢
2. ① (د) ② (د) ③ (جـ)

الاختبار الثانى

1. ① (أ) ② (د) ③ (جـ) ④ (جـ)
2. ① ١/٤ ② ٧/٤ ③ ٣٢ ④ ١

الاختبار الثالث

1. ① (أ) ② (د) ③ (ب) ④ (أ) ⑤ (أ) ⑥ (د)
2. ① ٦٤ ② ٥

الاختبار الرابع

1. ① (د) ② (ب) ③ (ب) ④ (د)
2. ① ٢ ② ١/٤ ③ ∞ ④ ٧

الاختبار الخامس

1. ① (جـ) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (جـ) ⑤ (جـ) ⑥ (ب)
2. ① ٢ ② ١/٤

الاختبار السادس

1. ① (جـ) ② (ب) ③ (أ) ④ (د) ⑤ (أ) ⑥ (جـ)
2. نهـا (س ← ٢) د (س) = -١

الاختبار السابع

1. ① (د) ② (أ) ③ (جـ) ④ (جـ) ⑤ (جـ) ⑥ (أ)
2. الدالة د متصلة عند س = ١

إجابات الاختبارات التراكمية القصيرة فى حساب المثلثات

الاختبار الأول

1. ① (د) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (ب)
2. ب ≃ ١٨,٠٤ سم ، نق = ١٦,٥٦ سم

الاختبار الثانى

1. ① (جـ) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (جـ) ⑤ (د) ⑥ (د)
2. مساحة الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب جـ ≃ ٢٥,٠٩ π سم²

الاختبار الثالث

1. ① (جـ) ② (أ) ③ (جـ) ④ (أ) ⑤ (جـ) ⑥ (ب)
2. يوجد حلان ، حـ ≃ ٢٧,٣ سم أ ، ٨,٧ سم

إجابات نماذج اختبارات الكتاب المدرسى فى الجبر

الاختبار الأول

١

① (د) ② (جـ) ③ (أ) ④ (أ)

٢

(أ) ① مجال د =]-∞ ، ١[
② مجال ى = ح - {١ ، -١}

(ب) ارسم بنفسك ، المدى =]٠ ، ∞[

٣

(أ) ارسم بنفسك
- المجال = [-٢ ، ٣]
- الدالة تزايدية على الفترة]-٢ ، ٣[

(ب) ص = س - ١ ومثل بنفسك.

٤

(أ) ① م.ح = {٤} ② م.ح = {١/٢}

(ب) ارسم بنفسك.

٥

(أ) مجموعة الحل = ح -]-٥/٣ ، ٣[

(ب) مجموعة الحل = {٢٧ ، -٢٧ ، ١ ، -١}

الاختبار الثانى

١

① (د) ② (ب) ③ (د) ④ (ب)

٢

(أ) أثبت بنفسك. (ب) ٦

٣

(أ) مثل بنفسك.

(ب) ① ارسم بنفسك ، المدى = [٠ ، ∞[
، الدالة تناقصية فى الفترة]-∞ ، ٢[
وتزايدية فى الفترة]٢ ، ∞[

② ارسم بنفسك ، المدى = [٠ ، ٢]
، الدالة تناقصية فى الفترة]٠ ، ٠,٢٧[
،]٢ ، ٣,٧٣[
، تزايدية فى الفترة]٠,٢٧ ، ٢[
،]٣,٧٣ ، ٤[

٤

(أ) ① فردية ② ليست زوجية وليست فردية.
③ زوجية

(ب) ① مجموعة الحل =]-∞ ، ٠]
② مجموعة الحل = ∅

٥

(أ) ارسم بنفسك ، المجال = ح - {-١}
، المدى = ح - {-٢} ، تزايدية على ح - {-١}

(ب) ٢

إجابات نماذج اختبارات الكتاب المدرسى فى التفاضل وحساب المثلثات

الاختبار الأول

١

① (جـ) ② (ب) ③ (د) ④ (جـ)

٢

(أ) ① $\frac{٨}{٧}$ ② ١٧

(ب) ق (∠ أ) = ٤٨° ٢٥ ، ق (∠ ب) = ٦٢° ١٤

، ق (∠ جـ) = ٦٨° ١١ ، جـ = ٢٦ سم

٣

(أ) ① صفر ② ١ ③ غير موجودة

(ب) محيط متوازى الأضلاع = ٣٨ سم

٤

(أ) ق (∠ ب) = ٦٤° ٩ أو ١١٥° ٥١

(ب) أ = $-\frac{١}{٢}$.

٥

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{١٦}$

الاختبار الثانى

١

① (د) ② (د) ③ (أ) ④ (جـ)

٢

(أ) أ = -١٠

(ب) ق (∠ جـ) = ٩٠° ، مساحة Δ أ ب جـ = ٢٤ سم²

٣

(أ) $\frac{٣}{٢}$

(ب) جـ = ١٩,٥٠٤ سم ، ق (∠ أ) = ٢٦° ٢٠

، ق (∠ ب) = ٤٧° ٤٠

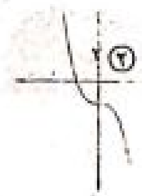
٤

(أ) $-\frac{٥}{٤}$

(ب) أثبت بنفسك ، مساحة الشكل أ ب جـ و = ١٢٤ سم²

٥

(أ) ① $\frac{١}{٤}$ ②



(ب) ٦١,٩ سم²

إجابات امتحانات مدارس المحافظات

١ محافظة القاهرة

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

① (د) ② (أ) ③ (جـ) ④ (ب)
⑤ (د) ⑥ (جـ) ⑦ (ب) ⑧ (جـ)
⑨ (أ) ⑩ (ب) ⑪ (ب) ⑫ (د)
⑬ (ب) ⑭ (أ) ⑮ (ب) ⑯ (ب)
⑰ (أ) ⑱ (جـ) ⑲ (د) ⑳ (أ)
㉑ (ب) ㉒ (جـ) ㉓ (ب) ㉔ (أ)
㉕ (جـ) ㉖ (أ) ㉗ (د) ㉘ (أ)

ثانياً الأسئلة المقالية

١

$$\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{س-١}-٢}{س-٥} \times \frac{\sqrt{س-١}+٢}{\sqrt{س-١}+٢}$$

$$= \lim_{س \to ٥} \frac{س-١-٤}{(س-٥)(\sqrt{س-١}+٢)}$$

$$= \lim_{س \to ٥} \frac{١}{\sqrt{س-١}+٢} = \frac{١}{٤}$$

٢

$$لو ٢٥ + \frac{لو ٨ \times لو ١٦}{لو ٦٤} = لو ٢٥ + \frac{لو ٨ \times لو ٤^٢}{لو ٨^٢}$$

$$= لو ٢٥ + \frac{لو ٨ \times ٢ لو ٤}{٢ لو ٨}$$

$$= لو ٢٥ + لو ٤$$

$$= لو ٢٥ \times ٤ = لو ١٠٠ = ٢$$

٣

∵ الدالة د متصلة عند س = ٢

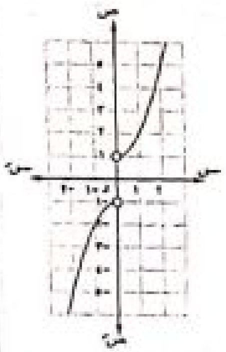
∴ د (٢⁺) = د (٢⁻) = د (٢)

∴ ٣ × ٩ + ٢ أ − ٢ = ١٦

∴ أ = −٣ ، ٢ × ٣ + ب = ١٦

∴ ب = ١٠ ∴ أ + ب = −٣ + ١٠ = ٧

٤



من الرسم :

- مدى الدالة د = ح − [−١ ، ١]
- الدالة تزايدية فى ح − {٠}

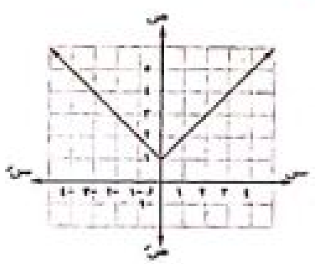
٢ محافظة الجيزة

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

① (أ) ② (د) ③ (جـ) ④ (د)
⑤ (د) ⑥ (د) ⑦ (د) ⑧ (ب)
⑨ (جـ) ⑩ (د) ⑪ (أ) ⑫ (أ)
⑬ (جـ) ⑭ (أ) ⑮ (ب) ⑯ (جـ)
⑰ (أ) ⑱ (د) ⑲ (جـ) ⑳ (جـ)
㉑ (أ) ㉒ (أ) ㉓ (ب) ㉔ (ب)
㉕ (د) ㉖ (ب) ㉗ (جـ) ㉘ (ب)

ثانياً الأسئلة المقالية

١



من الرسم :

- المدى = [١ ، ∞[
- الاطراد :

الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٠[وتزايدية فى]٠ ، ∞[

- النوع : الدالة زوجية.

٢

∵ د متصلة على ح

∴ د متصلة عند س = -١ ، س = ٢

∴ $\text{د}(-١^-) = \text{د}(-١^+) = \text{د}(-١)$

∴ أ × -١ + ب = ٤ × -١

∴ -أ + ب = -٤ (١)

، $\text{د}(٢^-) = \text{د}(٢^+) = \text{د}(٢)$

∴ ٢أ + ب = -٣ × ٢

∴ ٢أ + ب = -٦ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\text{أ} = \frac{-٢}{٣}$ ، $\text{ب} = \frac{-١٤}{٣}$

٣

$٢^{\text{س}} + \frac{٢^٥}{٢^{\text{س}}} = ١٢$ بالضرب × $٢^{\text{س}}$

∴ $٢^{٢\text{س}} + ٣٢ = ١٢ \times ٢^{\text{س}}$

∴ $٢^{٢\text{س}} - ١٢ \times ٢^{\text{س}} + ٣٢ = ٠$

∴ $(٢^{\text{س}} - ٨)(٢^{\text{س}} - ٤) = ٠$

∴ $٢^{\text{س}} = ٨$ ∴ س = ٣

أو $٢^{\text{س}} = ٤$ ∴ س = ٢

∴ مجموعة الحل = {٣ ، ٢}

٤

$\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جاس}}{\sqrt{\text{س}+١} - ١} \times \frac{\sqrt{\text{س}+١} + ١}{\sqrt{\text{س}+١} + ١}$

$= \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جاس}(\sqrt{\text{س}+١} + ١)}{\text{س} + ١ - ١}$

$= \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جاس}}{\text{س}} \times \lim_{\text{س} \to ٠} (\sqrt{\text{س}+١} + ١)$

$= ١ \times (\sqrt{٠ + ١} + ١) = ١ \times ٢ = ٢$

٢ محافظة الاسكندرية

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (ب)	② (د)	③ (جـ)	④ (أ)
⑤ (ب)	⑥ (جـ)	⑦ (جـ)	⑧ (جـ)
⑨ (د)	⑩ (أ)	⑪ (ب)	⑫ (أ)
⑬ (د)	⑭ (ب)	⑮ (أ)	⑯ (د)
⑰ (ب)	⑱ (أ)	⑲ (ب)	⑳ (د)
㉑ (جـ)	㉒ (د)	㉓ (أ)	㉔ (جـ)
㉕ (د)	㉖ (أ)	㉗ (ب)	㉘ (أ)

ثانيا الأسئلة المقالية

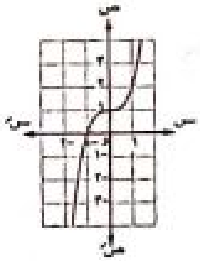
١

المجال = ح

، المدى = ح

النوع : الدالة ليست فردية وليست زوجية.

الاطراد : الدالة تزايدية على مجالها ح



٢

$٥^{٢\text{س}+١} + ٥^{٢\text{س}+٢} = ١٥٠$

∴ $٥^{٢\text{س}}(٥ + ٥^٢) = ١٥٠$

∴ $٥^{٢\text{س}}(٣٠) = ١٥٠$ ∴ $٥^{٢\text{س}} = ٥$

∴ ٢ س = ١ ∴ $\text{س} = \frac{١}{٢}$

∴ مجموعة الحل = $\{\frac{١}{٢}\}$

٣

① $\lim_{\text{س} \to ١} \frac{\sqrt{٤\text{س}+٥} - ٣}{\text{س} - ١} \times \frac{\sqrt{٤\text{س}+٥} + ٣}{\sqrt{٤\text{س}+٥} + ٣}$

$= \lim_{\text{س} \to ١} \frac{٤\text{س} + ٥ - ٩}{(\text{س} - ١)(\sqrt{٤\text{س}+٥} + ٣)}$

$= \lim_{\text{س} \to ١} \frac{٤(\text{س} - ١)}{(\text{س} - ١)(\sqrt{٤\text{س}+٥} + ٣)}$

$= \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

② $\lim_{\text{س} \to -١} \frac{(٢\text{س}^٢ + \text{س} - ١)(٢\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ١)}{\text{س} + ١}$

$= \lim_{\text{س} \to -١} \frac{(٢\text{س} + ١)(٢\text{س} + ٣)}{(\text{س} + ١)}$

$= \lim_{\text{س} \to -١} \frac{(٢\text{س} + ١) \times ٢(\text{س} + ١)}{(\text{س} + ١)}$

$= (٢ \times -١ + ١) \times ٢ = -٦$

٤

∵ د(٢) = $٢^٢$ + ٢ × ٢ + ٢ = ١٨

، ∵ $\text{د}(٢^+) = \lim_{\text{س} \to ٢^+} \frac{\text{س}^٤ - ٨١}{\text{س}^٢ - ٩}$

$= \lim_{\text{س} \to ٢^+} \frac{(\text{س}^٢ + ٩)(\text{س}^٢ - ٩)}{(\text{س}^٢ - ٩)} = ١٨$

، ∵ $\text{د}(٢^-) = \lim_{\text{س} \to ٢^-} (\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ٢)$

= ٩ + ٢ × ٢ + ٣ = ١٨

∴ $\text{د}(٢^+) = \text{د}(٢^-) = \text{د}(٢)$

∴ الدالة د متصلة عند س = ٢

٤ محافظة القليوبية

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ)	② (د)	③ (جـ)	④ (ب)
⑤ (د)	⑥ (جـ)	⑦ (أ)	⑧ (أ)
⑨ (ب)	⑩ (جـ)	⑪ (د)	⑫ (أ)
⑬ (د)	⑭ (جـ)	⑮ (د)	⑯ (جـ)
⑰ (د)	⑱ (د)	⑲ (جـ)	⑳ (جـ)
㉑ (د)	㉒ (ب)	㉓ (أ)	㉔ (د)
㉕ (ب)	㉖ (جـ)	㉗ (د)	㉘ (ب)

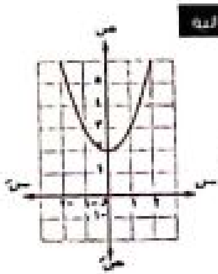
ثانيا الأسئلة المقالية

١

المدى = [٢ ، ∞[

الاطراد : الدالة تناقصية في]-∞ ، ٠] وتزايدية في [٠ ، ∞[

النوع : الدالة زوجية.



٢

بفرض أن أطوال أضلاع المثلث هي :

٣ ك ، ٥ ك ، ٧ ك من وحدات الطول.

، ∵ أكبر الزوايا قياسًا يقابلها أكبر الأضلاع طولًا.

، بفرض أن قياس أكبر زاوية = θ

∴ $\text{جتا}\,\theta = \frac{(٣\text{ك})^٢ + (٥\text{ك})^٢ - (٧\text{ك})^٢}{٢ \times ٣\text{ك} \times ٥\text{ك}}$

$= \frac{-١٥\text{ك}^٢}{٣٠\text{ك}^٢} = -\frac{١}{٢}$

∴ θ = ١٢٠°

٣

① $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{(\text{س} + ٢)^٧ - ١٢٨}{٥\text{س}}$

$= \frac{١}{٥} \times \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{(\text{س} + ٢)^٧ - ٢^٧}{\text{س}}$

$= \frac{١}{٥} \times ٧ \times ٢^٦ = ٨٩{,}٦$

② $\lim_{\text{س} \to ٥} \frac{\sqrt{\text{س}+١١} - ٤}{\text{س}^٢ - ٢٥} \times \frac{\sqrt{\text{س}+١١} + ٤}{\sqrt{\text{س}+١١} + ٤}$

$= \lim_{\text{س} \to ٥} \frac{\text{س} + ١١ - ١٦}{(\text{س} - ٥)(\text{س} + ٥)(\sqrt{\text{س}+١١} + ٤)}$

$= \lim_{\text{س} \to ٥} \frac{١}{(\text{س} + ٥)(\sqrt{\text{س}+١١} + ٤)}$

$= \frac{١}{(٥ + ٥)(\sqrt{٥ + ١١} + ٤)} = \frac{١}{٨٠}$

٤

∵ أب = أجـ = $\text{لو}_{\sqrt{١٠}}$ ٥ سم

∴ محيط △ أب جـ = ٢ $\text{لو}_{\sqrt{١٠}}$ ٥ + $\text{لو}_{\sqrt{١٠}}$ ٤

= $\text{لو}_{\sqrt{١٠}}$ ٢٥ + $\text{لو}_{\sqrt{١٠}}$ ٤

= $\text{لو}_{\sqrt{١٠}}$ (٢٥ × ٤)

= $\text{لو}_{\sqrt{١٠}}$ ١٠٠ = $\text{لو}_{\sqrt{١٠}} (\sqrt{١٠})^٤$

= ٤ $\text{لو}_{\sqrt{١٠}} \sqrt{١٠}$ = ٤ × ١ = ٤

٥ محافظة الغربية

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (جـ)	(٢) (د)	(٣) (أ)	(٤) (جـ)
(٥) (جـ)	(٦) (جـ)	(٧) (ب)	(٨) (أ)
(٩) (جـ)	(١٠) (أ)	(١١) (أ)	(١٢) (جـ)
(١٣) (د)	(١٤) (أ)	(١٥) (د)	(١٦) (ب)
(١٧) (أ)	(١٨) (ب)	(١٩) (جـ)	(٢٠) (ب)
(٢١) (جـ)	(٢٢) (د)	(٢٣) (جـ)	(٢٤) (د)
(٢٥) (ب)	(٢٦) (جـ)	(٢٧) (أ)	(٢٨) (ب)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

٣ لوس س + ٥ لوس ع = ٢ لوس ع

∴ لوس س^{٣} + لوس ع^{٥} = لوس ع^{٢}

∴ لوس س^{٣} ع^{٥} = لوس ع^{٢}

∴ س^{٣} ع^{٥} = ع^{٢} ∴ س^{٣} ع^{٣} = ١

∴ س ع = ١

٢

∵ الدالة لها نهاية عند س = ١ وقيمتها = ٤

∴ د (١$^{+}$) = د (١$^{-}$) = ٤

∴ م + ل = ٤ ، ل - ١ + ٧ = ٤

∴ ل = -٢ ∴ م - ٢ = ٤ ∴ م = ٦

٣

-٥ ≥ ٢ س + ١ ≥ ٥ ∴ -٦ ≥ ٢ س ≥ ٤

∴ -٣ ≥ س ≥ ٢

∴ مجموعة الحل = [-٣ ، ٢]

٤

∵ (س + ٣) متصلة على ح

، ∵ لو (س - ٢) معرفة لكل س - ٢ > ٠

∴ س > ٢

∴ لو (س - ٢) متصلة في]٢ ، ∞[

، ∵ لو (س - ٢) = ٠ عندما س - ٢ = ١

∴ س = ٣

∴ الدالة د متصلة في]٢ ، ∞[- {٣}

٦ محافظة المنوفية

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (ب)	(٢) (جـ)	(٣) (ب)	(٤) (د)
(٥) (ب)	(٦) (جـ)	(٧) (أ)	(٨) (ب)
(٩) (د)	(١٠) (جـ)	(١١) (ب)	(١٢) (أ)
(١٣) (جـ)	(١٤) (جـ)	(١٥) (د)	(١٦) (د)
(١٧) (جـ)	(١٨) (جـ)	(١٩) (د)	(٢٠) (أ)
(٢١) (أ)	(٢٢) (أ)	(٢٣) (جـ)	(٢٤) (ب)
(٢٥) (ب)	(٢٦) (ب)	(٢٧) (جـ)	(٢٨) (ب)

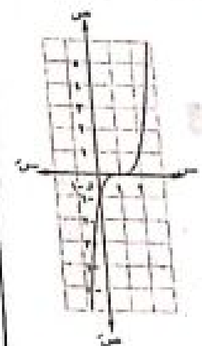
ثانيا الأسئلة المقالية

١

من الرسم

المدى = ح

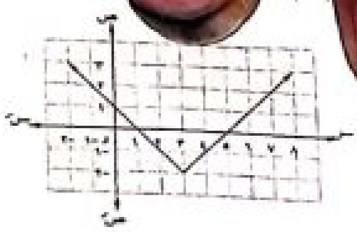
الاطراد : الدالة تزايدية على مجالها ح



ثانيا الأسئلة المقالية

(س) = ... ٢

(س) = |س - ٢| - ٢



من الرسم : المدى = [-٢ ، ∞[

الاطراد : الدالة تناقصية في]-∞ ، ٢]

وتزايدية في]٢ ، ∞[

٢

(١) نهـــا (س ← $\frac{\pi}{٤}$) $\frac{\text{جا } ٢ \text{ س} - ١}{\text{ظا س} + \text{ظتا س}}$

= $\frac{\text{جا}(٢ \times \frac{\pi}{٤}) - ١}{\text{ظا } \frac{\pi}{٤} + \text{ظتا } \frac{\pi}{٤}}$ = $\frac{١ - ١}{١ + ١}$ = $\frac{٠}{٢}$ = ٠

(٢) نهـــا (س ← -١) $\frac{\text{س}^{٢} - ٣ \text{ س} - ٤}{\text{س}^{٣} + ١}$

= نهـــا (س ← -١) $\frac{(\text{س} - ٤)(\text{س} + ١)}{(\text{س} + ١)(\text{س}^{٢} - \text{س} + ١)}$

= نهـــا (س ← -١) $\frac{(\text{س} - ٤)}{(\text{س}^{٢} - \text{س} + ١)}$ = $\frac{-١ - ٤}{١ + ١ + ١}$ = $\frac{-٥}{٣}$

٣

∵ د متصلة عند س = ٠

∴ د (٠) = نهـــا (س ← ٠) د (س)

∴ ٥ ك = نهـــا (س ← ٠) $\frac{(\text{س} + ٢)^{٥} - ٢^{٥}}{\text{س}}$

∴ ٥ ك = ٥ × ٢^{٤} ∴ ك = ١٦

∴ س + ...

∴ ...

∴ س + ١ = ٨ ومنها س = ٧

أ، س + ١ = -٨ ومنها س = -٩

∴ مجموعة الحل = {-٩ ، ٧}

٣

∵ د متصلة عند س = -٢

∴ د (-٢) = نهـــا (س ← -٢) د (س)

∴ -٢ + أ = نهـــا (س ← -٢) $\frac{\text{س}^{٢} + ٢ \text{ س} - ٣}{\text{س} + ٣}$

∴ -٢ + أ = نهـــا (س ← -٢) $\frac{(\text{س} + ٣)(\text{س} - ١)}{(\text{س} + ٣)}$

∴ -٢ + أ = -٢ - ١ ∴ أ = -١

٤

∵ نهـــا (س ← ك) $\frac{\text{س}^{٨} - \text{ك}^{٨}}{\text{س}^{٦} - \text{ك}^{٦}}$ = ١٢

∴ $\frac{٨}{٦}$ × ك$^{٨-٦}$ = ١٢ ∴ ك^{٢} = ١٢ × $\frac{٦}{٨}$

∴ ك^{٢} = ٩ ∴ ك = ± ٣

٧ محافظة السويس

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (د)	(٢) (أ)	(٣) (ب)	(٤) (جـ)
(٥) (ب)	(٦) (د)	(٧) (ب)	(٨) (د)
(٩) (ب)	(١٠) (ب)	(١١) (جـ)	(١٢) (جـ)
(١٣) (د)	(١٤) (ب)	(١٥) (أ)	(١٦) (أ)
(١٧) (د)	(١٨) (د)	(١٩) (د)	(٢٠) (جـ)
(٢١) (ب)	(٢٢) (جـ)	(٢٣) (د)	(٢٤) (جـ)
(٢٥) (أ)	(٢٦) (جـ)	(٢٧) (د)	(٢٨) (ب)

4

$$\lim_{\text{س} \to -٣} \frac{\sqrt{\text{س}+٧}-٢}{\text{س}+٣} \times \frac{\sqrt{\text{س}+٧}+٢}{\sqrt{\text{س}+٧}+٢}$$

$$= \lim_{\text{س} \to -٣} \frac{\text{س}+٧-٤}{(\text{س}+٣)(\sqrt{\text{س}+٧}+٢)}$$

$$= \lim_{\text{س} \to -٣} \frac{١}{\sqrt{\text{س}+٧}+٢} = \frac{١}{\sqrt{-٣+٧}+٢} = \frac{١}{٤}$$

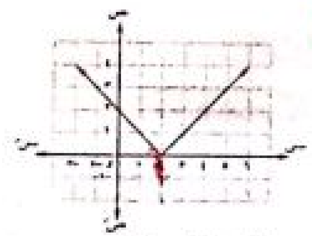
٨ محافظة المنيا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ)	② (جـ)	③ (جـ)	④ (د)
⑤ (ب)	⑥ (جـ)	⑦ (جـ)	⑧ (جـ)
⑨ (جـ)	⑩ (جـ)	⑪ (جـ)	⑫ (د)
⑬ (أ)	⑭ (جـ)	⑮ (ب)	⑯ (جـ)
⑰ (ب)	⑱ (ب)	⑲ (ب)	⑳ (د)
㉑ (د)	㉒ (جـ)	㉓ (ب)	㉔ (د)
㉕ (أ)	㉖ (د)	㉗ (د)	㉘ (د)

ثانيًا الأسئلة المقالية

1



من الرسم : المدى = $[٠ ، \infty[$

الاطراد : الدالة تناقصية في $]-\infty ، ٢[$

وتزايدية في $]٢ ، \infty[$

النوع : الدالة ليست زوجية وليست فردية.

2

$$٢^{٢\text{س}} - ١٢ \times ٢^{\text{س}} + ٣٢ = ٠$$

$$(٢^{\text{س}} - ٨)(٢^{\text{س}} - ٤) = ٠$$

$\therefore ٢^{\text{س}} - ٨ = ٠$ ومنها $٢^{\text{س}} = ٢^{٣}$

$\therefore \text{س} = ٣$

أو $٢^{\text{س}} - ٤ = ٠$ ومنها $٢^{\text{س}} = ٢^{٢}$

$\therefore \text{س} = ٢$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{٢ ، ٣\}$

3

$$\text{د}(٤^{+}) = \lim_{\text{س} \to ٤^{+}} \frac{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٤}{\text{س} - ٤}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ٤^{+}} \frac{(\text{س}-٤)(\text{س}-١)}{(\text{س}-٤)} = ٤ - ١ = ٣$$

$$\text{د}(٤^{-}) = \lim_{\text{س} \to ٤^{-}} (٢\text{س} - ٥) = ٢ \times ٤ - ٥ = ٣$$

$\therefore \text{د}(٤^{+}) = \text{د}(٤^{-}) = ٣ \quad \therefore \lim_{\text{س} \to ٤} \text{د}(\text{س}) = ٣$

4

$\because$ د متصلة عند س = −٣

$$\therefore \text{د}(-٣) = \lim_{\text{س} \to -٣} \text{د}(\text{س})$$

$$\therefore -٣ + \text{أ} = \lim_{\text{س} \to -٣} \frac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣}{\text{س} + ٣}$$

$$\therefore -٣ + \text{أ} = \lim_{\text{س} \to -٣} \frac{(\text{س}+٣)(\text{س}-١)}{(\text{س}+٣)}$$

$\therefore -٣ + \text{أ} = -٣ - ١ \qquad \therefore \text{أ} = -١$

٩ محافظة أسيوط

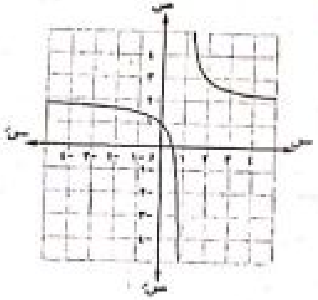
أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ)	② (د)	③ (د)	④ (أ)
⑤ (أ)	⑥ (جـ)	⑦ (أ)	⑧ (جـ)
⑨ (أ)	⑩ (جـ)	⑪ (جـ)	⑫ (جـ)
⑬ (ب)	⑭ (د)	⑮ (د)	⑯ (جـ)
⑰ (د)	⑱ (أ)	⑲ (جـ)	⑳ (جـ)
㉑ (ب)	㉒ (جـ)	㉓ (جـ)	㉔ (جـ)
㉕ (د)	㉖ (د)	㉗ (جـ)	㉘ (د)

ثانيًا الأسئلة المقالية

1

(أ)



من الرسم : المجال = ح − {١}

المدى : ح − {٢}

الاطراد : الدالة تناقصية في $]-\infty ، ١[،]١ ، \infty[$

النوع : الدالة ليست زوجية وليست فردية.

(ب) $\because \frac{١}{|\text{س} - ٢|} \geq ٥ \quad \therefore |\text{س} - ٢| \leq \frac{١}{٥}$

$\therefore -\frac{١}{٥} \leq \text{س} - ٢ \leq \frac{١}{٥}$

$\therefore \frac{٩}{٥} \leq \text{س} \leq \frac{١١}{٥}$

$\because |\text{س} - ٢| = ٠$ عندما س = ٢

$\therefore$ مجموعة الحل = $[\frac{٩}{٥} ، \frac{١١}{٥}] - \{٢\}$

2

(أ) $\because \text{س}^{\frac{٤}{٣}} - ١٠\,\text{س}^{\frac{٢}{٣}} + ٩ = ٠$

$\therefore (\text{س}^{\frac{٢}{٣}} - ٩)(\text{س}^{\frac{٢}{٣}} - ١) = ٠$

$\therefore \text{س}^{\frac{٢}{٣}} - ٩ = ٠ \qquad \therefore \text{س}^{\frac{٢}{٣}} = ٩$

$\therefore \text{س} = \pm ٩^{\frac{٣}{٢}} = \pm ٢٧$

أو $\text{س}^{\frac{٢}{٣}} - ١ = ٠ \qquad \therefore \text{س}^{\frac{٢}{٣}} = ١$

$\therefore \text{س} = \pm ١$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{١ ، -١ ، ٢٧ ، -٢٧\}$

(ب) $\because \text{لو}_{\sqrt{٢}}\, \text{س} + \text{لو}_{\sqrt{٢}} (\text{س} + ١) = ٢$

$\therefore \text{لو}_{\sqrt{٢}}\, \text{س}(\text{س} + ١) = ٢$

$\therefore \text{س}^{٢} + \text{س} = (\sqrt{٢})^{٢} \qquad \therefore \text{س}^{٢} + \text{س} - ٢ = ٠$

$\therefore (\text{س} + ٢)(\text{س} - ١) = ٠$

$\therefore \text{س} + ٢ = ٠$ ومنها س = −٢ (مرفوضة)

أو $\text{س} - ١ = ٠$ ومنها س = ١

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{١\}$

3

(أ) $$\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\sqrt{\text{س}+٤}-٢}{\text{س}} \times \frac{\sqrt{\text{س}+٤}+٢}{\sqrt{\text{س}+٤}+٢}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{س}+٤-٤}{\text{س}(\sqrt{\text{س}+٤}+٢)}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{١}{\sqrt{\text{س}+٤}+٢} = \frac{١}{\sqrt{٠+٤}+٢} = \frac{١}{٤}$$

(ب) $$\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{٣\text{س}^{٢} + \text{جا}^{٢}\, ٥\text{س}}{\text{س جا } ٦\text{س}}$$

بقسمة البسط والمقام على $\text{س}^{٢}$

$$= \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{٣ + \frac{\text{جا}^{٢}\, ٥\text{س}}{\text{س}^{٢}}}{\frac{\text{جا } ٦\text{س}}{\text{س}}} = \frac{٣ + ٢٥}{٦} = \frac{١٤}{٣}$$

4

$\because \text{د}(٢) = ٣$

$$، \lim_{\text{س} \to ٢} \text{د}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٢}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ٢} \frac{(\text{س}-٢)(\text{س}+٢)}{(\text{س}-٢)}$$

$= ٢ + ٢ = ٤$

$\therefore \text{د}(٢) \neq \lim_{\text{س} \to ٢} \text{د}(\text{س})$

$\therefore$ الدالة غير متصلة عند س = ٢

لكي تكون الدالة متصلة عند س = ٢ يجب أن يكون :

$\text{د}(٢) = \lim_{\text{س} \to ٢} \text{د}(\text{س}) = ٤$

$\therefore$ إعادة تعريف الدالة هو :

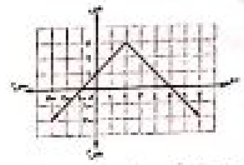
$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٢} & ، \text{س} \neq ٢ \\ ٤ & ، \text{س} = ٢ \end{cases}$$

١٠ محافظة أسوان

أولاً: أسئلة الاختيار من متعدد

ثانياً: الأسئلة المقالية

١



د (س) = ٢ − |٢ − س| = − |س − ٢| + ٢

مدى الدالة =]−∞ ، ٢]

الاطراد: الدالة تزايدية في]−∞ ، ٢[وتناقصية في]٢ ، ∞[

النوع: الدالة ليست زوجية وليست فردية

ومن الرسم: مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠ هي {−١ ، ٥}

٢

∴ لو س + لو ص = لو س ص = لو ٢ = ١

٣

① نهـا (س^٣ − ٦٤) / (س^٢ + ٢ س − ٨)

= ٣ × ٤^٢ × ... = $\frac{٤٨}{٦}$ = ٨

② نهـا ((٢ س − ١)(٣ س + ١)) / (٤ س^٢ + ٥)

بقسمة البسط والمقام على س^٢

= $\frac{٢ \times ٣}{٤}$ = $\frac{٣}{٢}$

٤

(أ) ∵ د (٠) = ٥ − ٢ جتا ٠ = ٣

∵ د (٠^+) = نهـا (٣ س + جا س) / (٢ س − ظا ٢ س)

بقسمة البسط والمقام على س

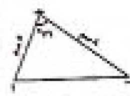
= $\frac{٣ + ١}{٢ - ٢}$ ...

∵ د (٠^−) = نهـا (٥ − ٢ جتا س) = ٥ − ٢ = ٣

∴ د (٠^+) = د (٠^−) = د (٠)

∴ الدالة متصلة عند س = ٠

(ب)



إجابات نماذج الامتحانات النهائية

النموذج الأول

أولاً: أسئلة الاختيار من متعدد

١ (ب)	٢ (ج)	٣ (ب)	٤ (ب)
٥ (ب)	٦ (أ)	٧ (ج)	٨ (ب)
٩ (ج)	١٠ (أ)	١١ (ج)	١٢ (ج)
١٣ (ب)	١٤ (أ)	١٥ (د)	١٦ (د)
١٧ (أ)	١٨ (د)	١٩ (ب)	٢٠ (ج)
٢١ (ج)	٢٢ (ب)	٢٣ (ج)	٢٤ (أ)
٢٥ (أ)	٢٦ (ب)	٢٧ (ب)	٢٨ (ج)

ثانياً: الأسئلة المقالية

١

ر (س) = $\frac{١}{س - ٢}$ + ٢



مدى الدالة ر هو ح − {٢}

ر تناقصية في كل من]−∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[

٢

بوضع ٢ − س ≤ ٠ ∴ س ≥ ٢

∴ مجال د هو]−∞ ، ٢] ، مدى د هو [٢ ، ∞[

∵ ص = ٢ + $\sqrt{٢ - س}$ وبتبديل المتغيرين

∴ س = ٢ + $\sqrt{٢ - ص}$

∴ $\sqrt{٢ - ص}$ = س − ٢

∴ ٢ − ص = س^٢ − ٤ س + ٤

∴ ص = − س^٢ + ٤ س − ٢

∴ د^{−١} (س) = − س^٢ + ٤ س − ٢

، مجال د^{−١} = مدى د = [٢ ، ∞[

، مدى د^{−١} = مجال د =]−∞ ، ٢]

٣

د (٢^+) = نهـا (٥ س − ٤) = ٦

، د (٢^−) = نهـا (س^٢ − س + ٤) = ٦

∴ د (٢^+) = د (٢^−) = ٦

∴ نهـا د (س) = ٦

، ∵ د (٢) = ك

∴ ك = ٦ حتى تصبح د متصلة عند س = ٢

٤

∵ النهاية موجودة وتساوي ٣

∴ درجة البسط = درجة المقام

∴ ن = ٢

بقسمة كل من البسط والمقام على س^٢

∴ $\frac{٢٤}{٨}$ = ٣ ∴ أ = ٦

النموذج الثاني

أولاً: أسئلة الاختيار من متعدد

النموذج الثالث

أولاً: أسئلة الاختيار من متعدد

١ (ج)	٢ (د)	٣ (ب)	٤ (ب)
٥ (د)	٦ (ب)	٧ (أ)	٨ (ب)
٩ (ج)	١٠ (د)	١١ (د)	١٢ (د)
١٣ (ب)	١٤ (أ)	١٥ (أ)	١٦ (ج)
١٧ (ب)	١٨ (د)	١٩ (ب)	٢٠ (ب)
٢١ (ج)	٢٢ (ج)	٢٣ (د)	٢٤ (ج)
٢٥ (د)	٢٦ (ب)	٢٧ (ج)	٢٨ (أ)

ثانياً: الأسئلة المقالية

١

∵ د (٢ س − ١) + د (س − ٢) = ٥٠

∴ ٧^{٢ س − ١ + ١} + ٧^{س − ٢ + ١} = ٥٠

∴ ٧^{٢ س} + ٧^{س − ١} = ٥٠

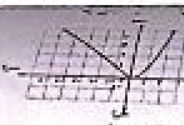
∴ ٧ × ٧^{٢ س} + ٧^{س} − ٣٥٠ = ٠

∴ (٧^{س} − ٧) × (٧ × ٧^{س} + ٥٠) = ٠

∴ ٧^{س} = ٧ ∴ س = ١

، ٧^{س + ١} = − ٥٠ (مرفوض)





، مدى الدالة = [٠ ، ∞[

، الدالة تناقصية في]−∞ ، ٠[، تزايدية في]٠ ، ∞[

٣

∵ د متصلة عند س = صفر

∴ د (٠) = نهـا د (س)

∴ ك = نهـا ((س + ٣)^٥ − ٣^٥) / س

∴ ك = ٥ × ٣^٤ = ٤٠٥

٤

د (س) = (س^٢ + ٢ |س|) / س

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ + ٢ س}{س} & ، س > ٠ \\ \frac{س^٢ - ٢ س}{س} & ، س < ٠ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{س (س + ٢)}{س} & ، س > ٠ \\ \frac{س (س - ٢)}{س} & ، س < ٠ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} س + ٢ & ، س > ٠ \\ س - ٢ & ، س < ٠ \end{cases}$$

د (٠^−) = ٠ − ٢ = −٢

، د (٠^+) = ٠ + ٢ = ٢

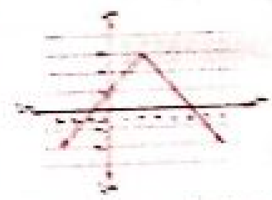
∵ د (٠^−) ≠ د (٠^+)

∴ نهـا د (س) غير موجودة.

ثانياً: الأسئلة المقالية

١

توجد الدالة العكسية للدالة د



∴ المجال = ح ، المدى =]−∞ ، ٣]

التزايد : الدالة تزايدية في]−∞ ، ٠[

وتناقصية في]٢ ، ∞[

النوع : الدالة ليست زوجية وليست فردية

حل المعادلة : مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠ هي {−١ ، ٥}

٨

∵ ٣^س = ٥ ∴ س لو ٣ = لو ٥

∴ لو س + لو ص = لو س ص = لو ٣ = ١

٥

(أ) ∵ د (٠) = ٥ − ٣ ظا ٠ = ٢

∵ د (٠^−) = نهــا (س ← ٠^−) (٢ س + جا س) / (٢ س − ظا ٢ س)

بقسمة البسط والمقام على س

= نهــا (س ← ٠^−) (٢ + جا س / س) / (٢ − ظا ٢ س / س) = (٢ + ١) / (٢ − ٢) = ٣

∵ د (٠^+) = نهــا (س ← ٠^+) (٥ − ٢ ظا س)

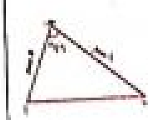
= ٥ − ٢ ظا ٠ = ٢

∴ د (٠^+) = د (٠^−) = د (٠)

∴ الدالة متصلة عند س = ٠

(ب) ∵ حـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ − ٢ أ ب جتا حـ

= ٦١ + ٢٥ − ٢ (٥) (٦) جتا ٧٦°



∴ حـ = ٨,٢٤٥ سم

∵ أ / جا أ = حـ / جا حـ

∴ جا أ = (٥ × جا ٧٦°) / ٨,٢٤٥

∴ ق (∠ أ) = ٣٦° ٢٢ َ

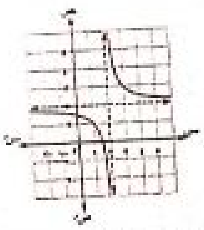
∴ ق (∠ ب) = ١٨٠° − (٧٦° + ٣٦° ٢٢ َ) = ٦٧° ٣٨ َ

١٢ (د)	**١٣** (ب)	**١٤** (جـ)	**١٥** (أ)
١٦ (أ)	**١٧** (جـ)	**١٨** (ب)	**١٩** (جـ)

ثانيًا | الأسئلة المقالية

١

ر (س) = ١ / (س − ٢) + ٢



مدى الدالة ر هو ح − {٢}

، ر تناقصية في كل من]−∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[

٢

بوضع ٢ − س ≤ ٠ ∴ س ≥ ٢

∴ مجال د هو]−∞ ، ٢] ، مدى د هو [٢ ، ∞[

∵ ص = ٢ + √(٢ − س) وبتبديل المتغيرين

∴ س = ٢ + √(٢ − ص)

∴ لو ٦ حتى تصبح د متصلة عند س = ٢

٤

∵ النهاية موجودة وتساوي ٣

∴ درجة البسط = درجة المقام

∴ ب = ٣

∴ نهــا (س ← ∞) (٤ س^٣ − ٥ س + ٤) / (٢ − ٨ س + ٨ س^٣) = ٣

بقسمة كل من البسط والمقام على س^٣

∴ ٢٤ / ٨ = ٣ ∴ ٤ = ٦

النموذج الثاني

أولًا | أسئلة الاختيار من متعدد

١ (جـ)	**٢** (أ)	**٣** (د)	**٤** (ب)
٥ (د)	**٦** (جـ)	**٧** (جـ)	**٨** (ب)
٩ (ب)	**١٠** (د)	**١١** (د)	**١٢** (أ)

١٢ (د)	**١٣** (جـ)	**١٤** (جـ)	**١٥** (جـ)
١٦ (جـ)	**١٧** (جـ)	**١٨** (جـ)	**١٩** (ب)
٢٠ (ب)	**٢١** (ب)	**٢٢** (جـ)	**٢٣** (أ)
٢٤ (أ)	**٢٥** (أ)	**٢٦** (د)	**٢٧** (أ)

ثانيًا | الأسئلة المقالية

١

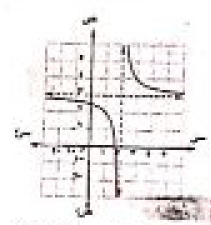
١ / س = ١ / (٥ + ٢√٦) × (٥ − ٢√٦) / (٥ − ٢√٦) = (٥ − ٢√٦) / (٢٥ − ٢٤)

= ٥ − ٢√٦

∴ س + ١ / س = ٥ + ٢√٦ + ٥ − ٢√٦ = ١٠

∴ لو (س + ١ / س) = لو ١٠ = ١

٢



مجال ر = ح − {٢} ، المدى = ح − {٢}

، ر تناقصية في كل من]−∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[

، ر ليست زوجية وليست فردية ، ر أحادية

٣

د (٢^−) = نهــا (٢ س + ٦) = ١٠

د (٢^+) = نهــا (س^٢ + ٦) = ١٠

∵ د (٢^−) = د (٢^+) = ١٠

∴ نهــا (س ← ٢) د (س) موجودة وتساوي ١٠

٤

نهــا (س ← ∞) √(٣/س^٢ + ٤) / √(٧/س + ٤) = −١ ∴ ... = −١

∴ √أ = −٢ ∴ أ = −٨

النموذج الثالث

أولًا | أسئلة الاختيار من متعدد

١ (جـ)	**٢** (د)	**٣** (ب)	**٤** (ب)
٥ (د)	**٦** (ب)	**٧** (أ)	**٨** (جـ)
٩ (جـ)	**١٠** (د)	**١١** (د)	**١٢** (د)
١٣ (ب)	**١٤** (أ)	**١٥** (أ)	**١٦** (جـ)
١٧ (ب)	**١٨** (د)	**١٩** (ب)	**٢٠** (ب)
٢١ (د)	**٢٢** (جـ)	**٢٣** (د)	**٢٤** (جـ)
٢٥ (د)	**٢٦** (ب)	**٢٧** (د)	**٢٨** (أ)

ثانيًا | الأسئلة المقالية

١

∵ د (٢ س − ١) + د (س − ٢) = ٥٠

∴ ٧^(٢ س − ١ + ١) + ٧^(س − ٢ + ١) = ٥٠

∴ ٧^(٢ س) + ٧^(س − ١) = ٥٠

∴ ٧ × ٧^(٢ س) + ٧^س − ٣٥٠ = ٠

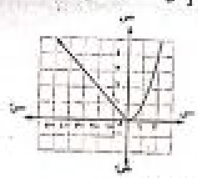
∴ (٧^س − ٧) × (٧ × ٧^س + ٥٠) = ٠

∴ ٧^س = ٧ ∴ س = ١

٧^س = −٥٠ / ٧ (مرفوض)

١

د (س) = −س ، س ≤ ٠
س^٢ ، س > ٠



• مدى الدالة = [٠ ، ∞[

• الدالة تناقصية في]−∞ ، ٠[، تزايدية في]٠ ، ∞[

٢

∵ د متصلة عند س = صفر

∴ د (٠) = نهــا (س ← ٠) د (س)

∴ ك = نهــا (س ← ٠) ((س + ٢)^٥ − ٢^٥) / س

∴ ك = ٥ × ٢^٤ = ٨٠

٤

د (س) = (س^٢ + ٢ |س|) / س

د (س) = (س^٢ + ٢ س) / س ، س > ٠
(س^٢ − ٢ س) / س ، س < ٠

= س (س + ٢) / س ، س > ٠
س (س − ٢) / س ، س < ٠

= س + ٢ ، س > ٠
س − ٢ ، س < ٠

د (٠^−) = ٠ − ٢ = −٢

د (٠^+) = ٠ + ٢ = ٢

∵ د (٠^−) ≠ د (٠^+)

∴ نهــا (س ← ٠) د (س) غير موجودة.

النموذج الرابع

أولًا | أسئلة الاختيار من متعدد

١ (أ)	**٢** (أ)	**٣** (جـ)	**٤** (ب)
٥ (ب)	**٦** (د)	**٧** (ب)	**٨** (أ)
٩ (جـ)	**١٠** (جـ)	**١١** (جـ)	**١٢** (أ)
١٣ (ب)	**١٤** (د)	**١٥** (د)	**١٦** (أ)
١٧ (جـ)	**١٨** (ب)	**١٩** (ب)	**٢٠** (ب)
٢١ (ب)	**٢٢** (ب)	**٢٣** (ب)	**٢٤** (د)
٢٥ (د)	**٢٦** (ب)	**٢٧** (د)	**٢٨** (ب)

ثانيًا | الأسئلة المقالية

١

نوجد الدالة العكسية للدالة د

بوضع ص = ٢ س + ٤ وبتبديل المتغيرين

∴ س = ٢ ص + ٤ ∴ ٢ ص = س − ٤

∴ ص = ١/٢ س − ٢

∴ د^−١ (س) = ١/٢ س − ٢

، ∵ ر هي الدالة العكسية للدالة د

∴ ر (س) = د^−١ (س)

∴ أ س + ب = ١/٢ س − ٢

وبمقارنة المعاملات : ∴ أ = ١/٢ ، ب = −٢

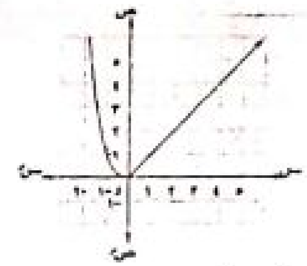
٤

∵ د (−٦^−) = د (−٦^+)

∴ −٤ = ٣ − ٣ أ

∴ أ = ...

٣ (تابع)



- المدى = $[\,٠ ، \infty[$
- الدالة ليست زوجية وليست فردية
- الدالة تزايدية في $]\,٠ ، \infty[$ وتناقصية في $]-\infty ، ٠\,]$

---

٤ $\lim\limits_{س \to ١٠} \dfrac{س^{١٥} - (١٠)^{١٥}}{س - (١٠)} = ١٥ \, (١٠)^{١٤} = ١٥$

، $\because \lim\limits_{س \to ك} \dfrac{س^{٥} - ك^{٥}}{س^{٣} - ك^{٣}} = \dfrac{٥}{٣} (ك)^{٢}$

$\therefore \dfrac{٥}{٣} ك^{٢} = ١٥$ $\quad \therefore ك = \pm ٣$

النموذج الخامس

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

١ (ج)	٢ (د)	٣ (أ)	٤ (ب)
٥ (د)	٦ (د)	٧ (ج)	٨ (ج)
٩ (د)	١٠ (ج)	١١ (ج)	١٢ (ب)
١٣ (ب)	١٤ (ج)	١٥ (د)	١٦ (د)
١٧ (أ)	١٨ (ب)	١٩ (ب)	٢٠ (ب)
٢١ (ب)	٢٢ (ج)	٢٣ (ج)	٢٤ (د)
٢٥ (ب)	٢٦ (ج)	٢٧ (ب)	٢٨ (ب)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

$\because ٣^{٢س - ١} - ٤ \times ٣^{س} + ٩ = ٠$ ، وبالضرب × ٣

$\therefore ٣^{٢س} - ١٢ \times ٣^{س} + ٢٧ = ٠$

$\therefore (٣^{س} - ٣)(٣^{س} - ٩) = ٠$

$\therefore ٣^{س} = ٣$ $\quad \therefore س = ١$

أ، $٣^{س} = ٩ = ٣^{٢}$ $\quad \therefore س = ٢$

$\therefore$ مجموع الحل = $\{١ ، ٢\}$

٢

- $د(س) = |س| + ١$ ، $ر(س) = \dfrac{١}{س - ١}$

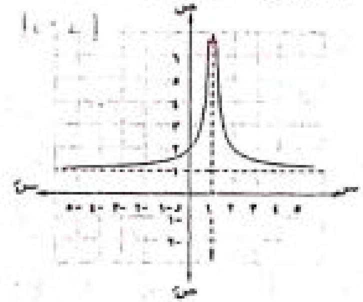
$\therefore (د \circ ر)(س) = د[ر(س)] = د\left(\dfrac{١}{س - ١}\right)$

$= \left|\dfrac{١}{س - ١}\right| + ١$

، $م_{١}$ = مجال ر = ح − {١} ، $م_{٢}$ = ح

$\therefore$ مجال $(د \circ ر)$ = ح − {١}

- التمثيل البياني للدالة $(د \circ ر)$:



- المجال = ح − {١}
- الدالة ليست زوجية وليست فردية
- المنحنى متماثل بالنسبة للمستقيم س = ١
- الدالة ليست أحادية.

٣

$د(٠^{-}) = \lim\limits_{س \to ٠^{-}} \dfrac{س + جا س}{٣س - جا ٢س}$

$= \lim\limits_{س \to ٠^{-}} \dfrac{س\left(١ + \frac{جا س}{س}\right)}{س\left(٣ - \frac{جا ٢س}{س}\right)} = \dfrac{١ + ١}{٣ - ٢} = ٢$

، $د(٠^{+}) = \lim\limits_{س \to ٠^{+}} (٣س - ١) = -١$

، $\because د(٠^{+}) \neq د(٠^{-})$

$\therefore$ د غير متصلة عند س = ٠

٤ $\because \lim\limits_{س \to ١} \dfrac{س^{١٢} - أ^{١٢}}{س^{١٠} - أ^{١٠}} = ٣٠$

$\therefore \dfrac{١٢}{١٠} (أ)^{٢} = ٣٠$ $\quad \therefore أ^{٢} = ٢٥$

$\therefore أ = \pm ٥$

النموذج السادس

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

١ (أ)	٢ (ج)	٣ (ب)	٤ (ج)
٥ (ب)	٦ (ج)	٧ (د)	٨ (ب)
٩ (د)	١٠ (ب)	١١ (أ)	١٢ (ب)
١٣ (د)	١٤ (ج)	١٥ (ب)	١٦ (ب)
١٧ (د)	١٨ (أ)	١٩ (ب)	٢٠ (ب)
٢١ (أ)	٢٢ (أ)	٢٣ (ب)	٢٤ (ج)
٢٥ (ج)	٢٦ (د)	٢٧ (ج)	٢٨ (ب)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

① $د_{١}(-س) = (-س)\,جتا(-س)$

$= -س\,جتا\,س = -د_{١}(س)$

$\therefore د_{١}$ دالة فردية

② $د_{٢}(-س) = \begin{cases} (-س)^{٢} & ، -س \geq ٠ \\ |-س| & ، -س < ٠ \end{cases}$

$= \begin{cases} س^{٢} & ، س \leq ٠ \\ |س| & ، س > ٠ \end{cases} \neq \pm د_{٢}(س)$

$\therefore د_{٢}$ ليست زوجية وليست فردية.

٢

نضع $ص = \dfrac{١}{س^{٢} + ١}$ حيث $س \in ح^{+}$

، $ص \in]\,٠ ، ١[$ وبتبديل المتغيرين

$\therefore س = \dfrac{١}{ص^{٢} + ١}$ حيث $ص \in ح^{+}$ ، $س \in]\,٠ ، ١[$

$\therefore ص^{٢} + ١ = \dfrac{١}{س}$

$\therefore ص^{٢} = \dfrac{١}{س} - ١$ $\quad \therefore ص = \sqrt{\dfrac{١}{س} - ١}$

$\therefore د^{-١}(س) = \sqrt{\dfrac{١}{س} - ١}$ ، مجال $د^{-١} =]\,٠ ، ١[$

، مدى $د^{-١}$ = مجال د = $ح^{+}$

٣

$\because$ د متصلة عند س = −٣

$\therefore \lim\limits_{س \to -٣} \dfrac{س^{٢} + ٢س - ٣}{س + ٣} = -٣ + أ$

$\therefore \lim\limits_{س \to -٣} \dfrac{(س + ٣)(س - ١)}{س + ٣} = -٣ + أ$

$\therefore -٤ = -٣ + أ$ $\quad \therefore أ = -١$

---

٤ $\lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{د(س) - د(٢)}{س - ٢}$

$= \lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{\frac{١}{س^{٤}} - \frac{١}{٢^{٤}}}{س - ٢}$

$= \lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{س^{-٤} - ٢^{-٤}}{س - ٢} = -٤\,(٢)^{-٥} = \dfrac{-١}{٨}$

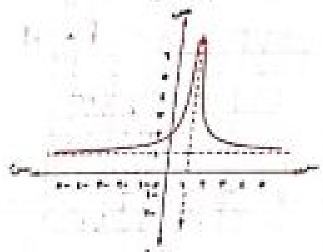
النموذج السابع

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

١ (د)	٢ (ج)	٣ (ب)	٤ (د)
٥ (ج)	٦ (ب)	٧ (ب)	٨ (أ)
٩ (د)	١٠ (د)	١١ (ب)	١٢ (د)
١٣ (ب)	١٤ (ب)	١٥ (ب)	١٦ (ج)
١٧ (د)	١٨ (ب)	١٩ (ب)	٢٠ (أ)
٢١ (ب)	٢٢ (ج)	٢٣ (ب)	٢٤ (د)
٢٥ (د)	٢٦ (د)	٢٧ (ب)	٢٨ (ب)

∴ مجال (د ٥ ر) = ح - {١}

• التمثيل البيانى للدالة (د ٥ ر) :



• المجال = ح - {١}

• الدالة ليست زوجية وليست فردية

• المنحنى متماثل بالنسبة للمستقيم س = ١

• الدالة ليست أحادية.

النموذج الخامس

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

[illegible]

ثانياً الأسئلة المقالية

[illegible]

① د (- س) = (- س) جا (- س)

= - س جا س = - د (س)

∴ د دالة فردية

∴ د ليست زوجية وليست فردية.

النموذج السابع

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

[illegible]

ثانياً الأسئلة المقالية

∴ مجموعة الحل = {١ ، -١ ، ٢٧ ، -٢٧}

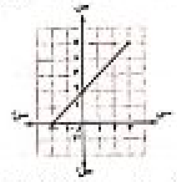
والقسمة بسطاً ومقاماً على س

النموذج الثامن

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

١ (ب)	٢ (د)	٣ (ج)	٤ (د)
٥ (أ)	٦ (أ)	٧ (ب)	٨ (د)
٩ (ج)	١٠ (ج)	١١ (أ)	١٢ (أ)
١٣ (ج)	١٤ (أ)	١٥ (ج)	١٦ (د)
١٧ (د)	١٨ (ب)	١٩ (د)	٢٠ (د)
٢١ (ج)	٢٢ (ب)	٢٣ (أ)	٢٤ (ب)
٢٥ (ج)	٢٦ (أ)	٢٧ (ج)	٢٨ (ب)

ثانياً الأسئلة المقالية



• المدى = [٠ ، ∞[• الدالة تزايدية على مجالها.

∵ د متصلة عند ٢

∵ نهــا د (س) = ٧

النموذج التاسع

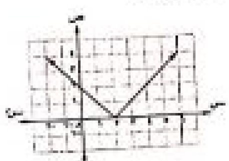
أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

١ (د)	٢ (أ)	٣ (ج)	٤ (ج)
٥ (أ)	٦ (ب)	٧ (أ)	٨ (ب)
٩ (ج)	١٠ (ب)	١١ (ج)	١٢ (أ)
١٣ (د)	١٤ (ب)	١٥ (ب)	١٦ (ب)
١٧ (أ)	١٨ (أ)	١٩ (د)	٢٠ (د)
٢١ (ج)	٢٢ (ج)	٢٣ (د)	٢٤ (ب)
٢٥ (ج)	٢٦ (ب)	٢٧ (د)	٢٨ (د)

ثانياً الأسئلة المقالية

ويتبديل التغيرين

∵ د متصلة عند س = ٢



∴ المدى = [٠ ، ∞[، د تناقصية فى]-∞ ، ٢] ، تزايدية فى [٢ ، ∞[

النموذج العاشر

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

١ (أ)	٢ (د)	٣ (ب)	٤ (د)
٥ (جـ)	٦ (ب)	٧ (د)	٨ (د)
٩ (جـ)	١٠ (د)	١١ (أ)	١٢ (أ)
١٣ (ب)	١٤ (ب)	١٥ (ب)	١٦ (د)
١٧ (جـ)	١٨ (جـ)	١٩ (د)	٢٠ (د)
٢١ (د)	٢٢ (جـ)	٢٣ (جـ)	٢٤ (د)
٢٥ (أ)	٢٦ (ب)	٢٧ (ب)	٢٨ (د)

ثانياً الأسئلة المقالية

١

∵ د متصلة عند س = ٢

∴ د (٢^+) = د (٢^-) = د (٢) = ٤

∴ $\lim_{س \to ٢^+}$ (س^٢ + أ س − ٢) = ٤

∴ ٤ + ٢ أ − ٢ = ٤ ∴ أ = ١

، $\lim_{س \to ٢^-}$ (ع أ + ب س) = ٤

∴ ع (١) + ب (٢) = ٤ ∴ ب = $-\frac{١}{٢}$

٢

∵ |س − ٣| = |٩ − ٢ س|

∴ س − ٣ = ٩ − ٢ س

∴ ٣ س = ١٢

∴ س = ٤ أو س − ٣ = −٩ + ٢ س

∴ س = ٦

∴ مجموعة الحل = {٤ ، ٦}

٣

∵ د (س) = $٧^{س + ١}$

∴ د (٢ س − ١) + د (س − ٢) = ٥٠

∴ $٧^{٢س - ١ + ١} + ٧^{س - ٢ + ١} = ٥٠$

∴ $٧^{٢س} + ٧^{س - ١} = ٥٠$

∴ ٧ × $(٧^{س})^٢ + ٧^{س}$ − ٣٥٠ = ٠

∴ $(٧^{س} - ٧)(٧ \times ٧^{س} + ٥٠) = ٠$

∴ $٧^{س} = ٧$

∴ س = ١ أو ٧ × $٧^{س}$ = −٥٠ (مرفوض)

٤

∵ $\lim_{س \to أ}$ |٣ س + ٢| = ١٤

∴ |٣ أ + ٢| = ١٤

∴ ٣ أ + ٢ = ١٤ ∴ أ = ٤

أو ٣ أ + ٢ = −١٤ ∴ أ = $\frac{-١٦}{٣}$

الامتحانات النهائية



يمكنك حل الامتحانات التفاعلية من خلال مسح QR code الخاص بكل امتحان

◄ **أولًا : نماذج الامتحانات النهائية.**

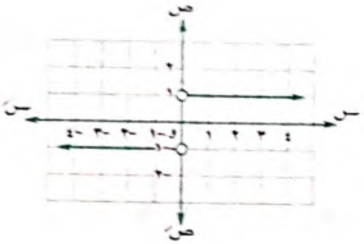
◄ **ثانيًا : نماذج امتحانات بنظام أسئلة الاختيار من متعدد.**

النموذج الأول

امتحان تفاعلي

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ مدى الدالة الممثلة بالشكل المقابل هو ....



(أ) {١}

(ب) {١ ، −١}

(جـ) {−١}

(د) ح

---

٢ إذا كانت النقطة (س ، $\frac{٤}{س}$) نقطة تقاطع منحنى الدالة د والدالة العكسية لها $د^{-١}$

فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ± ٢ (د) ± ٤

---

٣ نهـا (س ← ∞) $\frac{٢س + ٣}{٥س^٢ + ٤}$ = ...

(أ) ٢ (ب) صفر (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٢}{٥}$

---

٤ في Δ أ ب حـ إذا كان : ٤ جا أ = ٣ جا ب = ٦ جا حـ فإن : ق(∠حـ) = ...

(أ) ٨٩° (ب) ٢٩° (جـ) ٥٧° (د) ٨٢°

---

٥ أ ب حـ مثلث فيه : ق(∠حـ) = ٢٣َ ٩٦° ، أ = ٧ سم ، ب = ٩ سم

أوجد : حـ ، مساحة Δ أ ب حـ لأقرب سم^٢.

---

٦ إذا كانت : د (١) = ٣ ، ر (٣) = ٥ فإن : (ر ∘ د) (١) = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ١٥ (د) $\frac{٣}{٥}$

٧ مجموعة حل المعادلة : $٢^{٢س} - ١٢ \times ٢^{س} + ٢^{٥}$ = صفر في ح هي ....

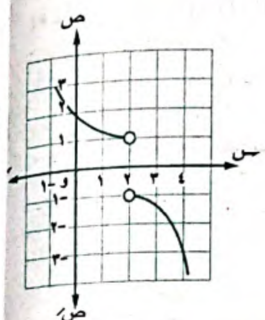
(أ) {٢ ، ٣} (ب) {٢} (ج) {٣} (د) {٤ ، ٨}

٨ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$ لتمثيل منحنى الدالة ر حيث ر(س) = د(س − ٢) + ٢ ومن الرسم عيِّن مداها وابحث اطرادها.

٩ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{(س + ٢)^{٥} - ٣٢}{س}$ = ...

(أ) ٢٥ (ب) ٦٤ (ج) ٨٠ (د) ١٠٠

١٠ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د فإن : $\lim\limits_{س \to ٢}$ | د(س) | = ...



(أ) ١

(ب) −١

(ج) ٢

(د) غير موجودة.

١١ عدد الحلول الممكنة للمثلث ل م ن حيث : ق(∠ل) = ٤٠° ، لَ = ١٢ سم ، مَ = ١٥ سم يساوي ....

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) صفر (د) عدد لا نهائي.

١٢ مجموع جذري المعادلة : $٢٥^{س} - ١٢ \times ٥^{س} + ٢٧ = ٠$ يساوي ....

(أ) $لو_{٥}$ ١٢ (ب) ١٢ (ج) $لو_{٥}$ ٢٧ (د) ٢٧

١٣ إذا كان : س = ٥ + ٢$\sqrt{٦}$ فإن : لو$\left(س + \frac{١}{س}\right)$ = ...

(أ) ١ (ب) ٥ − ٢$\sqrt{٦}$ (ج) ١٠ (د) ٥ + ٢$\sqrt{٦}$

١٤ أ ب حـ مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٥$\sqrt{٣}$ سم فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه يساوي .... سم.

(أ) ٥$\sqrt{٣}$ (ب) ١٠$\sqrt{٣}$ (ج) ١٠ (د) ٥

١٥ إذا كانت د(س) = ٢ + $\sqrt{٣ - س}$ فأوجد مجال ومدى د ثم أوجد $د^{-١}$(س) وعين مجال $د^{-١}$ ومداها.

١٦ إذا كانت د : ح ← ح حيث د(س) = (أ + ١) س + ب − ٢ وكانت د(س) تربط كل عدد حقيقي بنفسه فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (١ ، ٣) (ب) (٠ ، ٣) (ج) (٠ ، ٢) (د) (١ ، ٢)

١٧ إذا كانت د(س) = $\frac{س^{٢} - ١٦}{س - ٤}$ عند س ≠ ٤ فإن : قيمة د(٤) التي تجعل الدالة متصلة عند هذا الموضع تساوي ....

(أ) غير معرفة. (ب) $\lim\limits_{س \to ٤} \frac{س^{٢} - ١٦}{س - ٤}$

(ج) صفر (د) ١٦

١٨ مجموعة حل المعادلة : $لو_{٣}$ س × $لو_{٢}$ ٣ = ٥ في ح هي ....

(أ) {٣٢} (ب) {٥} (ج) {٣} (د) {٢}

١٩ إذا كان أ ب حـ مثلثًا فيه ق(∠أ) : ق(∠ب) : ق(∠حـ) = ٣ : ٥ : ٤

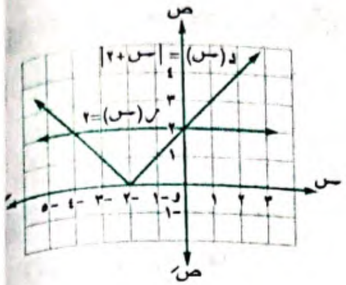
فإن $حـَ^{٢}$: $أَ^{٢}$ = ...

(أ) $\sqrt{٦}$: ٢ (ب) ٢ : ٣ (ج) ٤ : ٣ (د) ٣ : ٢

٢٠ فى الشكل المقابل : مجموعة حل المتباينة

$د(س) > ر(س)$ فى ح

هى ....



(أ) $\{-٤ ، ٠\}$

(ب) $[-٤ ، ٠]$

(جـ) ح $- [-٤ ، ٠]$

(د) $]-٤ ، ٠[$

---

٢١ إذا كانت د دالة حيث :

$$د(س) = \begin{cases} س^{٢} - س + ٤ & \text{عندما } س < ٢ \\ ك & \text{عندما } س = ٢ \\ ٥س - ٤ & \text{عندما } س > ٢ \end{cases}$$

(١) ابحث وجود $\lim_{س \to ٢} د(س)$

(٢) أوجد إن أمكن قيمة ك التى تجعل د متصلة عند $س = ٢$

---

٢٢ نوع الدالة د : $د(س) = \frac{جا س}{س}$ هى ....

(أ) زوجية. (ب) فردية. (جـ) لا زوجية ولا فردية. (د) زوجية وفردية.

---

٢٣ $\lim_{س \to ٠} \frac{جا \pi |س|}{٤س} =$ ....

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) غير موجودة.

---

٢٤ إذا كان : $س^{\frac{٣}{٢}} = ٨$ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ٩

---

٢٥ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٧س + ٦}{٣س^{٢} - ٨س + ٤} =$ ....

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

٢٦ إذا كانت : $\lim_{س \to ١} \frac{٢س + أ}{س + ١} = ٥$ فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) ١٠

---

٢٧ فى أى Δ س ص ع يكون : $سَ^{٢} + صَ^{٢} - ٢ سَ صَ جتا ع =$ ....

(أ) $سَ^{٢}$ (ب) $صَ^{٢}$ (جـ) $عَ^{٢}$ (د) عَ

---

٢٨ مجموعة الحل فى ح للمتباينة : $\sqrt{٤س^{٢} - ١٢س + ٩} \geq ٩$ تساوى ....

(أ) $]-٣ ، ٦[$ (ب) $[-٣ ، ٦]$ (جـ) ح $- [-٣ ، ٦]$ (د) ح $-]-٣ ، ٦[$

---

٢٩ مجموعة حل المعادلة : $|٣ - ٢س| - ٥س = ٣$ فى ح هى ....

(أ) $\{٠ ، ٣\}$ (ب) $\{٠ ، -٢\}$ (جـ) $\{٠\}$ (د) $\varnothing$

---

٣٠ إذا كانت : $د(س - ١) = ٢^{س - ٥}$ ، $د(س + ٣) = \frac{١}{٣٢}$ فإن : س = ...

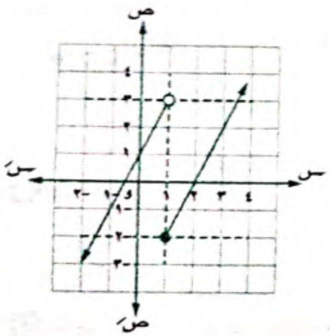
(أ) -٤ (ب) -٢ (جـ) ٤ (د) ٦

---

٣١ إذا كان الشكل المقابل

يمثل منحنى الدالة د فإن :

$\lim_{س \to ٠} د(س) + د(١^{+}) + د(١^{-}) =$ ....



(أ) ٢

(ب) ٣

(جـ) ٤

(د) ٦

---

٣٢ Δ أ ب حـ محيطه ٣٣ سم ، وكان : ظا أ + ظا حـ $= \frac{٢}{٣}$ ، ظا ب $= \frac{١}{٤}$

فإن : بَ = ...

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ١٥

النمــوذج الثاني

امتحان تفاعلى ٢

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ إذا كانت د : ط ⟵ ط حيث د (س) = ٢ س ، ت : ط ⟵ ط حيث

ت (س) = $\frac{س}{٢}$ ، س زوجى ، $\frac{س + ١}{٢}$ ، س فردى ، فإن : (د ∘ ت) (٣) − (د ∘ ت) (٨) = ...

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) −٤ (د) −٥

٢ نهـــا (س ⟵ ∞) $(\frac{٣}{٥})^{\frac{١}{س}}$ = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) ∞

٣ أ ب حـ مثلث فيه ء منتصف $\overline{ب حـ}$ أثبت أن : $(أب)^٢ + (أحـ)^٢ = ٢ (أء)^٢ + ٢ (بء)^٢$

وإذا كان : أ ب = ٥ سم ، أ حـ = ٨ سم ، ب حـ = ١٢ سم أوجد : أ ء

٤ إذا كانت د : د (س) = $\frac{س^٢ - ١}{س - ١}$ ، س ≠ ١ ، أ ٢ ، س = ١ متصلة عند س = ١

فإن : أ = ...

(أ) صفر (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) ١

٥ Δ أ ب حـ فيه : $\frac{أ}{جا أ}$ = ٦ سم فإن طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٦

٦ إذا كانت : د دالة فردية وكان س د (س) + $س^٢$ د (−س) = ٢

فإن : د (٢) = ...

(أ) ٣ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{-١}{٣}$ (د) −٣

٧ إذا كان : س = ٥ + ٢ $\sqrt{٦}$ أوجد فى أبسط صورة قيمة : لو $(س + \frac{١}{س})$ بدون الحاسبة.

٨ فى Δ س ص ع يكون : $\frac{س^٢ + ص^٢ - ع^٢}{٢ س ص}$ = ...

(أ) حتا س (ب) حتا ص (جـ) حتا ع (د) حا ع

٩ نهـــا (س ⟵ ١) $\frac{س^١ - س^{-٢}}{س - س^{-١}}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) −٢

١٠ إذا كانت : د (س) = $٣^{س}$ فإن مجموعة الحل فى ع للمعادلة :

د (٢ س) − ٢٨ د (س) + د (٣) = صفر هى ....

(أ) {١ ، ٢٧} (ب) {٢٧} (جـ) {٠ ، ٣} (د) {٣}

١١ إذا كان : لو أ ∈]٠ ، ١[فإن : أ ∈ ....

(أ)]٠ ، ١[(ب)]١ ، ٢[(جـ)]١ ، ١٠[(د)]١ ، ∞[

١٢ منحنى الدالة الزوجية يكون متماثلًا حول المستقيم ....

(أ) ص = س (ب) $\overleftrightarrow{ص ص}$ (جـ) $\overleftrightarrow{س س}$ (د) ص = −س

١٣ Δ ل م ن فيه : $\frac{جا ل}{٣} = \frac{٢ جا م}{٣} = \frac{جا ن}{٤}$ فإن : ل : م : ن = ...

(أ) ٦ : ٨ : ٣ (ب) ٣ : ٦ : ٨ (جـ) ٨ : ٣ : ٦ (د) ٦ : ٣ : ٨

١٤ أ ب حـ مثلث فيه : حـ = ٧ سم ، ق (∠أ) = ٧٠° ، ق (∠ب) = ٤٠°

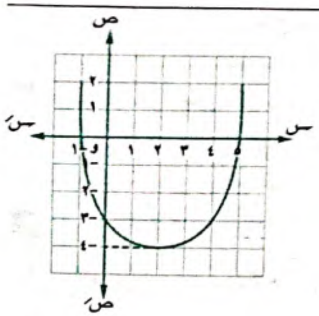
فإن : ب = ... سم

(أ) ٦,٣ (ب) ٨,٤ (جـ) ٣,٦ (د) ٤,٨

١٥ إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د فإن :

نهـــا (س ⟵ ٢) $\frac{[د (س)]^٢ + د (س) - ١٢}{د (س) + ٤}$ = ...

(أ) −٧ (ب) −٤ (جـ) −١ (د) ٣



١٦ استخدم منحنى الدالة د : د(س) = ١/س لرسم منحنى الدالة ر : ر(س) = ١/(س − ٢) + ٣ ومن الرسم عين مجال ومدى ر واطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك ، هل الدالة ر أحادية أم لا ؟

---

١٧ مدى الدالة د : د(س) = (س − ٢)/(٢ − س) يساوى ....

(أ) ح (ب) ح − {٢} (جـ) ح − {−٢} (د) {−١}

---

١٨ إذا كان : ص = أ^(لو_أ س) فإن : ....

(أ) س + ص = ٠ (ب) س = ٢ ص (جـ) س − ص = ٠ (د) س = ١/٢ ص

---

١٩ لو_٣ ٥ × لو_٢ ٣ × لو_٥ ١٦ = ...

(أ) ٣٠ (ب) ١٥ (جـ) لو ١٠٠٠٠ (د) لو_٣٠ ٢٤٠

---

٢٠ المنحنى ر(س) = س² + ٤ هو نفس المنحنى د(س) = س² بإزاحة مقدارها ٤ وحدات فى اتجاه ....

(أ) ←وس (ب) وس→ (جـ) ←وص (د) وص→

---

٢١ ابحث وجود نهاية د(س) = { س² + ١ لكل س < ٣ ؛ ٣س + ١ لكل س ≥ ٣ } عند س = ٣

---

٢٢ الدالة د حيث د(س) = أ^س تكون تناقصية على مجالها إذا كان ....

(أ) أ = ١ (ب) أ > ١ (جـ) ٠ < أ < ١ (د) أ = −١

---

٢٣ نهـا (س ← π/٢) (٢ س + جا س) = ...

(أ) π (ب) π − ١ (جـ) ١ − π (د) π + ١

---

٢٤ نهـا (س ← ∞) √(س²) / س = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) −١ (د) ١

٢٥ مجموعة الحل فى ح للمعادلة : |س − ٧| = ٢ س − ٢ تساوى ....

(أ) {٣ ، −٥} (ب) {٣} (جـ) {−٥} (د) ∅

---

٢٦ إذا كانت : ص = ∛س لكل س ≥ ٠ ، فإن الدالة العكسية لها هى ص = ...

(أ) ١/٣ س³ (ب) س³ (جـ) س³ − ١ (د) س^(١/٣)

---

٢٧ إذا كان محيط Δ أ ب جـ = ٣٣ سم وكان جا أ + جا جـ = ٢/٣ ، جا ب = ١/٤

فإن : أ جـ = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ١٥

---

٢٨ نهـا (س ← ٠) (جا ٢ س + ٥ ظا ٣ س)/س = ...

(أ) ٢ (ب) ١٥ (جـ) ٢١ (د) ١٧

---

٢٩ مجموعة حل المتباينة : √(س² − ٤ س + ٤) > ٠ فى ح هى ....

(أ) ح − {٢} (ب) ح − {−٢} (جـ) ح (د) ∅

---

٣٠ إذا كانت ر(س) دالة وكانت : نهـا (س ← ٢) (ر(س) − ٨)/(س − ٢) = ٧

فإن : نهـا (س ← ٢) (٢ س² − ر(س))/(س − ٢) = ...

(أ) ١ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ١٥

---

٣١ عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب جـ حيث : ق(∠أ) = ١١٠° ، أ = ٧ سم ، ب = ٤ سم هو ....

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) عدد لا نهائى. (د) ٢

---

٣٢ مجموعة حل المعادلة : لو(س + ٢) + لو(س − ٢) = ١ − لو ٢ فى ح هى ....

(أ) {لو_٥ ١٢٥} (ب) {لو_٢ ١٦} (جـ) {لو_٣ ٩} (د) {لو_١٠ ١٠٠}

النمـــوذج الثالث

امتحان تفاعلي ٣

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ إذا كانت : د (س) = $٧^{س + ١}$

أوجد قيمة س التي تحقق : د (٢ س − ١) + د (س − ٢) = ٥٠

٢ إذا كان : لو ٣ = س ، لو ٥ = ص فإن : لو ١٥ = ...

(أ) س ص (ب) $\frac{س}{ص}$ (جـ) س + ص (د) س − ص

٣ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٥ + س^{-٢}}{١ + ٣ س^{-٢}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٥}{٤}$ (جـ) $\frac{٥}{٢}$ (د) ٥

٤ إذا كان : $٩^{س} = ٢$ ، $٢٧^{ص} = ٤$ فإن : $\frac{س - ص}{س + ص}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٧}$ (ب) $\frac{-١}{٧}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{-٤}{٣}$

٥ إذا كانت : د (س) = لو$_{٢}$ (٢ س + ٤) ، $د^{-١}$ (٥) = ١٤ فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

٦ $\lim\limits_{س \to ١٦} \frac{\sqrt{س} - ١}{س - ١٦}$ = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ١ (د) ليس لها وجود.

٧ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{س (جتا س + جتا ٣ س + جتا ٥ س)}{جا س}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٩ (د) ١٥

٨ لو ٢٥ + $\frac{لو ٨ \times لو ١٦}{لو ٦٤}$ = ...

(أ) ٢ (ب) لو ٢ (جـ) ٣ (د) ١

٩ أ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه : ق (∠ أ) = ٥٠° ، ق (∠ ء ب حـ) = ٧٠°

، ب ء = ٨ سم أوجد محيط متوازي الأضلاع لأقرب سم.

١٠ $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{س + ١}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ∞

١١ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{١ - قا س}{جتا س - ١}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) صفر (د) −١

١٢ $\lim\limits_{س \to ٥} \frac{س^{٢} - ٨ س + ١٥}{س^{٢} - ١٠ س + ٢٥}$ = ...

(أ) غير موجودة. (ب) صفر (جـ) ٢ (د) ٣

١٣ المساحة المحصورة بين منحنيي الدالتين د : د (س) = | س + ٣ | − ٢

ر : ر (س) = صفر هي .... وحدة مربعة.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) =

١٤ إذا كان : لو$_{٣}$ ص = س فإن الصورة الأسية هي ....

(أ) ص = $س^{٢}$ (ب) س = $ص^{٣}$ (جـ) س = $٣^{ص}$ (د) ص = $٣^{س}$

١٥ إذا كانت : د دالة فردية على [− س ، س] فإن : د (− س) + د (س) = ...

(أ) ٢ س (ب) غير معرفة. (جـ) −٢ س (د) صفر

١٦ في Δ أ ب حـ إذا كان : ٢ جا أ = ٣ جا ب = ٤ جا حـ فإن : أ : ب : حـ = ...

(أ) ٢ : ٣ : ٤ (ب) ٤ : ٣ : ٢ (جـ) ٣ : ٤ : ٦ (د) ٦ : ٤ : ٣

١٧ $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^{٥} - ٣٢}{س^{٢} + ٣ س - ١٠}$ = ...

(أ) ٨٠ (ب) $\frac{٨٠}{٧}$ (جـ) $\frac{١٦}{٧}$ (د) ١٦

١٨ طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ الذى فيه : ق(∠أ) = ٣٠° ، أ = ١٠ سم يساوى ....

(أ) ١٠ سم (ب) ٢٠ سم (جـ) ٥ سم (د) ٤٠ سم

١٩ الدالة د : د(س) = { س² ، س > ٢ ؛ −س² ، س ≤ ٢ } متناقصة فى الفترة ....

(أ)]٠ ، ٢[(ب)]−∞ ، ٠[(جـ) ح −]٠ ، ٢[(د)]٠ ، ∞[

٢٠ مجال الدالة د : د(س) = لو س س هو ....

(أ) س > ٠ (ب) س < ١ (جـ) ٠ < س < ١ (د) ٠ ≤ س ≤ ١

٢١ إذا كانت : د(س) = √(س − ٢) ، ر(س) = √(٥ − س)

فإن مجال (د ∘ ر) = ...

(أ)]−∞ ، ٥] (ب)]−∞ ، ١] (جـ) [١ ، ∞[(د) [٥ ، ∞[

٢٢ ارسم الشكل البيانى للدالة د : د(س) = { |س| ، س ≤ ٠ ؛ س² ، س > ٠ }

ومن الرسم حدد مدى الدالة وابحث اطرادها.

٢٣ مجموعة حل المعادلة : |س + ٢| + س = −٢ فى ح هى ....

(أ) ∅ (ب) ح (جـ)]−∞ ، −٢[(د)]−∞ ، −٢]

٢٤ قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه ٣ سم ، ٥ سم ، ٧ سم يساوى ....

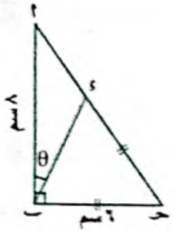
(أ) ١٥٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ٦٠° (د) ٣٠°

٢٥ أ ب حـ مثلث حاد الزوايا فيه : أ = ٥ سم ، ب = ٧ سم ، ق(∠أ) = ٤٠°

فإن مساحة سطح Δ أ ب حـ تساوى .... سم²

(أ) ١٦ (ب) ١٧ (جـ) ١٨ (د) ٧

٢٦ فى الشكل المقابل :



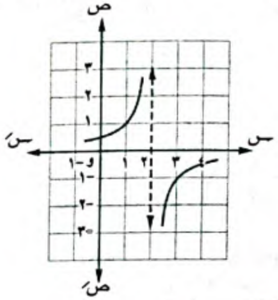
إذا كان : حـ ء = حـ ب = ٦ سم

فإن : ظا θ = ...

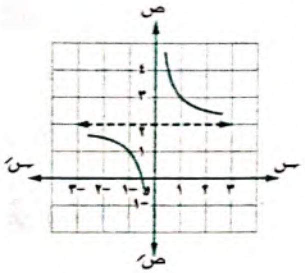
(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$

(جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ٢

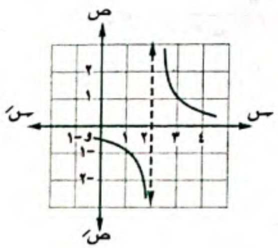
٢٧ إذا كانت : د(س) = $\frac{١}{س - ٢}$ فإن الشكل الذى يمثل الدالة د هو ....



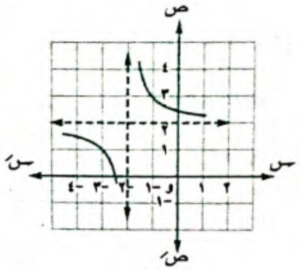
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

١٨ إذا كانت د : د(س) = $\begin{cases} \frac{(س + ٣)^٥ - ٢٤٣}{س} & ، س \neq صفر \\ ك & ، س = صفر \end{cases}$

متصلة عند س = صفر **أوجد : قيمة ك**

---

١٩ $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{٩س^٢ + ٤ + ٥س}}{٤س + ٣} =$ ....

(أ) ∞ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ٢

---

٢٠ مجموعة حل المتباينة : $|٢س - ٦| + |٣ - س| < ١٢$ هى ....

(أ)]−١ ، ٧[(ب) ح − [−٣ ، ٩]

(جـ) ح − [−١ ، ٧] (د)]−٣ ، ٩[

---

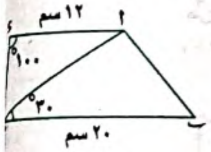
٢١ إذا كان : ٢ لو ص + ٤ لو س − ٣ لو س ص = ٢ (١ − لو ٢) وكان : س = ك ص

فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ١٦ (د) ٢٥

---

٢٢ في الشكل المقابل :



$\overline{أء} \parallel \overline{بجـ}$

ق(∠أجـب) = ٣٠° ، ب جـ = ٢٠ سم

، ق(∠أءجـ) = ١٠٠° ، أء = ١٢ سم

فإن : مساحة Δ أ ب جـ = ... سم² تقريبًا.

(أ) ٦٠ (ب) ٧٧ (جـ) ١٠٤ (د) ١٢٠

النمـوذج الرابع

امتحان تفاعلي

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ $\lim_{س \to ٠}$ ٥س قتا ٢س = ...

(أ) $\frac{٥}{٢}$ (ب) ١٠ (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) صفر

---

٢ في Δ أ ب جـ : $\frac{ب^٢ + جـ^٢ - أ^٢}{٢ ب جـ} =$ ....

(أ) جتا أ (ب) جتا ب (جـ) جتا جـ (د) جا أ

---

٣ مجموعة الحل في ح للمتباينة : $|س - ١| \leq ٣$ يساوي ....

(أ) [−٢ ، ٤] (ب)]−٢ ، ٤[(جـ) ح −]−٢ ، ٤[(د) ح − [−٢ ، ٤]

---

٤ $\lim_{س \to -١} \frac{س^٢ + س}{س^٢ + ١} =$ ....

(أ) صفر (ب) $-\frac{١}{٢}$ (جـ) −١ (د) ليس لها وجود.

---

٥ طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس Δ س ص ع الذي فيه : س = ٢٠ جا س سم

يساوي .... سم.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢٠ (د) ٤٠

---

٦ إذا كان : $٢^س = ٣^ص = ٦$ فأي مما يأتي صحيح ؟

(أ) ص − س = س ص (ب) س − ص = س ص

(جـ) س ص = $\frac{س}{ص}$ (د) س + ص = س ص

---

٧ مجموعة حل المعادلة : لو ٥ س = −١ في ح هي ....

(أ) $\{\frac{١}{١٠}\}$ (ب) $\{\frac{١}{٥٠}\}$ (جـ) {١} (د) {٥٠}

٨ أوجد قياس أصغر زاوية فى Δ أ ب حـ الذى فيه : أ = ٨ سم ، ب = ٧ سم ، ومحيطه ٢١ سم.

---

٩ إذا كانت كل من د ، ر حيث د (س) = ٢ س + أ ، ر (س) = ب س + ٣ دالة عكسية للأخرى فما قيمة كل من أ ، ب ؟

---

١٠ نهـــا (هـ ← ٠) $\frac{(٢ - ٣ هـ)^{٧} - ١٢٨}{٤ هـ}$ = ...

(أ) −٣٣٦ (ب) ٣٣٦ (جـ) ١٩٢ (د) −١٩٢

---

١١ إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = لو$_{٤}$ (١ − أ س) يمر بالنقطة ($\frac{١}{٨}$ ، $\frac{-١}{٢}$)

فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٨

---

١٢ | د (س) | = ...

(أ) { د (س) ، س ≥ ٠ / − د (س) ، س < ٠ }

(ب) { د (س) ، س < ٠ / − د (س) ، س ≥ ٠ }

(جـ) { د (س) ، د (س) ≥ ٠ / − د (س) ، د (س) < ٠ }

(د) { د (س) ، د (س) < ٠ / − د (س) ، د (س) ≥ ٠ }

---

١٣ إذا كانت الدالة د : د (س) = { أ س − ٣ عندما س < −١ / ٣ س − ٢ عندما س > −١ }

لها نهاية عند س = −١ **أوجد : قيمة أ**

---

١٤ نهـــا (س ← ∞) لو ٥$^{\frac{١}{س}}$ = ...

(أ) ٥ (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٥}$ (د) صفر

---

١٥ جميع العلاقات الآتية تكون فيها ص دالة فى س ما عدا العلاقة ....

(أ) ص = ٣ س + ١ (ب) ص = س^{٢} − ٤

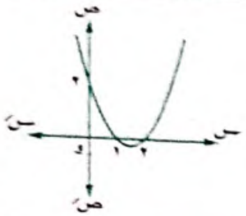
(جـ) س = ص^{٢} − ٢ (د) ص = جا س

١٦ ارسم الشكل البيانى للدالة د : د (س) = { − س^{٢} ، س < ٠ / س ، س ≥ ٠ }

ومن الرسم أوجد مدى الدالة ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك موضحًا اطرادها.

---

١٧ إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د



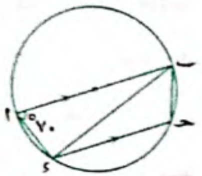
فإن : نهـــا (س ← ٠) $\frac{د (س)}{د (س) + ٢}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١

(جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ٢

---

١٨ فى الشكل المقابل :



إذا كان : ب حـ = ١٠ سم

فإن محيط Δ ب ء حـ = ... سم.

(أ) ٦٠ (ب) ٦٢

(جـ) ٦٤ (د) ٦٧

---

١٩ إذا كانت : د (س) = ٢^{س} فإن قيمة س التى تحقق المعادلة :

د (س + ١) − د (س − ١) = ٢٤ تساوى ....

(أ) ١٦ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ٢

---

٢٠ إذا كانت : ٣$^{س - ٢}$ = ٢$^{س - ٢}$ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) −٢ (جـ) صفر (د) ٢

---

٢١ مجال الدالة د : د (س) = $\frac{١}{|س| - ٣}$ هو ....

(أ) {٣ ، −٣} (ب) [−٣ ، ٣]

(جـ) ح − [−٣ ، ٣] (د) ح − {−٣ ، ٣}

٢٢ نقطة رأس منحنى الدالة د : د (س) = (٢ − س)^{٢} + ٣ هى ....

(أ) (٢ ، ٣)　(ب) (٢ ، −٣)　(جـ) (−٢ ، ٣)　(د) (−٢ ، −٣)

---

٢٣ أ ب حـ مثلث فيه ق (∠ أ) : ق (∠ ب) : ق (∠ حـ) = ٣ : ٤ : ٣ فإذا كان : أ = ٥ سم

فإن محيط الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ يساوى تقريبًا .... سم

(أ) ١٧　(ب) ١٨　(جـ) ١٩　(د) ١٥

---

٢٤ نهـــا (س ← ٠) $\frac{٣^{٢س} - ١}{٣^{س+٢} - ٩}$ = ...

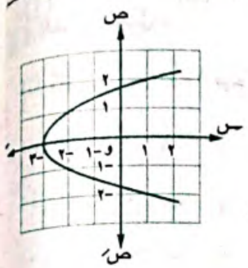
(أ) $\frac{١}{٩}$　(ب) $\frac{٢}{٩}$　(جـ) $\frac{٩}{٢}$　(د) $\frac{١}{٦}$

---

٢٥ المنحنى الموضح بالشكل المقابل

متماثل حول المستقيم الذى

معادلته ....



(أ) س = صفر　(ب) ص = صفر

(جـ) ص = −٢　(د) س = ٢

---

٢٦ إذا كانت : ∠ أ تكمل ∠ حـ　فإن : حتا أ + حتا حـ = ...

(أ) ١　(ب) صفر　(جـ) $\frac{١}{٢}$　(د) −١

---

٢٧ إذا كانت الدالة د : د (س) = { حا ٩ س ظتا س ، س ∈]−$\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$[− {٠} ؛ ك^{٢} ، س = ٠ }

متصلة عند س = ٠　فإن : ك = ...

(أ) ٣　(ب) ± ٣　(جـ) ٩　(د) ± $\frac{١}{٣}$

---

٢٨ لو (حتا θ) + لو (قا θ) = ... حيث θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

(أ) ١　(ب) صفر　(جـ) ٢　(د) −١

٢٩ إذا كان : د (س) = | س − ٢ | + ٤ فإن مجموعة حل المعادلة د (س + ٢) = ٦

هى ....

(أ) {٠ ، ٤}　(ب) {٢ ، −٢}　(جـ) {٢ ، ٤}　(د) {−٢ ، −٤}

---

٣٠ نهـــا (س ← ٠) $\frac{٢ س حتا ٨ س + ٢ حا ٤ س}{ظا ٢ س}$ = ...

(أ) ١٣　(ب) ١٠　(جـ) ٩　(د) ٦

---

٣١ إذا كانت الدالة د : د (س) دالة أحادية ، وكان : د (٢ ك + ٣) = د (ك − ١)

فإن : ك = ...

(أ) −١　(ب) −٢　(جـ) −٣　(د) −٤

---

٣٢ أ ب حـ مثلث فيه : ب حـ = ١٤ سم ، ق (∠ ب) = ٦٠° ومساحة المثلث تساوى ٤٢ $\sqrt{٣}$ سم^{٢}

فإن : أ ب = ... سم

(أ) ١٤　(ب) ١٢　(جـ) ٧　(د) ٦

النمـــوذج الخامس

امتحان تفاعلى ٥

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ $\lim_{س \to ١} \frac{{س^{\frac{1}{2}}}^{٦} - س^{\frac{1}{2}}}{{س^{\frac{1}{2}}}^{٢} - س^{\frac{1}{2}}} =$ ....

(أ) $\frac{١٣}{٧}$ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) س

٢ إذا كان : $٥^{س+١} = ٧^{س+١}$ فإن : $٣^{س+١} =$ ....

(أ) صفر (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١

٣ إذا كان : س < ١ فإن : $|٢ - س| - |س - ٤| =$ ....

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ٢ س − ٧ (د) ٧ − ٢ س

٤ مجموعة الحل فى ح للمعادلة : $|٢ س - ٤| = |س + ١|$ تساوى ....

(أ) {٠ ، ٥} (ب) {١ ، ٥} (جـ) {٢ ، ٥} (د) {٥}

٥ مجال الدالة د : د (س) = $\frac{\sqrt{س - ٢}}{س - ٣}$ هو ....

(أ) ح (ب) {٣} (جـ) [٢ ، ∞[(د) [٢ ، ∞[− {٣}

٦ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣} & ، س \neq ٣ \\ ٢\,أ & ، س = ٣ \end{cases}$ متصلة عند س = ٣

فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) −٣ (د) ٣

٧ فى ∆ ء هـ و إذا كان : ق(∠ء) = ٣٠° ، هـَ = ١٥ $\sqrt{٣}$ سم ، ق(∠هـ) = ٦٠°

فإن : ءَ = ... سم.

(أ) ٣٠ (ب) ٤٥ (جـ) ١٥ (د) ٦٠

٨ موضحًا خطوات الحل حيث س عدد حقيقى أوجد مجموعة حل المعادلة :

$٣^{٢س - ١} - ٤ \times ٣^{س} + ٩ = ٠$.

٩ $\lim_{س \to \infty} (٣ + ٥ س^٢ + ٣ س) =$ ....

(أ) غير موجودة. (ب) ٥ (جـ) ∞ (د) ١١

١٠ إذا كانت : د (س) = ٤ س − ٥ ، ر (س) = ٣س

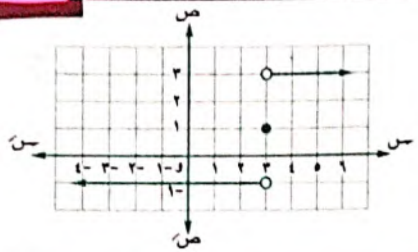
فإن : (د ∘ ر) (٢) = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢٧ (د) ٣١

١١ إذا كانت : د (أ) = $٢^{أ}$ فإن : $لو_٢$ د (أ) = ...

(أ) ٢ (ب) د (أ) (جـ) أ (د) $\frac{١}{أ٢}$

١٢ من الشكل المقابل :



د (٣^{+}) + د (٣) = ...

(أ) ٢ (ب) ٠ (جـ) ٤ (د) ٦

١٣ $\lim_{س \to ٠} \left(\frac{جا ٢ س}{س} - جتا ٥ س\right) =$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

١٤ من بين الدوال الآتية الدالة الزوجية هى د (س) = ...

(أ) جا س (ب) جا ٣٠° (جـ) س جتا س (د) $س^٢$ + طا س

١٥ فى أى مثلث س ص ع يكون ٢ سَ عَ × .... = $سَ^٢ + عَ^٢ - صَ^٢$

(أ) جتا س (ب) جتا ع (جـ) جتا ص (د) جا ص

١٦ أ ب جـ ء شكل رباعي فيه : أ ب = ٢٢ سم ، ق(∠ د ء أ ب) = ٦٥° ، ق(∠ د ء ب أ) = ٥٠° ، ب جـ = ٢٥ سم ، ء جـ = ١٨ سم

أوجد : ق(∠ جـ ب ء)

١٧ إذا كانت : $\lim_{س \to -1} \frac{س^2 + ك س + م}{س^2 - 1} = 2$ فإن : ك + م = ...

(أ) -٤ (ب) -٥ (جـ) -٨ (د) -٩

١٨ مدى الدالة د : د(س) = $\frac{س^2 - 1}{س - 1}$ هو ......

(أ) ح (ب) ح - {٠} (جـ) ح - {١} (د) ح - {٢}

١٩ إذا كان : $\frac{أ + ب}{13} = \frac{ب + جـ}{11} = \frac{جـ + أ}{12}$ فإن : جتا أ = ...

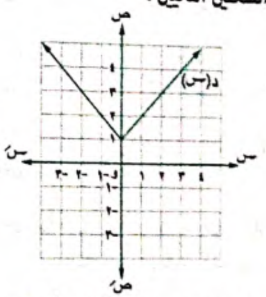
(أ) $\frac{1}{5}$ (ب) $\frac{5}{7}$ (جـ) $\frac{19}{25}$ (د) $\frac{4}{11}$

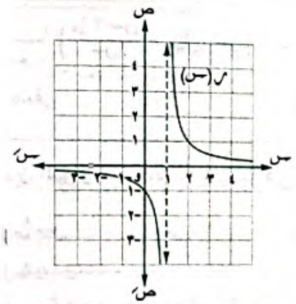
٢٠ عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب جـ

حيث : ق(∠أ) = ٤٧° ، أ = ٤ سم ، ب = ٦ سم يساوي ......

(أ) ١ (ب) ٠ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائي.

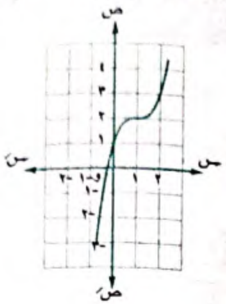
٢١ من الشكلين التاليين :



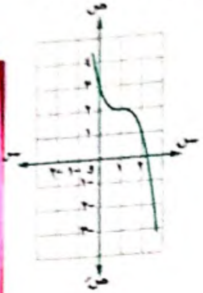


أوجد (د ∘ ر) ومثلها بيانيًا مبينًا المجال وكونها زوجية أم فردية وابحث تماثلها وكونها أحادية أم لا.

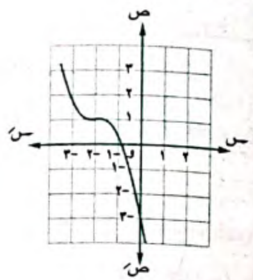
٢٢ إذا كانت : د(س) = ٢ - (س - ١)³ فإن الشكل الذي يمثل الدالة د هو ......



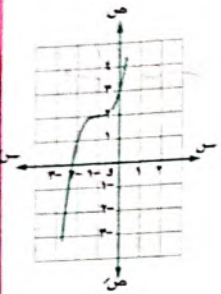
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

٢٣ $\lim_{س \to 1} (2س - 5) = $ ......

(أ) ٢ (ب) -٣ (جـ) ٧ (د) صفر

٢٤ مجموعة حل المعادلة : لو$_س$ (س + ٦) = ٢ في ح هي ......

(أ) {٣ ، -٢} (ب) {٣} (جـ) {٣ ، ١} (د) {٦ ، ١}

٢٥ الدالة العكسية للدالة د : د(س) = ٨ س³ - ١ هي $د^{-1}$(س) = ...

(أ) $\sqrt[3]{س^3 - \frac{1}{8}}$ (ب) $\frac{\sqrt[3]{س + 1}}{2}$

(جـ) $8\sqrt[3]{س} - 1$ (د) $\frac{\sqrt[3]{س - 1}}{2}$

٢٦ Δ ل م ن فيه : ق(∠ل) = ٣٠° ، م ن = ٧ سم فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه يساوى ....

(أ) ٧ سم (ب) ٣,٥ سم (جـ) ١٤ سم (د) $\frac{١٤}{\sqrt{٣}}$ سم

---

٢٧ مجموعة حل المعادلة : $٢^{س^٢} = ١٦$ فى ح هى ....

(أ) {٢} (ب) {-٢} (جـ) {٢ ، -٢} (د) {٤ ، -٤}

---

٢٨ ابحث اتصال الدالة د : د(س) = $\begin{cases} \frac{س + جا س}{٣س - جا ٢س} & ، س < ٠ \\ ٣س - ١ & ، س \geq ٠ \end{cases}$ عند س = ٠

---

٢٩ الدالة د : د(س) = ٥ - $س^٢$ - ٤ س تزايدية عندما س ∈ ....

(أ)]٢ ، ∞[(ب)]-٢ ، ∞[(جـ)]-∞ ، ٢[(د)]-∞ ، -٢[

---

٣٠ $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{جتا ٢س}{٤س - \pi}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{-١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{-١}{٤}$

---

٣١ فى Δ أ ب حـ إذا كان : ٣ جا أ = ٤ جا ب = ٢ جا حـ فإن جيب تمام أصغر زاوية فى Δ أ ب حـ = ...

(أ) $\frac{١١}{٢٤}$ (ب) $\frac{٤٣}{٤٨}$ (جـ) $\frac{٢٩}{٣٦}$ (د) $\frac{١١}{٣٦}$

---

٣٢ مجموعة حل المتباينة : $\sqrt{س^٢ - ٦س + ٩} + ٢ \geq ٩$ هى ....

(أ) ح -]-٤ ، ١٠[(ب) ح -]-٨ ، ١٠[

(جـ) [-٤ ، ١٠] (د) [-٨ ، ١٠]

النمـــوذج السادس

امتحان تفاعلي ٦

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ إذا كانت : $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ + ٧س + ب}{س^٢ - ٦س + ٨} = \frac{١٥}{٢}$ فإن : ب = ...

(أ) -٤٤ (ب) ٧ (جـ) -٨ (د) ٨

---

٢ إذا كان : $لو_ب س + لو_ب ٣ = لو_ب ٢٧ - ١$ فأى مما يأتى يعبر عن س بدلالة ب ؟

(أ) س = ٩ ب (ب) س = $\frac{١}{٩}$ ب (جـ) س = $\frac{٩}{ب}$ (د) س = $\frac{١}{٩ب}$

---

٣ إذا كان : $لو_٣ (س + ٢) - لو_٣ (س - ١) = لو_٣ ٤$ فإن : س = ...

(أ) -٢ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) -١

---

٤ ابحث نوع كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

① $د_١(س)$ = س جا س ② $د_٢(س) = \begin{cases} س^٢ & ، س \geq ٠ \\ |س| & ، س < ٠ \end{cases}$

---

٥ $\lim_{س \to ٠} \frac{س^٢ - ١}{س}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) غير موجودة. (د) -١

---

٦ إذا كان : $س^{\frac{٣}{٢}} = ٦٤$ فإن : س = ...

(أ) ٥١٢ (ب) ١٦ (جـ) ٤ (د) ٢

---

٧ مساحة سطح الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ المتساوى الأضلاع الذى طول ضلعه ٩ سم تساوى .... $سم^٢$

(أ) ٩ π (ب) ٩$\sqrt{٣}$ π (جـ) ٢٧ π (د) ٨١ π

٨ إذا كانت : د (س) = ٣ س − ١ ، ى (س) = س²

فإن : (ى ∘ د) (−٢) = ...

(أ) −٧ (ب) ١١ (جـ) −٤٩ (د) ٤٩

٩ نهـــا (هـ ← ٠) [(س + هـ)⁷ − س⁷] / هـ = ...

(أ) س⁷ (ب) ٧ س⁶ (جـ) صفر (د) ١

١٠ في Δ أ ب جـ يكون : أ² + ب² − جـ² = ...

(أ) جتا أ (ب) أ ب جتا جـ (جـ) جتا جـ (د) ٢ أ ب جتا جـ

١١ منحنى ر (س) = | س + ٣ | هو نفس منحنى د (س) = | س |

بإزاحة مقدارها ٣ وحدات في اتجاه ....

(أ) و س← (ب) و س→ (جـ) و ص← (د) و ص→

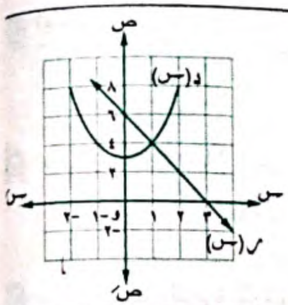
١٢ مجموعة حل المتباينة : | ٣ − ٢ س | ≥ ١ في ح هي ....

(أ) [١ ، ٢] (ب)]١ ، ٢[(جـ) ح −]١ ، ٢[(د) ح − [١ ، ٢]

١٣ إذا كانت د : ح⁺ ← ح حيث د (س) = ١ / (س² + ١)

أوجد : د⁻¹ (س) وعين مجال د⁻¹ ومداها.

١٤ الشكل المقابل يوضح منحنيي الدالتين د ، ر



فإن : (ر ∘ د) (١) = ...

(أ) −٨ (ب) −٢ (جـ) ٤ (د) ٥

١٥ نقطة تماثل الدالة د : د (س) = (٢ س − ١) / س هي ....

(أ) (١ ، ٢) (ب) (٢ ، ١) (جـ) (٢ ، ٢) (د) (٠ ، ٢)

١٦ نهـــا (س ← ٠) (جا ٢ س² + ظا ٢ س) / ٢ س = ...

(أ) ٨/٣ (ب) ٤/٣ (جـ) ٢ (د) ٣

١٧ إذا كان لو (٢ س + ص) = ١/٢ (لو س + لو ص) + لو ٣ حيث س ≠ ص

وكانت ص = ك س فإن ك = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ١/٤ (د) −٤

١٨ نهـــا (س ← π/٢) (٢ س − جتا س) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) π (د) π/٢

١٩ الدالة الزوجية المتصلة عند النقطة (أ ، ب) تكون متصلة أيضًا عند النقطة ....

(أ) (أ ، ب) (ب) (−أ ، ب) (جـ) (أ ، −ب) (د) (−أ ، −ب)

٢٠ مدى الدالة د : د (س) = { ٠ ، س ≤ ٠ ؛ ١ ، س > ٠ } هو ....

(أ) {١} (ب) {٠} (جـ) ح (د) {٠ ، ١}

٢١ طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث س ص ع الذي فيه :

س = ٣ سم ، ص = ٥ سم ، ع = ٧ سم يساوي .... سم.

(أ) ٧/٣ √٣ (ب) ٢ √٣ (جـ) ٤,٤ (د) ١٤/٣ √٣

٢٢ في الشكل المقابل :



إذا كان محيط Δ أ ب جـ = ٤٢ سم

، الدائرة م تمس أضلاع المثلث من الداخل

فإن : ق (∠ أ) = ...

(أ) ٥٣° ٧′ (ب) ٦٧° ٢٣′ (جـ) ٣٦° ٥٣′ (د) ٣٧° ٢٢′

٢٣ إذا كان : $٥^{س-٢} = ٤^{٢-س}$ فإن : س = ...

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) ٣ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) صفر

---

٢٤ حل المثلث أ ب حـ مقربًا الناتج لأقرب جزء من عشرة حيث :

ق(∠أ) = ٤٠° ، ق(∠ب) = ٣٠° ، بَ = ١٠ سم.

---

٢٥ القيمة العددية للمقدار : $\frac{لو ٦٤}{لو ٨}$ تساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٨ (جـ) ٨٠ (د) ٧٢

---

٢٦ فى Δ ء هـ و الذى فيه ق(∠ء) = ٨٠° ، ق(∠هـ) = ٦٠° إذا كان وَ = ١٢ سم

فإن : ءَ = ... سم

(أ) $\frac{١٢ \text{ حا } ٨٠°}{\text{حا } ٤٠°}$ (ب) $\frac{١٢ \text{ حا } ٨٠°}{\text{حا } ٦٠°}$ (جـ) $\frac{١٢ \text{ حا } ٤٠°}{\text{حا } ٨٠°}$ (د) $\frac{١٢ \text{ حتا } ٨٠°}{\text{حتا } ٤٠°}$

---

٢٧ $\lim_{س \to \infty} \frac{(٢س + ١)^{٤٠} (٤س - ١)^{٥}}{(٢س + ٣)^{٤٥}} = $ ....

(أ) ١٦ (ب) ٣٢ (جـ) ٦٤ (د) ٨

---

٢٨ إذا كانت الدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ + ٢س - ٣}{س + ٣} & ، س \neq -٣ \\ س + أ & ، س = -٣ \end{cases}$

متصلة عند س = -٣ أوجد : قيمة أ

---

٢٩ نقطة تقاطع المنحنى د : د(س) = ٤ - $\frac{٢}{س - ١}$ مع محور الصادات هى ....

(أ) (٠ ، ٢) (ب) (١ ، ٤) (جـ) (٠ ، ٦) (د) (٠ ، -٢)

---

٣٠ $\lim_{س \to ٢} \frac{٥س^٢ - ٤٥}{\sqrt{٥س + ١} - ٤} = $ ....

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ٤٨

٣١ مجموعة حل المعادلة : $٣^{س+١} + ٣^{٣-س} = ٣٠$ فى ع هى ....

(أ) {١ ، ٩} (ب) {لو٣ ٢٧ ، لو ١}

(جـ) {لو٥ ٢٥ ، لو ١} (د) {لو٢ ٢٥ ، لو٢ ٥}

---

٣٢ أ ب حـ مثلث فيه : ق(∠ب) = ٣ ق(∠حـ) = ٨٤° ، أ حـ = ١٦ سم

فإن محيط Δ أ ب حـ = ... سم تقريبا.

(أ) ٨١,٥ (ب) ٦٢,٢ (جـ) ٤١,٣ (د) ٣٨,٥

النمــوذج السابع

امتحان تفاعلى ٧

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ إذا كانت : د (س) = (١٠)^٢س ، ر (س) = لو (√س) فإن : (ر ∘ د) (س) = ...

(أ) ١٠^٢س (ب) لو √س (جـ) ١٠^٢س لو √س (د) س

---

٢ في Δ أ ب جـ يكون : أ / (أ + ب) = جا أ / ....

(أ) جا ب (ب) جا جـ (جـ) جا أ + جا ب (د) جا أ + جا جـ

---

٣ في Δ أ ب جـ إذا كان : جا أ = ٢ جا جـ ، ب جـ = ٦ سم فإن : أ ب = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٦

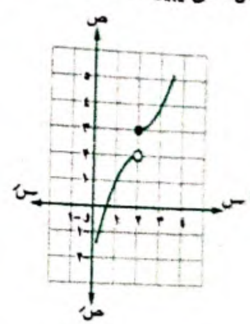
---

٤ أوجد في ح مجموعة حل المعادلة : س^(٤/٣) − ١٠ س^(٢/٣) + ٩ = صفر

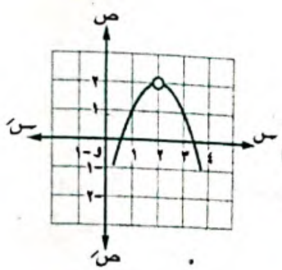
---

٥ الشكل الذي يبين الدالة المتصلة عندما س = ٢ هو الشكل ....

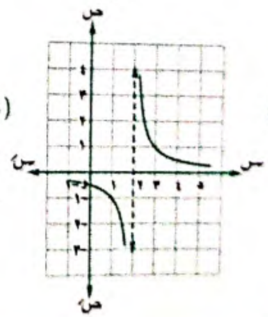
(أ)



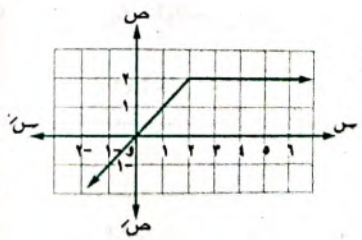
(ب)



(جـ)



(د)



٦ مجال الدالة د : د (س) = √(س + ٢) + √(٥ − س) هو ....

(أ)]−٢ ، ∞[(ب)]−٢ ، ٥[(جـ) [−٢ ، ٥] (د)]٢ ، ∞[

---

٧ في Δ أ ب جـ يكون : ب^٢ + جـ^٢ − أ^٢ = ٢ ب جـ × ....

(أ) جا (٩٠° − ب) (ب) جا (٩٠° − أ)

(جـ) جتا ب (د) جتا (٩٠° − ب)

---

٨ عدد الحلول الممكنة للمثلث س ص ع الذي فيه :

ق (∠ س) = ٣٠° ، س̄ = ٦ سم ، ص̄ = ٩ سم يساوي ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٠ (د) عدد لا نهائي.

---

٩ نهـا (س ← ١) (٤ − √(س + ١٥)) / (١ − س^٢) = ...

(أ) ١/١٦ (ب) ١٦ (جـ) ١/٤ (د) ٤

---

١٠ إذا كان طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب جـ يساوي ٦ سم

فإن : ٢ أ / جا أ = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ٦ (جـ) ١٨ (د) ٢٤

---

١١ مجموعة حل المعادلة : (لو_ه ص)^٢ − ٧ لو_ه ص + ١٢ = ٠ في ح هي ....

(أ) {٢٥ ، ١٢٥} (ب) {٢٥ ، ٦٢٥}

(جـ) {١/٢٥ ، ٦٢٥} (د) {١٢٥ ، ٦٢٥}

---

١٢ إذا كانت : د (س) = (س − ٥) / |س − ٥| فإن : [د (٥^+)]^٢ + [د (٥^−)]^٢ = ...

(أ) ٥٠ (ب) صفر (جـ) ٤ (د) ٢

---

١٣ لو_٢ (٣/٢٥) + ٥ لو_٢ ٥ + لو_٢ ٢٧ − لو_٢ (١٢٥/١٢) − لو_٢ ٢٤٣ = ...

(أ) ٤ (ب) لو_٢ ٩ (جـ) لو ٢٥ (د) لو (١/١٠٠)

١٤ إذا كانت : نهـــا (س ← ١) $\frac{\text{س}^{٢} - \text{ك}^{٢}}{\text{س} + ٢}$ = −١ فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ٤ (د) ± ٢

١٥ إذا كانت د : د (س) = س^{٢} + ١ فأى العبارات الآتية غير صحيحة ؟

(أ) د دالة أحادية.

(ب) د دالة فردية.

(جـ) د تزايدية على مجالها.

(د) منحنى الدالة د يقطع محور السينات عند س = −١

١٦ س ص ع مثلث فيه : سَ = ٥ سم ، صَ = ٧ سم ، ق (∠ ع) = ٦٥°

احسب : عَ ثم أوجد : محيط ∆ س ص ع

١٧ إذا كان : لو$_{٩}$ س = ٢ فإن : لو$_{\text{س}}$ ٢ = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ٨ (د) ٩

١٨ إذا كانت : د$^{-١}$ هى الدالة العكسية للدالة د فإن : ....

(أ) مجال د$^{-١}$ = مجال د

(ب) مجال د$^{-١}$ = مدى د

(جـ) مدى د$^{-١}$ = مدى د

(د) مدى د$^{-١}$ = مجال د$^{-١}$

١٩ نهـــا (ص ← ٢) $\frac{\text{ص}^{٥} - ٣٢}{\text{ص} - ٢}$ = ...

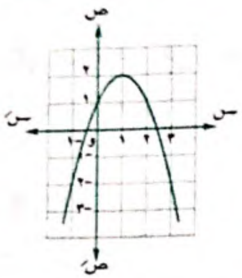
(أ) ٣١ ص^{٤} (ب) ٣٢ × ٢^{٤} (جـ) ٦٤ (د) ٥ × ٢^{٤}

٢٠ ابحث وجود نهاية للدالة د حيث :

د (س) = { $\frac{\text{ظا ٢ س}}{\text{جا س}}$ عندما س < ٠ ، $\frac{٥ \text{س} + ٦}{\text{س} + ٢}$ عندما س > ٠ }

عندما س تؤول إلى الصفر.

٢١ قاعدة الدالة التى تمثل الشكل المقابل هى



د (س) = ...

(أ) (س − ٢)^{٢} + ١

(ب) − (س − ٢)^{٢} + ١

(جـ) − (س − ١)^{٢} + ٢

(د) (− س + ١)^{٢} + ٢

٢٢ مجموعة حل المعادلة : | ٢ س − ١ | = ٥ فى ح هى ....

(أ) {٣} (ب) {−٢} (جـ) ∅ (د) {٣ ، −٢}

٢٣ إذا كانت : د (س) = { س − ٤ ، س ≥ ٤ ؛ ر (س) ، س < ٤ } متماثلة حول المستقيم س = ٤

فإن : الدالة ر تكون ....

(أ) تزايدية. (ب) تناقصية. (جـ) زوجية. (د) ثابتة.

٢٤ إذا كان د (س) = س^{٢} − ٣ ، ر (س) = $\sqrt{\text{س} - ٢}$ أوجد : (د ∘ ر) (س)

فى أبسط صورة محددًا المجال ثم أوجد : (د ∘ ر) (٣)

٢٥ نهـــا (س ← ٠) $\frac{٣ \text{س} + ٢ \text{س}^{-١}}{\text{س} + ٤ \text{س}^{-١}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ٢ (د) ٤

٢٦ إذا كان : أ ∈]٠ ، ٩[فإن : لو$_{٣}$ أ ∈ ....

(أ)]−∞ ، ٢[(ب)]٢ ، ٨١[(جـ)]٢ ، ∞[(د)]−∞ ، ٠[

٢٧ نهـــا$_{س \to \infty}$ $\left(\frac{١}{س - ٢} + ١\right)$ = ...

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) صفر (د) ∞

٢٨ مجموعة الحل فى ح للمعادلة : $\sqrt{س^٢ - ٦س + ٩} + ٢س = ٩$ تساوى ....

(أ) {٤ ، ٦} (ب) {٦} (جـ) {٤} (د) ∅

٢٩ مجموعة الحل فى ح للمتباينة : |س − ٣| ≥ ٢ هى ....

(أ)]١ ، ٥[(ب) [١ ، ٥] (جـ) ح −]١ ، ٥[(د) ح − [١ ، ٥]

٣٠ إذا كانت الدالة د : د(س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢} & ، س \neq ٢ \\ ك & ، س = ٢ \end{cases}$

متصلة عند س = ٢ فإن : ك = ...

(أ) صفر (ب) ٨ (جـ) ٢ (د) ٤

٣١ إذا كانت : $ب^{س} - ٢ب^{-س} = ١$ حيث ب > ١ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) لو ٢ (جـ) لو$_٢$ ب (د) لو$_ب$ ٢

٣٢ إذا كان : أ ب جـ مثلث مساحته ٢٤ سم^٢ ، وطول نصف قطر الدائرة الخارجة عنه ٥ سم

فإن : جا أ جا ب جا (أ + ب) = ...

(أ) $\frac{٣}{٢٥}$ (ب) $\frac{٦}{٢٥}$ (جـ) $\frac{٩}{٢٥}$ (د) $\frac{١٢}{٢٥}$

النمـــوذج الثامن

امتحان تفاعلى ٨

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ لو$_أ$ س ÷ لو$_{أب}$ س = ...

(أ) ١ − لو$_أ$ ب (ب) ١ + لو$_أ$ ب (جـ) ١ − لو$_ب$ أ (د) ١ + لو$_ب$ أ

٢ إذا كانت : د(س) = $\begin{cases} ٣س^٢ + أس - ٢ & ، س > ٢ \\ ٢س + ب & ، س < ٢ \end{cases}$

وكان : نهـــا$_{س \to ٢}$ د(س) = ١٦ فإن : أ + ب = ...

(أ) ٤ (ب) ١٠ (جـ) −١٣ (د) ٧

٣ طول قطر الدائرة الداخلة للمثلث المتساوى الأضلاع الذى طول ضلعه ٤ $\sqrt{٣}$ سم

يساوى .... سم.

(أ) ٢ $\sqrt{٣}$ (ب) ٤ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٤ (د) ٨

٤ قيمة : لو$_٣$ ٥٤ − لو$_٣$ $\frac{٨}{١٥}$ + لو$_٣$ $\frac{٤}{٥}$ = ...

(أ) لو$_٣$ (ب) ٣ (جـ) ٢٧ (د) ٤

٥ إذا كانت : ص = د(س) منحنى دالة حقيقية فإن صورته بإزاحة قدرها ٢ وحدة جهة اليمين هى ر(س) = ...

(أ) د(س − ٢) (ب) د(س + ٢) (جـ) د(س) + ٢ (د) د(س) − ٢

٦ عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب جـ حيث : ق(∠أ) = ٦٠° ، جـ = ٣ سم

، أ = ٥ سم هو ....

(أ) ١ (ب) ٢

(جـ) لا يوجد مثلث. (د) عدد لا نهائى من المثلثات.

٧ نهـــا$_{س \to صفر}$ $\frac{س^٢ + س}{س}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٨ إذا كان : د (س) = ٥^س فأوجد في ح مجموعة حل المعادلة : د (س) + د (س − ١) = ١٥٠

٩ في Δ أ ب جـ يكون : جتا (أ + ب) = ...

(أ) (أ² + ب² − جـ²) / (٢ أ ب) (ب) (أ² + جـ² − ب²) / (٢ أ جـ) (جـ) (ب² + جـ² − أ²) / (٢ ب جـ) (د) (جـ² − أ² − ب²) / (٢ أ ب)

١٠ إذا كان : ١ < س < ٢ فإن : √(س² − ٢س + ١) + √(س² − ٤س + ٤) = ...

(أ) ٢س − ٣ (ب) ٢س − ١ (جـ) ١ (د) ٣

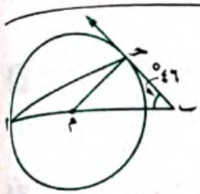
١١ نها (س ← ٣) (س² − ٧س + ١٢) / (س − ٣) = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) −٢ (د) ٣

١٢ مجال الدالة د : د (س) = √((س − ٥) / (س + ٤)) = ...

(أ) [٥ ، ∞[(ب) [−٤ ، ٥] (جـ) ح −]−٤ ، ٥] (د) ح − [−٤ ، ٥[

١٣ في الشكل المقابل :



إذا كان : أ جـ = ٢٠ سم

فإن محيط Δ أ جـ م = ... سم.

(أ) ٤١٫٥ (ب) ٤٣٫٥ (جـ) ٤٥ (د) ٤٧٫٥

١٤ ٣^(لو٣ ٤) + لو٥ ٢٥ = ...

(أ) ٦ (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) ١

١٥ مجال الدالة د : د (س) = √(٩ − س) هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٩} (جـ)]−∞ ، ٩] (د) [٩ ، ∞[

١٦ نها (س ← ٠) (س² − ٥س) / (√(س + ٤) − ٢) = ...

(أ) −٢٠ (ب) ٦ (جـ) ٥ (د) ٢٥

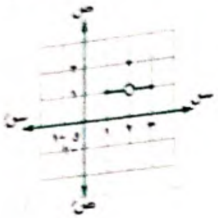
١٧ أ ب جـ مثلث فيه : جـ = ١٩ سم ، ق (∠أ) = ١١٢° ، ق (∠ب) = ٣٢°

أوجد مساحة Δ أ ب جـ لأقرب سم² وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه لأقرب سم.

١٨ مجال الدالة د : د (س) = لو_س س هو ....

(أ) س > ٠ (ب) س < ١ (جـ) ٠ < س < ١ (د) ٠ ≤ س ≤ ١

١٩ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د



فأي من الجمل الآتية صحيح ؟

(أ) د متصلة على الفترة [١ ، ٣]

(ب) د متصلة على الفترة]١ ، ٣[

(جـ) نها (س ← أ) د (س) موجودة حيث أ ∈ [١ ، ٣]

(د) نها (س ← أ) د (س) موجودة حيث أ ∈]١ ، ٣[

٢٠ نها (س ← ∞) ((٣س² + ٢س + ١) / (س² − ٣س + ٢))⁴ = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢٧ (د) ٨١

٢١ إذا كانت د : ح ← ح حيث د (س) = ٤س − ٢ ، ع : [−٢ ، ٣] ← ح

حيث ع (س) = ٤ − ٣س ارسم الدالة (د + ع) محددًا مجالها ومداها وابحث اطرادها.

٢٢ أي مما يأتي لا يساوي (⁵√(س⁴)) ؟

(أ) (⁵√س)⁴ (ب) ⁴√(س⁵) (جـ) س^(٤/٥) (د) (س^(١/٥))⁴

٢٣ إذا كانت الدالة د دالة زوجية في الفترة [جـ ، ء] فإن : جـ + ء = ...

(أ) ٢جـ (ب) ٢ء (جـ) جـ − ء (د) صفر

٢٤ أوجد قيمة أ التي تجعل الدالة د متصلة عند أ حيث د (س) = { ٢ − س² ، س ≤ أ ؛ س ، س > أ }

٢٥ إذا كانت: $د(س) = (س - ٥)(س + ٥)$ ، $ر(س) = س - ٥$

فإن: $\frac{د}{ر}(٥) = $ ....

(أ) ١٠ (ب) ١ (جـ) $\frac{د}{ر}(-٥)$ (د) غير معرفة.

---

٢٦ $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{جا ٢\sqrt{س}}{\sqrt{س}} = $ ....

(أ) ٨ (ب) −٢ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) ٢

---

٢٧ إذا كان: $\left(\frac{١}{٢}\right)^{أ^٢ - أ - ٢} = ١$ حيث أ < صفر فإن: أ = ...

(أ) ١ (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) ٣

---

٢٨ Δ أ ب جـ الذى فيه: ق(∠جـ) = ١١٦° ، جـَ = ١٢ سم ، أَ = ١٠ سم

يكون: بَ = ... سم (لأقرب جزء من عشرة).

(أ) ٢,٦ (ب) ٣,٦ (جـ) ٤,٦ (د) ٥,٦

---

٢٩ $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{١ - جتا س + ظا ٥ س}{١ - جتا س - ظا س} = $ ....

(أ) −٥ (ب) ٥ (جـ) صفر (د) غير معرفة.

---

٣٠ Δ أ ب جـ فيه: $جتا ب = \frac{جـَ}{٢ أَ}$ فإن: Δ أ ب جـ يكون ....

(أ) متساوى الأضلاع. (ب) متساوى الساقين.

(جـ) مختلف الأضلاع. (د) غير ذلك.

---

٣١ مجموعة حل المتباينة: $\frac{١}{|٢س - ٣|} > ٢$ فى ح هى ....

(أ) $[\frac{٥}{٤} ، \frac{٧}{٤}] - \{\frac{٣}{٢}\}$ (ب) $]\frac{٥}{٤} ، \frac{٧}{٤}[$

(جـ) $]\frac{٥}{٤} ، \frac{٧}{٤}[- \{\frac{٣}{٢}\}$ (د) $[\frac{٥}{٤} ، \frac{٧}{٤}]$

---

٣٢ الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد التالية هى ....

(أ) $د_١(س) = س + ٥$ (ب) $د_٢(س) = س^٢$

(جـ) $د_٣(س) = |س - ٢|$ (د) $د_٤(س) = -٣$

النمـــوذج التاسع

امتحان تفاعلى ٩

أجب عن الأسئلة الآتية:

١ مجموعة حل المعادلة: $لو_{(س + ٢)} ١٢٥ = ٣$ فى ح هى ....

(أ) {٥} (ب) {٣} (جـ) ∅ (د) {٢}

---

٢ Δ ل م ن الذى فيه: ق(∠ل) = ٣٠° ، مَ = ٩ سم يكون له حلان عندما

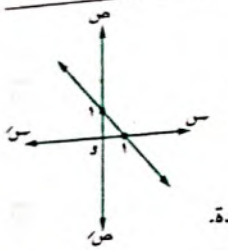
لَ = ... سم.

(أ) ٦ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ٢

---

٣ إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن: $\underset{س \to ٢}{نهـا} |د(س)| = $ ....



(أ) −١ (ب) صفر

(جـ) ١ (د) غير موجودة.

---

٤ إذا كانت: $د(س) = ٣ + \sqrt{س - ١}$ أوجد الدالة العكسية.

---

٥ إذا كانت د: ح ← ح حيث $د(س + ١) - د(س) = س - ١$

فإن: $د(١٠) - د(٩) = $ ....

(أ) ١ (ب) ٩ (جـ) ٨ (د) ١٨

---

٦ $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{٢س}{جا ٣س} = $ ....

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) ٦ (د) ليس لها وجود.

٧ صورة المنحنى : ص = |س| − ٥ بالانتقال ٣ وحدات في اتجاه $\overrightarrow{و س}$ ، ٥ وحدات في اتجاه $\overleftarrow{و ص}$ هي ....

(أ) ص = |س − ٣| + ٥ (ب) ص = |س − ٣| (جـ) ص = |س − ٣| − ١٠ (د) ص = |س + ٣|

٨ إذا كانت الدالة د : د(س) = $\begin{cases} س^{٢} + أ س − ٢ & ، س > ٢ \\ ٤ & ، س = ٢ \\ ٥ أ − ب س & ، س < ٢ \end{cases}$ متصلة عند س = ٢

أوجد قيمة كل من : أ ، ب

٩ $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{س + ٥} − \sqrt{٥}}{\sqrt{س} − \sqrt{٥}}$ = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ∞ (د) −∞

١٠ إذا كانت : ص = $\sqrt[٥]{س}$ فإن الدالة العكسية لها ص = ...

(أ) $\frac{١}{٥} س^{٥}$ (ب) $س^{٥}$ (جـ) $س^{٥} − ١$ (د) $٥ س^{٥}$

١١ في Δ أ ب جـ يكون : جـ (أ جتا ب + ب جتا أ) = ...

(أ) $أ^{٢}$ (ب) $ب^{٢}$ (جـ) $جـ^{٢}$ (د) $٢ جـ^{٢}$

١٢ أ ب جـ ء متوازي أضلاع فيه : أ ب = ٩ سم ، ب جـ = ١٣ سم ، أ جـ = ٢٠ سم

فإن : طول $\overline{ب ء}$ = ... سم.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢,٥ (د) ٤

١٣ إذا كان : د(س) = س − ١ ، ر(س) = $\sqrt{س}$ فإن مجال (ر ∘ د) هو ....

(أ) ح (ب)]−∞ ، ١] (جـ) [١ ، ∞[(د) ح − {١}

١٤ $\lim_{س \to ٤} \frac{س^{٣}\sqrt{س} − ١٢٨}{س − ٤}$ = ...

(أ) ١١٢ (ب) ٩٦ (جـ) ٨٤ (د) ٧٢

١٥ إذا كانت : د(س) = $\frac{\sqrt{س^{٢} − ٢ س + ١}}{س − ١}$ فإن مدى الدالة د هو ....

(أ) {١} (ب) ح (جـ) [−١ ، ١] (د) {−١ ، ١}

١٦ ارسم منحنى الدالة د : د(س) = $\sqrt{س^{٢} − ٤ س + ٤}$ وعين مداها وابحث اطرادها.

١٧ مجموعة الحل في ح للمعادلة :

$لو_{٢} س − \frac{٣}{لو_{٢} س} = ٢$ تساوي ....

(أ) {−١ ، ٣} (ب) {٨ ، $\frac{١}{٢}$} (جـ) {٨ ، ٢} (د) {$\frac{١}{٨}$ ، ٢}

١٨ $\lim_{هـ \to ٠} \frac{(س + هـ)^{٩} − س^{٩}}{هـ}$ = ...

(أ) $س^{٩}$ (ب) $٩ س^{٨}$ (جـ) صفر (د) غير موجودة.

١٩ إذا كان : أ > ب > جـ > ١ فإن : $لو_{جـ} لو_{ب} لو_{أ} ب^{جـ}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) أ ب جـ

٢٠ إذا كان أ ب جـ مثلث فيه : أ = ٤ سم ، ب = $٤\sqrt{٣}$ سم ، جـ = ٨ سم

فإن جيب قياس أصغر زاوية فيه يساوي ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (جـ) ١ (د) صفر

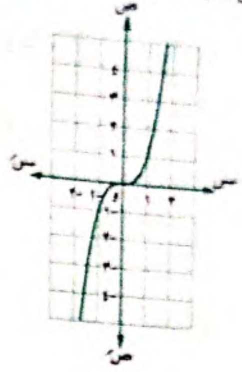
٢١ حل المثلث أ ب جـ الحاد الزوايا الذي فيه : أ = ٢١ سم ، ب = ٢٥ سم

وطول قطر الدائرة المارة برؤوسه ٢٨ سم

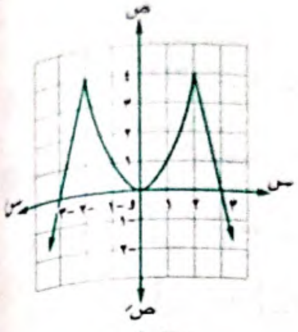
٢٢ إذا كان : س = ٥ + $٢\sqrt{٦}$ فإن : لو $\left(س + \frac{١}{س}\right)$ = ...

(أ) ١ (ب) ٥ − $٢\sqrt{٦}$ (جـ) ١٠ (د) ٥ + $٢\sqrt{٦}$

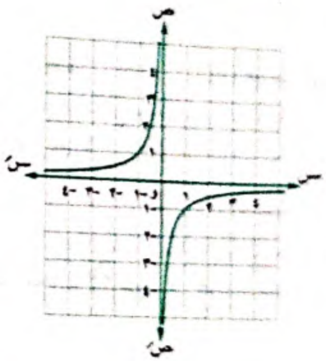
٢٣ أى من الدوال الممثلة بيانيًا كالتالى تكون ليست زوجية وليست فردية ؟



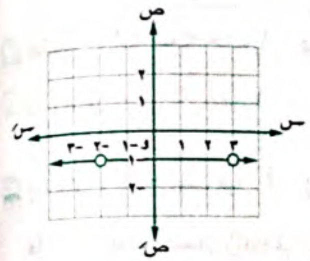
(أ)



(ب)



(جـ)



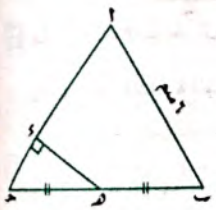
(د)

٢٤ فى الشكل المقابل :

إذا كان : ظا (∠ د هـ حـ) = $\frac{٣}{٤}$

فإن طول نصف قطر الدائرة المارة

برؤوس Δ أ ب حـ = ... سم.



(أ) ٩ (ب) ٥,٧ (جـ) ٤ $\frac{٣}{٤}$ (د) ٣,٧٥

٢٥ إذا كانت : د (س) = س^٢ + | س | حيث س عدد حقيقى

فإن مجموعة حل المعادلة د (س) = ٢ فى ح تساوى ....

(أ) {-٢} (ب) {-٢ ، -١ ، ١}

(جـ) {١ ، -١} (د) {١}

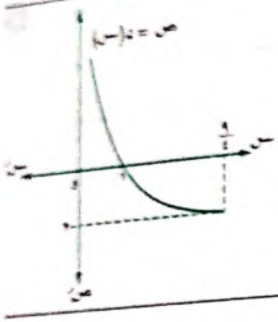
٢٦ نهـــا $\sqrt{٤ - س^٢}$ = ...

(أ) -١ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) غير موجودة.

٢٧ إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى

الدالة د : د (س) = لو~م~ س

فإن : لو~م~ $\frac{١٦}{٨١}$ = ...



(أ) -٢ (ب) ١

(جـ) ٢ (د) ٤

٢٨ نهـــا~س ← ٠~ $\frac{١ - جتا س + جا س}{١ - جتا س - جا س}$ = ...

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) ٠ (د) ∞

٢٩ إذا كان محيط المثلث أ ب حـ = ٣٣ سم ، جا أ + جا حـ = $\frac{٢}{٣}$ ، جا ب = $\frac{١}{٤}$

فإن : أ حـ = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ١٥

٣٠ مدى الدالة د : د (س) = $\frac{س + ١}{س + ٢}$ يساوى ....

(أ) ح (ب) ح - {-٢} (جـ) ح - {١} (د) ح.

٣١ إذا كانت : د (س) = أ س + ب ، د^-١^ (٩) = ٣ ، د^-١^ (٥) = ٢

فإن : أ + ب = ...

(أ) -١ (ب) ١ (جـ) ٧ (د) -٧

٣٢ نهـــا~س ← -١~ $\frac{٢ | س + ١ |}{س + ١}$ = ...

(أ) ٢ (ب) -٢ (جـ) ٠ (د) غير موجودة.

النمـــوذج العاشر

امتحان تفاعلى ١٠

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ لو ظا ١° + لو ظا ٢° + لو ظا ٣° + ... + لو ظا ٨٨° + لو ظا ٨٩° = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ١٠ (د) ٨٩

٢ فى الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة

طول نصف قطرها ٤ سم

، ق (د ب أ حـ) = θ°

فإن : نهـــا (θ → ٠) ب حـ / θ° = ...



(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

٣ إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا المثلث هى ٨ : ٣ : ١ فإن النسبة بين طولى أكبر ضلعين فى المثلث هى ....

(أ) $\sqrt{٣}$: ٢ (ب) $\sqrt{٦}$: ٢ (جـ) ٨ : ٣ (د) ٨ : ٥

٤ نهـــا (س → -٣) $\frac{\sqrt{س + ٧} - ٢}{س + ٣}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{١}{٢}$

٥ إذا كان : $٣^{أ} = ٤^{ب}$ فإن : $٩^{\frac{١}{ب}} + ١٦^{\frac{١}{أ}}$ = ...

(أ) ٧ (ب) ١٢ (جـ) ٢٠ (د) ٢٥

٦ إذا كانت : نهـــا (س → ∞) $\frac{٣ك |س|}{٤ س + ٣}$ = ٦ فإن : ك = ...

(أ) ٦ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) ٨ (د) ٣

٧ إذا كانت د : د (س) = $س^٢$ فإن صورة منحنى د بالانعكاس فى محور السينات والانتقال ٣ وحدات فى اتجاه و س→ ووحدتين فى اتجاه و ص← هى

(أ) $-(س - ٣)^٢ - ٢$ (ب) $-(س + ٣)^٢ + ٢$

(جـ) $-(س + ٣)^٢ - ٢$ (د) $-[(س + ٣)^٢ + ٢]$

٨ إذا كانت الدالة د : د (س) = { $س^٢$ + أ س - ٢ ، س > ٢ ؛ ٤ ، س = ٢ ؛ ٥ أ + ب س ، س < ٢ } متصلة عند س = ٢

أوجد قيمتى : أ ، ب

٩ أ ب حـ مثلث محيطه ٧٠ سم ، أَ = ٢٦ سم ، ق (د أ) = ٦٠° أوجد مساحة سطحه.

١٠ إذا كان : د (س) = س + ١ ، ر (س) = $\frac{س^٢ - ١}{س - ١}$

فإن : نهـــا (س → ١) (ر ∘ د) س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) -٢ (د) ٣

١١ إذا كان : $لو_٢ ٣ × لو_٣ ٤ × لو_٤ ٥ × ... × لو_ن (ن + ١)$ = ١٠ فإن : ن = ...

(أ) ٩ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ١٠٢٣

١٢ مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{س^٢ - ١}$ هو ....

(أ)]-١ ، ١[(ب) [-١ ، ١] (جـ) ح -]-١ ، ١[(د) ح - {-١ ، ١}

١٣ أ ب حـ مثلث فيه : ق (د أ) = ١١٢° ، ق (د ب) = ٣٢° ، حَ = ١٩ سم

فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه ≃ .... سم

(أ) ١٦ (ب) ١٧ (جـ) ٣٢ (د) ٣٣

١٤ إذا كان : ٢^س = ٢٠ ، ن < س < ن + ١ ، ن عددًا صحيحًا فإن : ن = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ١٠

١٥ في Δ س ص ع يكون ص² + ع² − س² = ٢ ص ع × ....

(أ) جتا س (ب) جا ع (جـ) جتا ع (د) جا س

---

١٦ إذا كانت : د (س) = { ٣ س − ١ ، س ≠ ٢ ؛ ٦ ، س = ٢ } فإن : نهـا(س ← ٢) د (س) = ...

(أ) −٥ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ليس لها وجود.

---

١٧ إذا كان : د (س) = لو٢ (س + أ) وكان : د⁻¹ (٢) = −٣ فإن : أ = ...

(أ) −٧ (ب) ٧ (جـ) ٣ (د) ١

---

١٨ تكون الدالة الأسية التي أساسها أ تزايدية إذا كانت ....

(أ) أ > ٠ (ب) أ > ١ (جـ) ٠ < أ < ١ (د) أ = ١

---

١٩ نهـا(س ← ∞) (٤ − ٣ س − س³) = ...

(أ) ∞ (ب) غير موجودة. (جـ) −١ (د) −∞

---

٢٠ إذا كانت د دالة فردية ، أ ∈ مجال د فإن : د (أ) + د (− أ) = ...

(أ) ٢ د (أ) (ب) ٢ د (− أ) (جـ) صفر (د) د (أ)

---

٢١ أوجد جبريًا في ح مجموعة حل المعادلة : | س − ٣ | = | ٩ − ٢ س |

---

٢٢ إذا كانت : د دالة فردية فإن : $\frac{٢ د (٣) + ٧ د (−٣)}{١٠ د (−٣)}$ = ...

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) −$\frac{١}{٢}$

---

٢٣ إذا كانت : د (س) = √(س + ٣) ، ر (س) = √(٦ − س)

فإن : (د ∘ ر) (٥) = ...

(أ) غير معرفة. (ب) صفر (جـ) ٥ (د) ٢

---

٢٤ مدى الدالة د : د (س) = { ٢ س + ٣ ، س > ٣ ؛ ٩ ، س < ٣ } هو ....

(أ) {٣} (ب) ح (جـ)]٩ ، ∞[(د) [٩ ، ∞[

٢٥ في Δ أ ب حـ إذا كان : ق (∠ب) = ٦٠° ، ق (∠حـ) = ٣٠° ، حـ = ٤ سم

فإن : ب = ... سم.

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ٢√٣ (د) ٤√٣

---

٢٦ نهـا $\frac{١ − ظا س}{جا س − جتا س}$ = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) صفر (د) ليس لها وجود.

---

٢٧ إذا كانت مساحة Δ أ ب حـ هي م ، نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه

فإن : $\frac{٤ \text{ نق} × م}{أ ب حـ}$ = ...

(أ) $\frac{أ}{جا أ}$ (ب) جا أ (جـ) ١ (د) نق

---

٢٨ إذا كانت : د (س) = ٧^(س + ١)

فأوجد قيمة س التي تحقق : د (٢ س − ١) + د (س − ٢) = ٥٠

---

٢٩ إذا كان : نهـا(س ← أ⁺) د (س) = ل ، نهـا(س ← أ⁻) د (س) = م وكانت الدالة متصلة

عند س = أ فإن : ل² + م² − ٢ ل م = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) ٦

---

٣٠ إذا كان : أ = جا ب ، ب = جا حـ ، حـ = جا أ فإن محيط الدائرة المارة برؤوس

المثلث أ ب حـ يساوي ....

(أ) ١ (ب) ٢ π (جـ) $\frac{١}{٢}$ π (د) π

---

٣١ مجموعة الحل في ح للمتباينة : √(٩ س² − ١٢ س + ٤) + ٢ | ٤ − ٦ س | ≥ ٢٠

هي ....

(أ) ح − [−$\frac{٢}{٣}$ ، ٢[(ب)]−$\frac{٢}{٣}$ ، ٢[

(جـ) ح −]−$\frac{٢}{٣}$ ، ٢[(د) [−$\frac{٢}{٣}$ ، ٢]

---

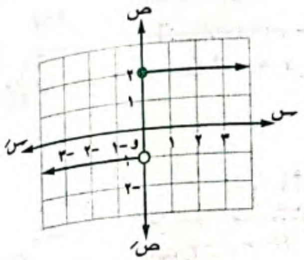
٣٢ إذا كانت : د (س) = س³ + ٣ س² + ٣ س + ١ فإن : د⁻¹ (س) = ...

(أ) (س + ١)³ (ب) ∛س − ١ (جـ) ∛س + ١ (د) س³ − ١

النموذج الأول

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ مدى الدالة الممثلة بالشكل المقابل هو ....



(أ) $\{-1 ، 2\}$

(ب) $\{2\}$

(جـ) $\{-3 ، 3\}$

(د) $\{-1\}$

٢ إذا كان : $لو_2 س = لو_4 9$ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٩ (د) ١٢

٣ $\underset{س \to 0}{نهـا} \frac{\sqrt{1 - جتا^2 س}}{س}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) -١ (د) غير ذلك.

٤ المثلث أ ب جـ الذي فيه : أ ب = ٣ سم ، ب جـ = ٥ سم ، أ جـ = ٧ سم فإن : ق(∠ب) = ...°

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (جـ) ١٢٠ (د) ١٥٠

٥ $لو_{س ص}\left(\frac{1}{س}\right) + لو_{س ص}\left(\frac{1}{ص}\right)$ = ...

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) س ص (د) -س ص

٦ $\underset{س \to 16}{نهـا} \frac{\sqrt[4]{س^7} - 128}{س - 16}$ = ...

(أ) ١٢ (ب) ١٤ (جـ) ١٦ (د) ٢٠

٧ إذا كانت : د(س) = $\begin{cases} \frac{2س + جا س}{ظا 2س + 4س} & ، س < 0 \\ 5س + \frac{1}{2} & ، س > 0 \end{cases}$

فإن : $\underset{س \to 0}{نهـا}$ د(س) = ...

(أ) $\frac{3}{5}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) غير موجودة.

٨ في المثلث س ص ع إذا كان : س = ٢٠ سم ، ع = ١٦ سم ، جتا ص = ٠,٤ فإن : ص = ... سم

(أ) ٢٠ (ب) ١٦ (جـ) ٢٥ (د) ١٥

٩ منحنى الدالة ر : ر(س) = |س + ٣| هو نفسه منحنى د(س) = |س| بإزاحة مقدارها ٣ وحدات في اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{و س}$ (ب) $\overrightarrow{و س}$ (جـ) $\overleftarrow{و ص}$ (د) $\overrightarrow{و ص}$

١٠ إذا كانت : د(س) = $3^{س}$ فإن : $د^{-1}(س)$ = ...

(أ) $لو_{س} 3$ (ب) $لو_3 س$ (جـ) $س^{-3}$ (د) $3^{-س}$

١١ الدالة د : د(س) = $\sqrt{س + 3}$ مجالها هو ....

(أ) $]-3 ، \infty[$ (ب) $]-\infty ، 3[$ (جـ) $[2 ، \infty[$ (د) $[-3 ، \infty[$

١٢ $\underset{س \to \frac{\pi}{4}}{نهـا} \frac{ظا س}{س}$ = ...

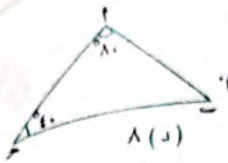
(أ) ١ (ب) $\frac{\pi}{3}$ (جـ) $\frac{\pi}{4}$ (د) $\frac{4}{\pi}$

١٣ $\underset{ن \to \infty}{نهـا} \frac{\sqrt[ن]{3}}{9}$ = ...

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) ∞ (جـ) $\frac{1}{9}$ (د) صفر

14 في الشكل المقابل إذا كان محيط Δ أ ب جـ = ٢٠ سم

فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه يساوى = ... سم.



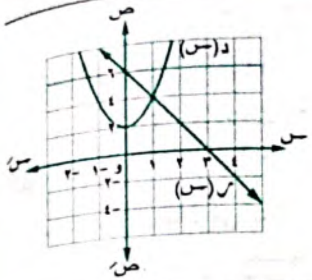
(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

15 مجموعة حل المعادلة : لو$_{س}$ ٣ = -٢ فى ح هى ....

(أ) $\{\frac{1}{9}\}$ (ب) {٩} (جـ) $\{\sqrt{3}\}$ (د) $\{\frac{1}{\sqrt{3}}\}$

16 الشكل المقابل يوضح منحنى الدالتين د ، ر

فإن : (ر ∘ د) (١) = ...



(أ) ٥ (ب) -٢ (جـ) -٤ (د) ٦

17 نهــا$_{س \to ٠}$ $\frac{١ - جتا س}{٥ س}$ = ...

(أ) صفر (ب) ٥ (جـ) $\frac{1}{5}$ (د) غير ذلك.

18 فى المثلث س ص ع يكون : ص^2 + ع^2 - س^2 = ٢ ص ع × ....

(أ) جتا س (ب) جا ع (جـ) جتا ع (د) جا س

19 الدالة د : د (س) = $\frac{س ظا س}{|س|}$ من حيث نوعها تكون ....

(أ) فردية. (ب) زوجية.

(جـ) ليست فردية وليست زوجية. (د) غير ذلك.

20 إذا كان : |س| < أ ، أ ∈ ح$^+$ فإن : س ∈ ....

(أ) ح - [-أ ، أ] (ب) [-أ ، أ]

(جـ) ح -]-أ ، أ[(د)]-أ ، أ[

21 أى من الدوال الممثلة بيانيا بالأشكال الآتية تكون زوجية ؟



22 مجموعة حل المعادلة : ٣$^{س+١}$ + ٣^{س} = ١٢ فى ح هى ....

(أ) {٠} (ب) {٣} (جـ) {١} (د) {٠ ، ١}

23 الدالة د : د (س) = { ٣ ، س > ٠ ؛ -٣ ، س < ٠ } متماثلة بالنسبة للنقطة ....

(أ) (٠ ، ٠) (ب) (٣ ، ٠) (جـ) (-٣ ، ٠) (د) (-٣ ، ٣)

24 إذا كانت : د (س) = { أ - س^2 ، س ≤ -٢ ؛ س ، س > -٢ } متصلة عند س = -٢

فإن : أ = ...

(أ) -٢ (ب) -٤ (جـ) ٢ (د) ٤

25 فى المثلث أ ب جـ يكون : $\frac{٥ حـ}{جا حـ}$ = ... نق

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ١٥ (د) ٢٠

٢٦ محور تماثل الدالة د : د(س) = س^{٢} − ١ هو المستقيم ....

(أ) س = ١ (ب) س = ٠ (ج) ص = ١ (د) ص = ٠

٢٧ فى المثلث أ ب حـ يكون : حتا (أ + ب) = ...

(أ) حتا أ + حتا ب (ب) حا أ + حا ب (ج) حتا حـ (د) − حتا حـ

٢٨ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \dfrac{\text{أ س}^{٢} - ٥\,\text{س}}{٢\,\text{س} + ٣\,\text{س}^{٢}} = ٢$ فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٦ (ج) ٩ (د) ١٢

النموذج الثانى

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ إذا كان : ٥$^{\text{س}}$ = ٢ فإن : ٢٥$^{\text{س}}$ = ...

(أ) ١٠ (ب) ٦ (ج) ٥ (د) ٤

٢ إذا كان منحنى : ص = لو$_{٤}$ (١ − أ س) يمر بالنقطة $\left(\frac{١}{٤} ، -\frac{١}{٢}\right)$

فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٨

٣ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٣} + ٥}{\text{س}\,(٢\,\text{س}^{٢} + ٣)} =$ ....

(أ) $\frac{٥}{٨}$ (ب) ١ (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٥}{٣}$

٤ فى Δ أ ب حـ إذا كان : ٤ حا أ = ٣ حا ب = ٦ حا حـ

فإن : ق(∠حـ) = ... (لأقرب درجة)

(أ) ٨٩° (ب) ٢٩° (ج) ٥٧° (د) ٨٢°

٥ أبسط صورة للمقدار : لو$_{\text{ب}}$ أ^{٢} × لو$_{\text{حـ}}$ ب^{٣} × لو$_{\text{أ}}$ حـ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٦ (د) ١

٦ إذا كانت : $\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} - ١} & ،\ \text{س} \neq ١ \\ ٢\,\text{أ} & ،\ \text{س} = ١ \end{cases}$ متصلة عند س = ١

فإن : أ = ...

(أ) ٠ (ب) −٢ (ج) ٢ (د) ١

٧ فى Δ أ ب حـ يكون : حتا (أ + ب) = ...

(أ) $\dfrac{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} - \text{حـ}^{٢}}{٢\,\text{أ ب}}$ (ب) $\dfrac{\text{حـ}^{٢} - \text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢}}{٢\,\text{أ ب}}$

(جـ) $\dfrac{\text{ب}^{٢} + \text{حـ}^{٢} - \text{أ}^{٢}}{٢\,\text{ب حـ}}$ (د) $\dfrac{\text{أ}^{٢} + \text{حـ}^{٢} - \text{ب}^{٢}}{٢\,\text{أ حـ}}$

٨ مجموعة حل المعادلة : لو٤ س = ١ − لو٤ (س − ٣) هى ....

(أ) {٤}　(ب) {−١}　(ج) {٤ ، −١}　(د) {١}

---

٩ مدى الدالة د : د (س) = |س − ٢| هو ....

(أ)]٠ ، ∞[　(ب) [٢ ، ∞[　(ج) [٠ ، ∞[　(د)]٢ ، ∞[

---

١٠ نهـا (س ← ٢) $\frac{س^{٥} - ٣٢}{س^{٢} + ٣س - ١٠}$ = ...

(أ) ٨٠　(ب) $\frac{٨٠}{٧}$　(ج) $\frac{٧}{٨٠}$　(د) $\frac{١}{٨٠}$

---

١١ Δ أ ب حـ فيه : أ = ٩ سم ، ب = ١٥ سم

، ق(∠ حـ) = ١٠٦° فإن محيطه ≃ .... سم

(أ) ٤٤　(ب) ٢٤　(ج) ٣٤　(د) ٢٨

---

١٢ مجموعة حل المتباينة : |٢س − ٢| ≤ ٧ هى ....

(أ) [$\frac{-٥}{٢}$ ، ٣]　(ب) ح − [$\frac{-٥}{٢}$ ، ٣]

(ج) ح −]$\frac{-٥}{٢}$ ، ٣[　(د) ∅

---

١٣ إذا كانت د دالة فردية على [−س ، س] فإن : د (−س) + د (س) = ...

(أ) ٢س　(ب) غير معرفة.　(ج) −٢س　(د) صفر

---

١٤ نهـا (س ← ٠) $\frac{جا ٢س + ٥ جا ٣س}{س}$ = ...

(أ) ٧　(ب) ٥　(ج) ١٧　(د) ١٠

---

١٥ مجموعة حل المعادلة : |س| + س = ٠ هى ....

(أ) {٠}　(ب)]−∞ ، ٠]　(ج)]−∞ ، ٠[　(د) ∅

---

١٦ نقطة تماثل الداله د : د (س) = $\frac{١}{س}$ + ٢ هى ....

(أ) (٢ ، ٠)　(ب) (١ ، ٢)　(ج) (٠ ، ٢)　(د) (٠ ، ٠)

١٧ نهـا (س ← ١) $\frac{٤ - \sqrt{س + ١٥}}{١ - س^{٢}}$ = ...

(أ) ٤　(ب) $\frac{١}{٨}$　(ج) $\frac{١}{١٦}$　(د) −٤

---

١٨ مجموع جذرى المعادلة : ٢٥^س − ١٢ × ٥^س + ٢٧ = ٠ يساوى ....

(أ) لو٥ ١٢　(ب) ١٢　(ج) لو٥ ٢٧　(د) ٢٧

---

١٩ أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٥ $\sqrt{٣}$ سم فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه يساوى .... سم

(أ) ٥ $\sqrt{٣}$　(ب) ١٠ $\sqrt{٣}$　(ج) ١٠　(د) ٥

---

٢٠ مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{س + ٣}$ هو ....

(أ)]−٣ ، ∞[　(ب) [−٣ ، ∞[　(ج) {−٣}　(د) {٠}

---

٢١ متوازى أضلاع أ ب حـ ء فيه : ق(∠ أ) = ٥٠°

، ق(∠ ء ب حـ) = ٧٠° ، ب ء = ٨ سم فإن محيطه = ... سم

(أ) ٣٨　(ب) ١٩　(ج) ٨,٥　(د) ٨٦

---

٢٢ إذا كان : د (س) = ٤ س − ٥ ، ر (س) = ٣^س

فإن : (د ∘ ر) (٢) = ...

(أ) ٣　(ب) ٩　(ج) ٢٧　(د) ٣١

---

٢٣ نهـا (س ← ٢) $\frac{س^{٢} - ٧س + ٦}{٣س^{٢} - ٨س + ٤}$ = ...

(أ) $\frac{٥}{٤}$　(ب) $\frac{٣}{٢}$　(ج) $\frac{٤}{٥}$　(د) $\frac{١}{٣}$

---

٢٤ فى أى مثلث Δ س ص ع يكون : سَ^{٢} + صَ^{٢} − ٢ سَ صَ حتا ع = ...

(أ) عَ　(ب) عَ^{٢}　(ج) صَ^{٢}　(د) سَ^{٢}

25 إذا كان: $س^{\frac{٣}{٢}} = ٨$ فإن: س = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ٩

26 مجموعة حل المتباينة: $\sqrt{٤س^٢ - ١٢س + ٩} \geq ٩$ هي ....

(أ) [-٦ ، ١٢] (ب) [-٣ ، ٦] (جـ) ح - [-٣ ، ٦] (د) ح -]-٣ ، ٦[

27 $\lim_{س \to \infty} \frac{١}{س}\sqrt{٣ + ٤س^٢} =$ ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) -٢ (د) -٣

28 $\lim_{س \to -٢} \frac{(س + ٣)^٥ - ١}{س^٢ - ٤} =$ ....

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) $-\frac{٥}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $-\frac{١}{٤}$

النموذج الثالث

أجب عن الأسئلة الآتية:

1 $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٥ - ٣٢}{س - ٢} =$ ....

(أ) ٣١ $س^٤$ (ب) ٣٢ × $٢^٤$ (جـ) ٦٤ (د) ٥ × $٢^٤$

2 في Δ أ ب حـ إذا كان نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث = ٤ سم

فإن: $\frac{أ + ب + حـ}{جا أ + جا ب + جا حـ} =$ ....

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ٨ (د) ١٦

3 إذا كان: د(س) = $٢^{س}$ فإن: $لو_٢$ د(س) = ...

(أ) ١ (ب) س (جـ) د(س) (د) ٢

4 إذا كان: $لو_ب$ س + $لو_ب$ ٣ = $لو_ب$ ٢٧ - ١ فإن قيمة س بدلالة ب = ...

(أ) س = ٩ب (ب) س = $\frac{١}{٩}$ ب (جـ) $\frac{٩}{ب}$ (د) $\frac{١}{٩ب}$

5 $\lim_{س \to ٠} \frac{٣س + ٢س^{-١}}{س + ٤س^{-١}} =$ ....

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٤}$

6 إذا كان: د(س) = $س^٣$ + ٧ فإن: $د^{-١}$(-١) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) -٢ (د) ٨

7 كل الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ليست أحادية ما عدا ....

(أ) د(س) = $س^٢$ (ب) د(س) = ٥

(جـ) د(س) = س + ٢ (د) د(س) = |س|

8 $\lim_{س \to \infty} (١ + ٢س^٢ - س^٣) =$ ....

(أ) ∞ (ب) -∞ (جـ) صفر (د) -١

٩ Δ س ص ع فيه : سَ = ٥ سم ، صَ = ٣ سم ، ق(∠ع) = $\frac{٢}{٣}\pi$ فإن : عَ = ...

(أ) ٧　(ب) ٨　(ج) ٩　(د) ٤

---

١٠ مجال الدالة د : د(س) = $\frac{١}{|س| + ٢}$ هو ....

(أ) ح　(ب) {٢ ، -٢}　(ج) ح - {٢ ، -٢}　(د) ح - {٢}

---

١١ نقطة رأس المنحنى : د(س) = $(س + ٣)^{٢} - ٢$ هي ....

(أ) (-٣ ، ٢)　(ب) (٣ ، -٢)　(ج) (٣ ، ٢)　(د) (-٣ ، -٢)

---

١٢ لو ظا(θ) + لو ظتا(θ) = ... حيث θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

(أ) ١　(ب) صفر　(ج) ٢　(د) -١

---

١٣ مجموعة حل المتباينة : |٢ - ٣س| ≤ ٧ في ح هي ....

(أ)]-$\frac{٥}{٣}$ ، ٣[　(ب) [-$\frac{٥}{٣}$ ، ٣]

(ج) ح -]-$\frac{٥}{٣}$ ، ٣[　(د) ح - [-$\frac{٥}{٣}$ ، ٣]

---

١٤ إذا كان منحنى الدالة د : د(س) = $لو_{٤}$ (١ - أ س) يمر بالنقطة ($\frac{١}{٨}$ ، -$\frac{١}{٢}$)

فإن : أ = ...

(أ) ٣　(ب) ٢　(ج) ٤　(د) ٨

---

١٥ إذا كانت : د(س) = $٣^{س}$ فإن قيمة س التي تحقق المعادلة :

د(س + ١) - د(س - ١) = ٢٤ هي ....

(أ) ٢　(ب) صفر　(ج) ٣　(د) ٨

---

١٦ محور تماثل الدالة د : د(س) = $س^{٢}$ هو المستقيم ....

(أ) ص = صفر　(ب) ص = س　(ج) ص = -س　(د) س = صفر

١٧ في جميع العلاقات التالية تكون ص دالة ماعدا ....

(أ) ص = جتا س　(ب) ص = ٢

(ج) ص = $س^{٢} - ١$　(د) $ص^{٢} = س^{٢} + ١$

---

١٨ إذا كان Δ أ ب ح قائم الزاوية ومتساوي الساقين ، نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه فإن مساحة Δ أ ب ح = ...

(أ) نق　(ب) ٢ نق　(ج) $نق^{٢}$　(د) π $نق^{٢}$

---

١٩ $\lim_{س \to \infty}$ (٥ + $س^{-١}$ - ٢ $س^{-٢}$) = ...

(أ) ١　(ب) ٥　(ج) -٢　(د) ٤

---

٢٠ كل الدوال الآتية زوجية ماعدا ....

(أ) د(س) = جا س　(ب) د(س) = جتا س

(ج) د(س) = $س^{٢} - ١$　(د) د(س) = |س|

---

٢١ في Δ أ ب ح إذا كان : $حَ^{٢} = أَ^{٢} + بَ^{٢} + أَ بَ$ فإن : ق(∠ح) = ...

(أ) ٣٠°　(ب) ٤٥°　(ج) ٦٠°　(د) ١٢٠°

---

٢٢ إذا كانت : د(س - ١) = $٢^{س + ١}$ فإن : د(س) = ...

(أ) $٢^{س}$　(ب) $٢^{س - ١}$　(ج) $٢^{س + ٢}$　(د) $٢^{س - ٢}$

---

٢٣ $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{٣س^{٢} + ٢س + ١}{س^{٢} - ٣س + ٢}\right)^{٤}$ = ...

(أ) ٣　(ب) ٩　(ج) ٢٧　(د) ٨١

---

٢٤ $\lim_{س \to ٢} \frac{جا (س - ٢)}{س^{٢} - ٤}$ = ...

(أ) ١　(ب) $\frac{١}{٤}$　(ج) صفر　(د) ٢

٢٥ الدوال الآتية متصلة على ح ماعدا ....

(أ) د(س) = جاس　　(ب) د(س) = $س^2 - ٢$

(جـ) د(س) = ظاس　　(د) د(س) = $\frac{٥س + ٣}{س^2 + ٤}$

٢٦ فى △ أ ب جـ إذا كان : جتا ب = $\frac{جـ}{٢أ}$ فإن : △ أ ب جـ فيه : ....

(أ) جـ = أ　　(ب) جـ = ب　　(جـ) أ = ٢ب　　(د) أ = ب

٢٧ إذا كانت : د(س) = $\begin{cases} ٣س^2 + أس - ٢ & \text{عند } س > ٢ \\ ٢س + ب & \text{عند } س < ٢ \end{cases}$

وكانت : $\lim_{س \to ٢}$ د(س) = ١٦ فإن : أ + ب = ...

(أ) ٤　　(ب) −١　　(جـ) ١٣　　(د) ٧

٢٨ فى △ أ ب جـ يكون : جـ (أ جتا ب + ب جتا أ) = ...

(أ) $٢جـ^2$　　(ب) $جـ^2$　　(جـ) $أ^2$　　(د) $ب^2$

النموذج الرابع

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ نقطة رأس منحنى الدالة د : د(س) = $(٢ - س)^2 + ٣$ هى ....

(أ) (٢ ، ٣)　　(ب) (٢ ، −٣)　　(جـ) (−٢ ، ٣)　　(د) (−٢ ، −٣)

٢ مجال الدالة د : د(س) = $\frac{\sqrt{س - ٢}}{س - ٢}$ هو ....

(أ) ح　　(ب) {٢}　　(جـ) [٢ ، ∞[　　(د) [٢ ، ∞[− {٢}

٣ إذا كانت : $\lim_{س \to \infty} \frac{أس + ٦}{٢س + ٧} = ٤$ حيث أ ∈ ح فإن : أ = ...

(أ) ٢　　(ب) ٤　　(جـ) ٦　　(د) ٨

٤ المنحنى م : د(س) = $س^2 + ٤$ هو نفس المنحنى د(س) = $س^2$ بإزاحة مقدارها ٤ وحدات فى اتجاه ....

(أ) $\overrightarrow{وس}$　　(ب) $\overrightarrow{وص}$　　(جـ) $\overleftarrow{وس}$　　(د) $\overleftarrow{وص}$

٥ قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه ٣ سم ، ٥ سم ، ٧ سم يساوى ....

(أ) ١٥٠°　　(ب) ١٢٠°　　(جـ) ٦٠°　　(د) ٣٠°

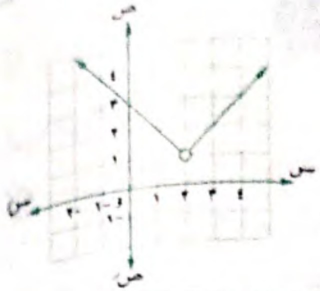
٦ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^5 - ٣٢}{س^3 - ٨}$ = ...

(أ) ٤　　(ب) $\frac{٥}{٣}$　　(جـ) صفر　　(د) $٦\frac{٢}{٣}$

٧ إذا كانت د دالة حيث : د(س) = ٧س فإن : $د^{-1}$(س) = ...

(أ) ٧س　　(ب) $\frac{س}{٧}$　　(جـ) $\frac{٧}{س}$　　(د) ٧ − س

٨ في الشكل المقابل :



$\lim_{س \to ٢}$ د (س) = ...

(أ) ١ (ب) −١

(جـ) غير موجودة. (د) ٢

٩ إذا كانت د دالة فردية ، أ ∈ مجال الدالة فإن : د (أ) + د (− أ) = ...

(أ) ٢ د (أ) (ب) ٢ د (− أ) (جـ) صفر (د) د (أ)

١٠ $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٧ س + ١٢}{س - ٣}$ = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ٧ (د) −٢

١١ عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب جـ حيث : ق (∠ أ) = ٦٠° ، بَ = ٣ سم ، أَ = ٥ سم هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) لا يوجد مثلث. (د) عدد لا نهائى.

١٢ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س + ١} - ١}{س}$ = ...

(أ) صفر (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ليس لها وجود.

١٣ منحنى الدالة الزوجية يكون متماثلًا حول المستقيم ....

(أ) ص = س (ب) $\overleftrightarrow{ص ص}$ (جـ) $\overleftrightarrow{س س}$ (د) ص = − س

١٤ في Δ د هـ و وإذا كان : ق (∠ د) = ٣٠° ، هـَ = ١٥ $\sqrt{٣}$ ، ق (∠ هـ) = ٦٠° فإن : دَ = ... سم

(أ) ٣٠ سم (ب) ٤٥ سم (جـ) ١٥ سم (د) ٦٠ سم

١٥ $\lim_{س \to ٠} \frac{(س + ٢)^٥ - ٣٢}{س}$ = ...

(أ) ٢٥ (ب) ٦٤ (جـ) ٨٠ (د) ١٠٠

١٦ إذا كان : د (س) = ٤^(س − ١) فإن : د (س + ١) = ...

(أ) ٤^س (ب) ٤^(س + ١) (جـ) ٤^(س + ٢) (د) ٦^س

١٧ أ ب جـ مثلث فيه : بَ = ٢ سم ، جَ = ٢,٥ سم ، جتا أ = $\frac{٢}{٥}$

فإن : Δ أ ب جـ يكون ....

(أ) قائم الزاوية. (ب) متساوي الساقين.

(جـ) متساوي الأضلاع. (د) مختلف الأضلاع.

١٨ $\lim_{س \to \frac{ط}{٢}}$ (٢ س − جا س) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ط (د) $\frac{ط}{٢}$

١٩ إذا كانت : لو_س (س + ٦) = ٢ فإن : س ∈ ....

(أ) {٣ ، −٢} (ب) {٣} (جـ) {٣ ، ١} (د) {٦ ، ١}

٢٠ في المثلث س ص ع يكون : $\frac{٢ سَ}{جا س}$ = ... نق

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٨

٢١ إذا كانت : د (س) = { $\frac{جا^٢ ٢ س}{س^٢}$ ، س < ٠ ؛ ٢ أ + ٣ جتا س ، س > ٠ }

وكانت : $\lim_{س \to ٠}$ د (س) موجودة فإن : أ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) $-\frac{١}{٢}$

٢٢ القيمة العددية للمقدار : $\frac{لو ٦٤}{لو ٨}$ تساوي ....

(أ) ٢ (ب) ٨ (جـ) ٨٠ (د) ٧٢

٢٣ تكون الدالة الأسية التي أساسها أ تزايدية إذا كانت ....

(أ) أ > ٠ (ب) أ > ١ (جـ) ٠ < أ < ١ (د) أ = ١

٢٤ Δ ل م ن فيه : ق(∠ ل) = ٣٠° ، م ن = ٧ سم فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث تساوى ....

(أ) ١٤ (ب) ٧ (جـ) ٣,٥ (د) $\frac{١٤}{\sqrt{٣}}$

---

٢٥ إذا كان : لو س + لو ٥ = ٢ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٨ (جـ) ١٧ (د) ٢٠

---

٢٦ الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) د$_1$ (س) = جتا س (ب) د$_2$ (س) = س^2

(جـ) د$_3$ (س) = س^3 (د) د$_4$ (س) = س^4 + س^2

---

٢٧ جملة مبلغ ٥٠٠٠ جنيه موضوع فى بنك يعطى فائدة مركبة سنوية قدرها ٥ ٪ لمدة ٧ سنوات ≃ .... جنيه.

(أ) ٦٧٥٠ (ب) ٥٣٥٠ (جـ) ٧٠٣٥,٥ (د) ٨٥٠٠

---

٢٨ إذا كانت : $\lim_{س \to أ^+}$ د (س) = ل ، $\lim_{س \to أ^-}$ د (س) = م وكانت الدالة متصلة عند س = أ فإن : ل^2 + م^2 − ٢ ل م = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) ٢

النموذج الخامس

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ الشكل المقابل يمثل دالة فى س مداها ....



(أ) ح − [٠ ، ٢]

(ب) ح − {٠}

(جـ) ح −]٠ ، ٢]

(د) ح −]٠ ، ٢[

---

٢ إذا كانت : د (س) = ٧ فإن مدى الدالة د هو ....

(أ) ح (ب) ح$^+$ (جـ) {٧} (د) ح − {٧}

---

٣ إذا كان مجال الدالة د : د (س) = $\frac{س}{|س| + أ}$ هو ح − {−٢ ، ٢} فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ±٢ (د) صفر

---

٤ إذا تقاطع منحنى الدالة د مع منحنى الدالة د$^{-1}$ فى النقطة (ك ، ٢ ك − ٣) فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

---

٥ $\lim_{س \to \infty} \frac{س^2 + ٥}{٦}$ = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{٥}{٦}$ (جـ) ١ (د) ∞

---

٦ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^2 - س - ٦}{س^2 + س - ١٢}$ = ...

(أ) $\frac{٥}{٧}$ (ب) $\frac{١}{٧}$ (جـ) −١ (د) −٥

---

٧ إذا كانت د : د (س) = $\frac{س^8 - أ^8}{س^5 - أ^5}$ عند س ≠ أ ، د (أ) = ٢٠٠ متصلة عند س = أ فإن : أ = ...

(أ) ٥ (ب) $\frac{٨}{٥}$ (جـ) ١٢٥ (د) $\frac{١}{٥}$

٨ إذا كان نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث س ص ع

فإن : $\frac{\text{ص}^{\backprime}}{\text{٢ جا ص}}$ = ...

(أ) نق (ب) ٢ نق (جـ) $\frac{١}{٢}$ نق (د) ٤ نق

---

٩ المثلث أ ب حـ فيه : ٦ أ = ٤ ب = ٣ حـ فإن قياس أصغر زوايا المثلث = ...

لأقرب دقيقة.

(أ) ٢٨َ ٥٧° (ب) ١٢َ ٤١° (جـ) ٥٧َ ٢٨° (د) ٥٢َ ٣٦°

---

١٠ إذا كانت : د (س) = $\sqrt[٣]{\text{س}}$ ، ر (س) = س^{٣} فإن : (د ∘ ر) (س) = ...

(أ) س (ب) س^{٣} (جـ) $\sqrt[٣]{\text{س}}$ (د) |س|

---

١١ مدى الدالة د : د (س) = { ٠ : س ≤ ٠ ، ١ : س > ٠ } هو ....

(أ) {١} (ب) {٠} (جـ) ح (د) {٠ ، ١}

---

١٢ إذا كانت : د : ح$^{+}$ ⟵ ح حيث د (س) = س − ٥ ، ر : [−١ ، ٥] ⟵ ح

حيث ر (س) = س − ٢ فإن مجال $\left(\frac{\text{د}}{\text{ر}}\right)$ (س) هو ....

(أ)]٠ ، ٥] (ب)]٠ ، ٥] − {٢}

(جـ) [١ ، ∞[(د) ح

---

١٣ فى الدالة الأسيه د : د (س) = أ$^{\text{س}}$ ، أ > ١ تكون د (س) > ١

عندما س ∈ ....

(أ) ح (ب) ح$^{+}$ (جـ) ح$^{-}$ (د) ص

---

١٤ إذا كانت الدالة د : د (س) = { $\frac{\text{طا س}}{\pi - \text{٢ س}}$: ٠ < س < $\frac{\pi}{٢}$ ، جا (π − س) : س > $\frac{\pi}{٢}$ }

فإن : نهـا (س ⟵ $\frac{\pi}{٢}$) د (س) = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) π (د) غير موجودة.

١٥ نهـا (س ⟵ ∞) $\frac{\text{٥ + س}^{-٢}}{\text{٣ س}^{-٢} + ١}$ = ...

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (جـ) ٥ (د) $\frac{١}{٣}$

---

١٦ س ص ع مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٠ $\sqrt{٣}$ سم فإن طول قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث يساوى .... سم

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ١٥ (د) ٢٠

---

١٧ أ ب حـ مثلث فيه : $\frac{\text{جا أ}}{٣} = \frac{\text{٢ جا ب}}{٥} = \frac{\text{جا حـ}}{٤}$ فإن : أ : ب : حـ = ...

(أ) ٦ : ٥ : ٨ (ب) ٨ : ٥ : ٦ (جـ) ٧ : ٢ : ٤ (د) ٣ : ٥ : ٤

---

١٨ نهـا (س ⟵ ٠) $\frac{\text{جا ٢ س طا ٣ س}}{\text{٤ س}^{٢}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) ٦

---

١٩ إذا كان : $\sqrt{٢} \times \sqrt[٣]{٣} = \sqrt[٦]{\text{س}}$ فإن : س = ...

(أ) ٢٧ (ب) ٤٨ (جـ) ٧٢ (د) ١٠٨

---

٢٠ إذا كان : لو (س + ١١) = ٢ فإن : س = ...

(أ) −٩ (ب) ٢٢ (جـ) ٨٩ (د) ٩١

---

٢١ نهـا (س ⟵ ١) $\frac{١ - \sqrt[\text{ن}]{\text{س}}}{١ - \sqrt[\text{م}]{\text{س}}}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{\text{ن}}{\text{م}}$ (جـ) −١ (د) $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$

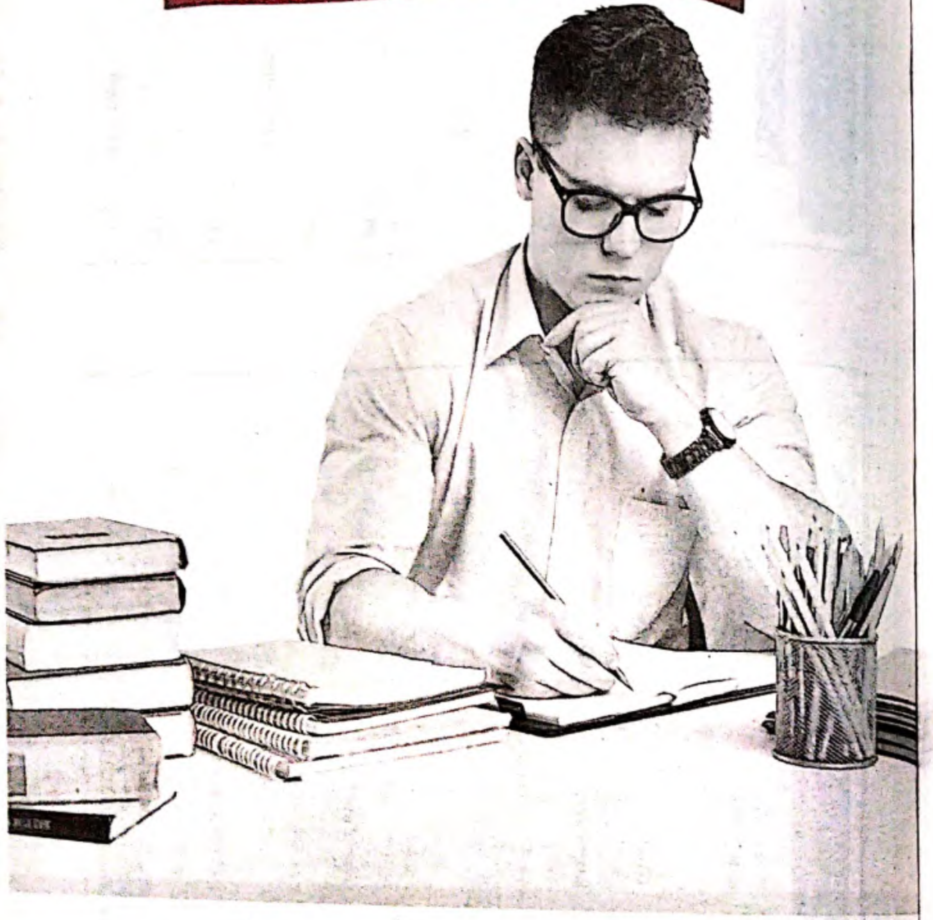
---

٢٢ إذا كانت : د (س) = { ٣ س − ١ : س ≠ ٢ ، ٦ : س = ٢ }

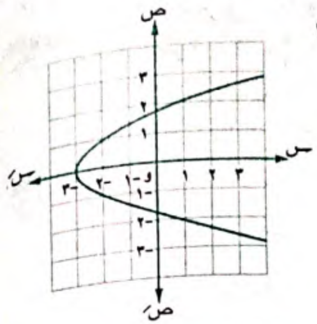
فإن : نهـا (س ⟵ ٢) د (س) = ...

(أ) −٥ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ليس لها وجود.

الإجابـــات



٢٣ المنحنى الموضح بالشكل المقابل متماثل حول المستقيم الذى معادلته ....



(أ) س = صفر
(ب) ص = صفر
(جـ) ص = -٢
(د) س = ٢

---

٢٤ إذا كانت : س ∈ [-١ ، ٤] فإن : |٢س - ٣| ≤ ....

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) -٥

---

٢٥ إذا كان : $لو_٣$ (٤ + $لو_٢$ س) = ٢ فإن : س = ...

(أ) ١٦ (ب) ٣٢ (جـ) ٦٤ (د) ١٢٨

---

٢٦ نهـــا (س ← ١) $\frac{س^أ - س^ح}{س^أ - س^ء}$ = ...

(أ) $\frac{أ+ح}{أ+ء}$ (ب) أ $س^{ح-ء}$ (جـ) $\frac{أ-ح}{أ-ء}$ (د) $\frac{ح}{ء}$

---

٢٧ إذا كانت د : د (س) = $\frac{س^٢ - ٢٥}{س - ٥}$ حيث س ≠ ٥ فإن قيمة د (٥) التى تجعل الدالة متصلة عند هذا الموضع = ...

(أ) ١٠ (ب) صفر (جـ) ٢٥ (د) غير معرفة.

---

٢٨ المثلث أ ب حـ فيه : أَ = ٥ سم ، بَ = ٧ سم ، ق(∠حـ) = ٦٥°

فإن : حَ = ... سم

(أ) ٦,٧ (ب) ٧,٦ (جـ) ٥,٧ (د) ٧,٥

إرشادات نماذج اختبارات الكتاب المدرسى فى التفاضل وحساب المثلثات

الاختبار الأول

1 ① (جـ) ② (ب) ③ (د) ④ (جـ)

2 (أ) ① $\frac{8}{7}$ ② ١٧
(ب) ق(∠أ) ≈ ٢٥ َ ٤٨° ، ق(∠ب) ≈ ١٤ َ ٦٣° ، ق(∠جـ) ≈ ٢١ َ ٦٨° ، جـَ ≈ ٢٦ سم

3 (أ) ① صفر ② ١ ③ غير موجودة
(ب) محيط متوازى الأضلاع ≈ ٣٨ سم

4 (أ) ق(∠ب) ≈ ٩ َ ٦٤° ، ٥١ َ ١١٥°
(ب) أ = $-\frac{1}{2}$

5 (أ) ٢ (ب) $\frac{1}{16}$

الاختبار الثانى

1 ① (د) ② (د) ③ (أ) ④ (جـ)

2 (أ) أ = -١
(ب) ق(∠جـ) = ٩٠° ، مساحة △ أ ب جـ = ٢٤ سم²

3 (أ) $\frac{2}{3}$
(ب) جـَ ≈ ١٩,٥٠٤ سم ، ق(∠أ) ≈ ٢٠ َ ٢٦° ، ق(∠ب) = ٤٠ َ ٤٧°

4 (أ) $-\frac{5}{4}$
(ب) أثبت بنفسك ، مساحة الشكل أ ب جـ ء = ١٢٤ سم²

5 (أ) ① $\frac{1}{4}$ ② ٢
(ب) ٦١,٩ سم²

إرشادات نماذج الامتحانات النهائية

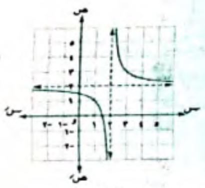
النموذج الأول

1 (ب) **2** (جـ) **3** (ب) **4** (ب)

5
∵ جـ² = أ² + ب² - ٢ أ ب جتا جـ
= ٤٩ + ٨١ - ٢ × ٧ × ٩ جتا ٣٢ َ ٩٦°
∴ جـ = ١٢ سم
، مساحة △ أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ أ ب جا جـ
= $\frac{1}{2}$ × ٧ × ٩ جا ٣٢ َ ٩٦°
= ٣١ سم²

6 (ب) **7** (أ)

8
ر(س) = $\frac{1}{س - 2}$ + ٢



مدى الدالة ر هو ح - {٢}
، ر تناقصية فى كل من]- ∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[

9 (جـ) **10** (أ) **11** (ب)
12 (جـ) **13** (أ) **14** (جـ)

15
بوضع ٢ - س ≤ ٠ ∴ س ≥ ٢
∴ مجال د هو]- ∞ ، ٢] ، مدى د هو [٢ ، ∞[
، ∵ ص = ٢ + √(٢ - س) وبتبديل المتغيرين
∴ س = ٢ + √(٢ - ص)
∴ √(٢ - ص) = س - ٢
∴ ٢ - ص = س² - ٤ س + ٤
∴ ص = - س² + ٤ س - ٢
∴ د⁻¹ (س) = - س² + ٤ س - ٢
، مجال د⁻¹ = مدى د = [٢ ، ∞[
، مدى د⁻¹ = مجال د =]- ∞ ، ٢]

16 (جـ) **17** (ب) **18** (أ)
19 (د) **20** (د)

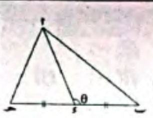
21
د(٢⁺) = نهــــا (س ← ٢⁺) (٥ س - ٤) = ٦
، د(٢⁻) = نهــــا (س ← ٢⁻) (س² - س + ٤) = ٦
∴ د(٢⁺) = د(٢⁻) = ٦
∴ نهــــا (س ← ٢) د(س) = ٦
، ∵ د(٢) = ك
∴ ك = ٦ حتى تصبح د متصلة عند س = ٢

22 (أ) **23** (د) **24** (ب)
25 (أ) **26** (جـ) **27** (جـ)
28 (ب) **29** (جـ) **30** (أ)
31 (أ) **32** (ب)

النموذج الثانى

1 (جـ) **2** (أ)

3



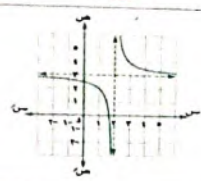
(أ ب)² = (أ ء)² + (ب ء)²
- ٢ × أ ء × ب ء جتا θ (١)
، (أ جـ)² = (أ ء)² + (جـ ء)²
- ٢ × أ ء × جـ ء جتا (١٨٠° - θ)
، ∵ ب ء = جـ ء ، جتا (١٨٠° - θ) = - جتا θ
∴ (أ جـ)² = (أ ء)² + (ب ء)² + ٢ × أ ء × ب ء جتا θ (٢)
بجمع (١) ، (٢) :
∴ (أ ب)² + (أ جـ)² = ٢ (أ ء)² + ٢ (ب ء)²
∴ (٥)² + (٨)² = ٢ (أ ء)² + ٢ (٦)²
أ ء = $\frac{\sqrt{34}}{2}$ ≈ ٢,٩ سم

4 (د) **5** (ب) **6** (جـ)

7
$\frac{1}{س}$ = $\frac{1}{5 + 2\sqrt{6}}$ × $\frac{5 - 2\sqrt{6}}{5 - 2\sqrt{6}}$ = $\frac{5 - 2\sqrt{6}}{25 - 24}$
= ٥ - ٢√٦
∴ س + $\frac{1}{س}$ = ٥ + ٢√٦ + ٥ - ٢√٦ = ١٠
∴ لو (س + $\frac{1}{س}$) = لو ١٠ = ١

8 (جـ) **9** (جـ) **10** (جـ)
11 (جـ) **12** (ب) **13** (د)
14 (د) **15** (أ)

16



مجال ر = ح - {٢} ، المدى = ح - {٢}
، ر تناقصية فى كل من]- ∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[
، ر ليست زوجية وليست فردية ، ر أحادية

17 (د) **18** (جـ) **19** (جـ) **20** (جـ)

21
د(٢⁺) = نهــــا (س ← ٢⁺) (٣ س + ١) = ١٠
، د(٢⁻) = نهــــا (س ← ٢⁻) (س² + ١) = ١٠
، ∵ د(٢⁺) = د(٢⁻) = ١٠
∴ نهــــا (س ← ٢) د(س) موجودة وتساوى ١٠

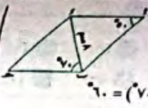
22 (جـ) **23** (د) **24** (د) **25** (ب)
26 (ب) **27** (ب) **28** (د) **29** (أ)
30 (أ) **31** (أ) **32** (أ)

النموذج الثالث

1
∵ د(٢ س - ١) + د(س - ٢) = ٥٠
∴ ٧^(٢ س - ١ + ١) + ٧^(س - ٢ + ١) = ٥٠
∴ ٧^(٢ س) + ٧^(س - ١) = ٥٠
∴ ٧ × ٧^(٢ س) + ٧^(س) - ٣٥٠ = ٠
∴ (٧^(س) - ٧) × (٧ × ٧^(س) + ٥٠) = ٠
∴ ٧^(س) = ٧ ∴ س = ١
أو ٧^(س + ١) = -٥٠ (مرفوض)

2 (جـ) **3** (د) **4** (ب) **5** (ب)
6 (د) **7** (ب) **8** (أ)

9



ق(∠أ ء ب) = ٧٠°
، ق(∠أ ب ء) = ١٨٠° - (٥٠° + ٧٠°) = ٦٠°
∴ $\frac{8}{جا 50°}$ = $\frac{أ ب}{جا 70°}$ = $\frac{أ ء}{جا 60°}$
∴ أ ب = ٩,٨ سم ، أ ء = ٩ سم
محيط متوازى الأضلاع = ٣٨ سم

10 (أ) **11** (ب) **12** (أ) **13** (جـ)
14 (د) **15** (د) **16** (د) **17** (ب)
18 (أ) **19** (أ) **20** (جـ) **21** (ب)

22
د(س) = { - س ، س ≤ ٠ ؛ س² ، س > ٠ }



• مدى الدالة = [٠ ، ∞[
• الدالة تناقصية فى]- ∞ ، ٠[، تزايدية فى]٠ ، ∞[

23 (د) **24** (ب) **25** (ب)
26 (جـ) **27** (جـ)

28
∵ د متصلة عند س = صفر
∴ د(٠) = نهــــا (س ← ٠) د(س)
∴ ك = نهــــا (س ← ٠) $\frac{(س + 2)^5 - 2^5}{س}$
∴ ك = ٥ × ٢⁴ = ٨٠

29 (د) **30** (جـ) **31** (د) **32** (ب)

النموذج الرابع

1 (أ) **2** (أ) **3** (جـ) **4** (ب)
5 (ب) **6** (د) **7** (ب)

8
جـ = ٢١ - (٨ + ٧) = ٦ سم
∴ جـ هو طول أصغر ضلع
∴ ق(∠جـ) هو قياس أصغر زاوية
∴ جتا جـ = $\frac{64 + 49 - 36}{2 \times 8 \times 7}$
∴ ق(∠جـ) ≈ ٢٤ َ ٤٦°

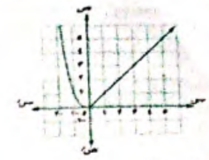
9
نوجد الدالة العكسية للدالة د
بوضع ص = ٢ س + أ وبتبديل المتغيرين
∴ س = ٢ ص + أ ∴ ٢ ص = س - أ
∴ ص = $\frac{1}{2}$ س - $\frac{1}{2}$ أ
∴ د⁻¹ (س) = $\frac{1}{2}$ س - $\frac{1}{2}$ أ
، ∵ ر هى الدالة العكسية للدالة د
∴ ر(س) = د⁻¹ (س)
∴ ب س + ٣ = $\frac{1}{2}$ س - $\frac{1}{2}$ أ
وبمقارنة المعاملات ∴ ب = $\frac{1}{2}$ ، أ = -٦

10 (أ) **11** (جـ) **12** (جـ)

13
∵ د(-١⁻) = د(-١⁺)
∴ - أ - ٢ = -٢ - ٢
∴ أ = ٢

14 (د) **15** (جـ)

النموذج الخامس



- المدى =]٠ ، ∞[
- الدالة ليست زوجية وليست فردية
- الدالة تزايدية في]٠ ، ∞[وتناقصية في]−∞ ، ٠[

① (أ) ② (ج) ③ (د) ④ (د) ⑤ (ب) ⑥ (ج) ⑦ (ب)

⑧ ∵ $3^{2س-1} - 4 \times 3^{س} + 9 = 0$ وبالضرب × ٣

∴ $3^{2س} - 12 \times 3^{س} + 27 = 0$

∴ $(3^{س} - 3)(3^{س} - 9) = 0$

∴ $3^{س} = 3$ ∴ س = ١ ، $3^{س} = 9 = 3^2$ ∴ س = ٢

∴ مجموعة الحل = {١ ، ٢}

⑬ من Δ أ ب جـ :

ق(∠ د) = ١٨٠° − (٥٠° − ٦٥°) = ٦٥°

∴ ب د = أ ب = ٢٢ سم

، من Δ ب جـ د :

جتا (ق د ب جـ) = $\frac{(22)^2 + (25)^2 - (18)^2}{2 \times 22 \times 25}$

∴ ق(∠ د ب جـ) = ٤٨° ٩ ٤٤



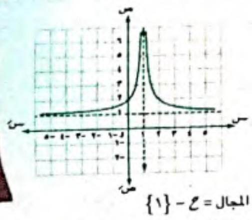
• د(س) = |س| + ١ ، ر(س) = $\frac{1}{س - 1}$

∴ (د ∘ ر)(س) = د[ر(س)] = د$\left(\frac{1}{س-1}\right)$ = $\left|\frac{1}{س-1}\right| + 1$

م = مجال ر = ح − {١} ، م = ح

∴ مجال (د ∘ ر) = ح − {١}

• التمثيل البياني للدالة (د ∘ ر) :



- المجال = ح − {١}
- الدالة ليست زوجية وليست فردية
- المنحنى متماثل بالنسبة للمستقيم س = ١
- الدالة ليست أحادية.

النموذج السادس

① د(−س) = (−س) جا (−س) = −س × −جا س = د(س)

∴ د دالة فردية

② د(−س) = $\begin{cases} (-س)^2 & ، -س \le 0 \\ |-س| - 1 & ، -س > 0 \end{cases}$ ≠ ± د(س)

∴ د ليست زوجية وليست فردية.

∵ د(٠) = نهـا $\frac{س + جا س}{س - جا ٢ س}$ = ...

∴ د غير متصلة عند س = ٠

، مدى د = ح

∴ د متصلة عند س = −٣

∴ نهـا $\frac{س^2 + 2 س - 3}{س + 3}$ = −٢ + ٢

∴ ل ١٢,٩ سم ، = ١٨,٨ سم

النموذج السابع

∵ $س^{\frac{4}{3}} - 10 س^{\frac{2}{3}} + 9 = 0$

∴ $(س^{\frac{2}{3}} - 9)(س^{\frac{2}{3}} - 1) = 0$ ∴ $س^{\frac{2}{3}} = 9$

∴ س = ± ٢٧ أ $س^{\frac{2}{3}} = 1$ ∴ س = ± ١

∴ مجموعة الحل = {−١ ، ١ ، −٢٧ ، ٢٧}

$ع^2 = 25 + 49 - 2 \times 5 \times 7$ جتا ٦٥°

∴ ع ≈ ٦,٧ سم

∴ محيط Δ س ص ع ≈ ١٨,٧ سم

د(٠) = نهـا $\frac{5 س + 1}{س + 2}$ = ٢

، د(٠) = نهـا $\frac{ظا ٢ س}{جا س}$

وبالقسمة بسطًا ومقامًا على س

∴ د(٠) = د(٠) = ٢

∴ نهـا د(س) = ٢

م = مجال ر = [٢ ، ∞[

، د ∘ ر (س) = د[ر(س)]

= د$(\sqrt{س-2})$

= $(\sqrt{س-2})^2 - 3$

= س − ٢ − ٣ = س − ٥

∴ م = قيم س التي تجعل $\sqrt{س-2}$ في مجال د وهي ح

∴ مجال (د ∘ ر) = [٢ ، ∞[

∴ (د ∘ ر)(٣) = ٣ − ٥ = −٢

النموذج الثامن

$5^{س} + 5^{س-1} = 150$

∴ $5^{س-1}(5 + 1) = 150$

∴ $5^{س-1} = 25 = 5^2$ ∴ س = ٣

ق(∠ جـ) = ١٨٠° − (١١١° + ٢٢°) = ٢٥°

∴ ل = ١٧ سم ، ب = ١٨ سم

∴ مساحة Δ أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ جا أ

= $\frac{1}{2}$ × ١٨ × ١٩ × جا ١١٢°

= ١٥٩ سم²

النموذج التاسع

(د + ر)(س) = د(س) + ر(س)

= س − ٢ + ٤ − ٣ س

= ٢ + س

• مجال (د + ر) = ح ∩ [−٢ ، ٢] = [−٢ ، ٣]

س	−٢	٠	٣
(د + ر)(س)	٠	٢	٥



• المدى = [٠ ، ٥] • الدالة تزايدية على مجالها.

بوضع ص = ٢ + $\sqrt{س - 1}$ حيث س ≥ ١ ، ص ≥ ٢

وبتبديل المتغيرين

∴ س = ٢ + $\sqrt{ص - 1}$ حيث ص ≥ ١ ، س ≥ ٢

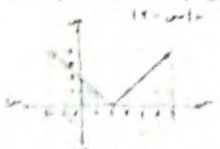
∴ $\sqrt{ص - 1}$ = س − ٢

∴ ص − ١ = $(س - 2)^2$

∴ ص = $(س - 2)^2 + 1$

∴ د⁻¹(س) = $(س - 2)^2 + 1$ حيث س ≥ ٢

∵ د متصلة عند س = ٢



∴ المدى = [٠ ، ∞[، د تناقصية في]−∞ ، ٠[

، تزايدية في]٠ ، ∞[

١٧ (ب) ١٨ (ب) ١٩ (ب) ٢٠ (أ)

٢١

∵ $\frac{٢١}{\text{جا } أ} = \frac{٢٥}{\text{جا } ب} = \frac{جـ}{\text{جا } جـ} = ٢٨$

∴ جا أ = $\frac{٣}{٤}$

، ∵ المثلث حاد الزوايا

∴ ق (∠ أ) = ٤٨ ° ٣٥ َ ٢٥ ً ، جا ب = $\frac{٢٥}{٢٨}$

، ∵ المثلث حاد الزوايا

∴ ق (∠ ب) = ٦٣ ° ٣٤ َ ٤ ً

∴ ق (∠ جـ) = ٦٨ ° ٠ َ ٣١ ً

∴ جـ = ٢٨ جا ٦٨ ° ٠ َ ٣١ ً ≃ ٢٦ سم

٢٢ (أ) ٢٣ (د) ٢٤ (د) ٢٥ (جـ)
٢٦ (جـ) ٢٧ (د) ٢٨ (ب) ٢٩ (ب)
٣٠ (جـ) ٣١ (ب) ٣٢ (د)

النموذج العاشر

١ (أ) ٢ (د) ٣ (ب) ٤ (جـ)
٥ (د) ٦ (جـ) ٧ (ب)

٨

∵ د متصلة عند س = ٢

∴ د (٢⁺) = د (٢⁻) = د (٢) = ٤

∴ نهـا (س ← ٢) (س^٢ + أ س − ٢) = ٤

∴ ٤ + ٢ أ − ٢ = ٤ ∴ أ = ١

، نهـا (س ← ٢) (٥ أ + ب س) = ٤

∴ ٥ (١) + ب (٢) = ٤ ∴ ب = $-\frac{١}{٢}$

٩

∵ ٢٦ + ب + جـ = ٧٠

∴ ب + جـ = ٤٤

∴ ب = ٤٤ − جـ

، ∵ أ^٢ = ب^٢ + جـ^٢ − ٢ ب جـ جتا أ

∴ (٢٦)^٢ = (٤٤ − جـ)^٢ + جـ^٢

− ٢ (٤٤ − جـ) جـ جتا ٦٠°

∴ ٦٧٦ = ١٩٣٦ − ٨٨ جـ + جـ^٢ + جـ^٢ − ٤٤ جـ + جـ^٢

∴ ٣ جـ^٢ − ١٣٢ جـ + ١٢٦٠ = ٠

∴ جـ^٢ − ٤٤ جـ + ٤٢٠ = ٠

∴ (جـ − ٣٠) (جـ − ١٤) = ٠

∴ جـ = ٣٠ سم ومنها ب = ١٤ سم

أ، جـ = ١٤ سم ومنها ب = ٣٠ سم

∴ ب جـ = ١٤ × ٣٠ = ٤٢٠

∴ مساحة Δ أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ جا أ

= $\frac{١}{٢}$ × ٤٢٠ × جا ٦٠°

= ١٠٥ $\sqrt{٣}$ سم^٢

١٠ (د) ١١ (د) ١٢ (جـ) ١٣ (د)
١٤ (أ) ١٥ (أ) ١٦ (ب) ١٧ (ب)
١٨ (ب) ١٩ (د) ٢٠ (جـ)

٢١

∵ |س − ٣| = |٩ − ٢ س|

∴ س − ٣ = ٩ − ٢ س

∴ ٣ س = ١٢

∴ س = ٤ أ، س − ٣ = −٩ + ٢ س

∴ س = ٦

∴ مجموعة الحل = {٤ ، ٦}

٢١ (جـ) ٢٢ (د) ٢٣ (د)
٢٥ (د) ٢٦ (ب) ٢٧ (جـ)

٢٨

∵ د (س) = ٧$^{س + ١}$

∴ د (٢ س − ١) + د (س − ٢) = ٥٠

∴ ٧$^{٢ س − ١ + ١}$ + ٧$^{س − ٢ + ١}$ = ٥٠

∴ ٧$^{٢ س}$ + ٧$^{س − ١}$ = ٥٠

∴ ٧ × (٧^{س})^٢ + ٧^{س} − ٣٥٠ = ٠

∴ (٧^{س} − ٧) (٧ × ٧^{س} + ٥٠) = ٠

∴ ٧^{س} = ٧

∴ س = ١ أ، ٧ × ٧^{س} = −٥٠ (مرفوض)

٢٩ (جـ) ٣٠ (د) ٣١ (أ) ٣٢ (ب)

altFwoK.com موقع التفوق

إجابات نماذج امتحانات بنظام أسئلة الاختيار من متعدد

النموذج الأول

١ (أ)

٢ (أ)

الحل :

∵ لو$_٢$ س = لو$_٤$ ٩ ∴ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٢}} = \frac{\text{لو ٩}}{\text{لو ٤}}$

∴ لو س = $\frac{\text{٢ لو ٣} \times \text{لو ٢}}{\text{٢ لو ٢}}$

∴ لو س = لو ٣ ∴ س = ٣

٣ (د)

الحل :

د (س) = $\frac{\sqrt{١ - \text{جتا}^٢ س}}{س} = \frac{\sqrt{\text{جا}^٢ س}}{س} = \frac{|\text{جا س}|}{س}$

∴ د (٠⁺) = نهـا $\frac{\text{جا س}}{س}$ = ١

∴ د (٠⁻) = نهـا $\frac{- \text{جا س}}{س}$ = −١

∴ د (٠⁺) ≠ د (٠⁻)

∴ نهـا د (س) غير موجودة.

٤ (جـ)

الحل :

جتا ب = $\frac{أ^٢ + جـ^٢ - ب^٢}{٢ أ جـ} = \frac{٢٥ + ٩ - ٤٩}{٢ (٥) (٣)} = -\frac{١}{٢}$

∴ ق (∠ ب) = ١٢٠°

٥ (ب)

الحل :

لو$_{س ص}$ ($\frac{١}{س}$) + لو$_{س ص}$ ($\frac{١}{ص}$) = لو$_{س ص}$ ($\frac{١}{س ص}$)

= لو$_{س ص}$ (س ص)$^{-١}$ = − لو$_{س ص}$ س ص = −١

٦ (ب)

الحل :

نهـا (س ← ١٦) $\frac{\sqrt[٤]{س^٧} - ١٢٨}{س - ١٦}$ = نهـا (س ← ١٦) $\frac{س^{\frac{٧}{٤}} - ١٦^{\frac{٧}{٤}}}{س - ١٦}$

= $\frac{٧}{٤}$ × ١٦$^{\frac{٣}{٤}}$ = ١٤

٧ (جـ)

الحل :

د (٠⁺) = نهـا $\frac{٢ س + \text{جا س}}{\text{ظا ٢ س} + ٤ س}$

= نهـا $\frac{٢ + \frac{\text{جا س}}{س}}{\frac{\text{ظا ٢ س}}{س} + ٤} = \frac{٢ + ١}{٢ + ٤} = \frac{١}{٢}$

، د (٠⁻) = نهـا (٥ س + $\frac{١}{٢}$) = ٥ (٠) + $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ د (٠⁺) = د (٠⁻) = $\frac{١}{٢}$

∴ نهـا د (س) = $\frac{١}{٢}$

٨ (أ)

الحل :

ص^٢ = س^٢ + ع^٢ − ٢ س ع جتا ص

= (٢٠)^٢ + (١٦)^٢ − ٢ × ٢٠ × ١٦ × ٠,٤

∴ ص^٢ = ٤٠٠

∴ ص = ٢٠ سم

٩ (ب)

١٠ (ب)

الحل :

ص = ٢^{س} بتبديل المتغيرات

∴ س = ٢^{ص} ∴ ص = لو$_٢$ س

∴ د$^{-١}$ (س) = لو$_٢$ س

١١ (د)

الحل :

بوضع س + ٣ ≥ ٠ ∴ س ≥ −٣

∴ مجال الدالة = [−٣ ، ∞[

١٢ (د)

الحل :

نهـا (س ← $\frac{\pi}{٤}$) $\frac{\text{ظا س}}{س} = \frac{\text{ظا} \frac{\pi}{٤}}{\frac{\pi}{٤}} = \frac{١}{\frac{\pi}{٤}} = \frac{٤}{\pi}$

١٣ (جـ)

الحل :

نهـا $\frac{\sqrt[٣]{٢}}{٩}$ = $\frac{١}{٩}$ نهـا ٢$^{\frac{١}{٣}}$ = $\frac{١}{٩}$ × ١ = $\frac{١}{٩}$

١٤ (د)

الحل :

$\frac{\text{محيط } Δ \text{ أ ب جـ}}{\text{جا أ} + \text{جا ب} + \text{جا جـ}}$ = ٢ نق

∴ $\frac{٢٠}{\text{جا ٨٠°} + \text{جا ٦٠°} + \text{جا ٤٠°}}$ = ٢ نق

∴ ٢ نق = ٨ سم

∴ طول قطر الدائرة = ٨ سم

١٥ (د)

الحل :

∵ لو$_{س}$ ٢ = −٢ ∴ س$^{-٢}$ = ٢

∴ س^٢ = $\frac{١}{٢}$

∴ س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ والحل السالب مرفوض

١٦ (ب)

الحل :

(ب ∘ د) (١) = ب (د (١)) = ب (٤) = ٢٠

١٧ (أ)

الحل :

نهـا $\frac{١ - \text{جتا س}}{٥ س}$ = $\frac{١}{٥}$ نهـا $\frac{١ - \text{جتا س}}{س}$

= $\frac{١}{٥}$ × ٠ = ٠

١٨ (أ)

١٩ (ب)

الحل :

د (− س) = $\frac{(- س) \text{ ظا} (- س)}{|- س|} = \frac{(- س) (- \text{ظا س})}{|س|}$

= $\frac{\text{س ظا س}}{|س|}$ = د (س)

٢٠ (د)

الحل :

∵ |س| < ٢ ∴ −٢ < س < ٢

∴ س ∈]−٢ ، ٢[

٢١ (د)

٢٢ (جـ)

الحل :

٢$^{س + ١}$ + ٢^{س} = ١٢

∴ ٢^{س} (٢ + ١) = ١٢

∴ ٢^{س} = ٤ ∴ س = ٢

∴ م . ح = {٢}

٢٣ (أ)

٢٤ (جـ)

الحل :

∵ د متصلة عند س = −٢

∴ د (−٢) = د (−٢⁺) = د (−٢⁻)

∴ ٤ − أ = ٢ ∴ أ = ٢

(٢٥) (ب)
الحل :
$\frac{حـ}{جا حـ} = ٢$ نق
∴ $\frac{٥ حـ}{جا حـ} = ٥ \times ٢$ نق $= ١٠$ نق

(٢٦) (ب)

(٢٧) (د)
الحل :
∵ أ ب حـ مثلث ∴ أ + ب + حـ = ١٨٠°
∴ أ + ب = ١٨٠° − حـ
∴ جتا (أ + ب) = جتا (١٨٠° − حـ) = − جتا حـ

(٢٨) (جـ)
الحل :
$نهـا_{س \to \infty} \frac{أ س^٢ - ٥ س}{٢ س^٢ + ٣ س} = نهـا_{س \to \infty} \frac{أ - \frac{٥}{س}}{٢ + \frac{٣}{س}}$
$= \frac{أ - ٠}{٢ + ٠} = \frac{أ}{٢}$
∴ $\frac{أ}{٢} = ٣$ ∴ أ = ٦

النموذج الثانى

(١) (د)
الحل :
$(٢٥)^{س} = (٥^{س})^٢ = (٢)^٢ = ٤$

(٢) (أ)
الحل :
∵ النقطة $(\frac{١}{٤} ، -\frac{١}{٢})$ تنتمى للمنحنى
ص = لو$_٤$ (١ − أ س)
∴ $-\frac{١}{٢}$ = لو$_٤$ $(١ - \frac{١}{٤} أ)$
∴ $١ - \frac{١}{٤} أ = ٤^{-\frac{١}{٢}}$ ∴ $١ - \frac{١}{٤} أ = \frac{١}{٢}$
∴ $\frac{١}{٤} أ = \frac{١}{٢}$ ∴ أ = ٢

(٣) (جـ)
الحل :
$نهـا_{س \to \infty} \frac{س^٢ + ٥}{٢ س^٢ + ٣ س} = نهـا_{س \to \infty} \frac{١ + \frac{٥}{س^٢}}{٢ + \frac{٣}{س}}$
$= \frac{١ + ٠}{٢ + ٠} = \frac{١}{٢}$

(٤) (ب)
الحل :
∵ ٤ جا أ = ٣ جا ب = ٦ جا حـ بالقسمة على ١٢
∴ $\frac{جا أ}{٣} = \frac{جا ب}{٤} = \frac{جا حـ}{٢}$
∴ أ : ب : حـ = ٣ : ٤ : ٢
∴ أ = ٣ ك ، ب = ٤ ك ، حـ = ٢ ك
∴ جتا حـ $= \frac{أ^٢ + ب^٢ - حـ^٢}{٢ أ ب}$
$= \frac{٩ ك^٢ + ١٦ ك^٢ - ٤ ك^٢}{٢ (٣ ك)(٤ ك)} = \frac{٧}{٨}$
∴ ق (∠ حـ) ≈ ٢٩°

(٥) (جـ)
الحل :
لو$_أ$ ب^٢ × لو$_ب$ حـ^٢ × لو$_{حـ}$ أ^{٢} ... $= \frac{٢ لو ب}{لو أ} \times \frac{٣ لو حـ}{لو ب} \times \frac{لو أ}{لو حـ} = ٦$

(٦) (د)
الحل :
∵ د متصلة عند س = ١
∴ د (١) = $نهـا_{س \to ١}$ د (س)
∴ ٢ أ = $نهـا_{س \to ١} \frac{س^٢ - ١}{س - ١}$
$= نهـا_{س \to ١} \frac{(س - ١)(س + ١)}{(س - ١)} = ٢$
∴ أ = ١

(٧) (ب)
الحل :
∵ أ ب حـ مثلث ∴ أ + ب + حـ = ١٨٠°
∴ أ + ب = ١٨٠° − حـ
∴ جتا (أ + ب) = جتا (١٨٠° − حـ) = − جتا حـ
$= - \frac{أ^٢ + ب^٢ - حـ^٢}{٢ أ ب} = \frac{حـ^٢ - أ^٢ - ب^٢}{٢ أ ب}$

(٨) (أ)
الحل :
لو$_٤$ س + لو$_٤$ (س − ٣) = ١
∴ لو$_٤$ س (س − ٣) = لو$_٤$ ٤
∴ س^٢ − ٣ س − ٤ = ٠
∴ (س − ٤) (س + ١) = ٠
∴ س = ٤ أ، س = −١ (مرفوض)
∴ م.ح = {٤}

(٩) (جـ)

(١٠) (ب)
الحل :
$نهـا_{س \to ٢} \frac{س^٥ - ٣٢}{(س - ٢)(س + ٥)} = نهـا_{س \to ٢} \frac{س^٥ - ٢^٥}{س - ٢}$
$\times نهـا_{س \to ٢} \frac{١}{س + ٥} = ٥ \times ٢^٤ \times \frac{١}{٢ + ٥} = \frac{٨٠}{٧}$

(١١) (أ)
الحل :
حـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ − ٢ أ ب جتا حـ
= ٨١ + ٢٢٥ − ٢ × ٩ × ١٥ × جتا ١٠٦°
∴ حـ ≈ ٢٠ سم
∴ محيط Δ أ ب حـ = ٩ + ١٥ + ٢٠ = ٤٤ سم

(١٢) (جـ)
الحل :
∵ |٢ س − ٢| ≥ ٧ ∴ ٢ س − ٢ ≥ ٧
∴ ٢ س ≥ ٩ ∴ س ≥ ٣
، ٢ س − ٢ ≤ −٧ ∴ ٢ س ≤ −٥
∴ س ≤ $-\frac{٥}{٢}$ ∴ م.ح = ح −]$-\frac{٥}{٢}$ ، ٣[

(١٣) (د)
الحل :
∵ د دالة فردية ∴ د (−س) = − د (س)
∴ د (−س) + د (س) = − د (س) + د (س) = صفر

(١٤) (جـ)
الحل :
$نهـا_{س \to ٠} \frac{جا ٢ س + ٥ جا ٣ س}{س}$
$= نهـا_{س \to ٠} \frac{جا ٢ س}{س} + ٥ نهـا_{س \to ٠} \frac{جا ٣ س}{س}$
= ٢ + ٥ × ٣ = ١٧

(١٥) (ب)
الحل :
|س| + س = $\begin{cases} س + س & ، س \geq ٠ \\ -س + س & ، س < ٠ \end{cases}$
$= \begin{cases} ٢ س & ، س \geq ٠ \\ ٠ & ، س < ٠ \end{cases}$
∴ |س| + س = ٠ لكل س < ٠
أى لكل س ∈]−∞ ، ٠[
، عندما ٢ س = ٠ ∴ س = ٠
∴ مجموعة الحل =]−∞ ، ٠[∪ {٠} =]−∞ ، ٠]

(١٦) (جـ)

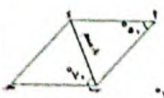
(١٧) (جـ)
الحل :
$نهـا_{س \to ١} \frac{٤ - \sqrt{س + ١٥}}{١ - س} \times \frac{٤ + \sqrt{س + ١٥}}{٤ + \sqrt{س + ١٥}}$
$= نهـا_{س \to ١} \frac{١٦ - (س + ١٥)}{(١ - س)(١ + س)(٤ + \sqrt{س + ١٥})}$
$= نهـا_{س \to ١} \frac{(١ - س)}{(١ - س)(١ + س)(٤ + \sqrt{س + ١٥})}$
$= \frac{١}{٢ \times ٨} = \frac{١}{١٦}$

(١٨) (جـ)
الحل :
$٢٥^{س} - ١٢ \times ٥^{س} + ٢٧ = ٠$
∴ $(٥^{س} - ٣)(٥^{س} - ٩) = ٠$
∴ $٥^{س} = ٣$ ∴ س = لو$_٥$ ٣
، $٥^{س} = ٩$ ∴ س = لو$_٥$ ٩
∴ مجموع الجذرين = لو$_٥$ ٣ + لو$_٥$ ٩ = لو$_٥$ ٢٧

(١٩) (جـ)
الحل :
$\frac{٥\sqrt{٣}}{جا ٦٠°} = ٢$ نق ∴ ٢ نق = ١٠ سم
∴ طول قطر الدائرة المارة برؤوسه = ١٠ سم

(٢٠) (ب)
الحل :
بوضع س + ٣ ≥ ٠ ∴ س ≥ −٣
∴ مجال د = [−٣ ، ∞[

(٢١) (أ)
الحل :



ق (∠ حـ) = ق (∠ أ)
= ٥٠°
، ق (∠ ب ء حـ) = ١٨٠°
− (٧٠° + ٥٠°) = ٦٠°
Δ ء ب حـ فيه : $\frac{٨}{جا ٥٠°} = \frac{ب حـ}{جا ٦٠°} = \frac{ء حـ}{جا ٧٠°}$
∴ ب حـ = $\frac{٨ \times جا ٦٠°}{جا ٥٠°}$ ≈ ٩ سم
، ء حـ = $\frac{٨ \times جا ٧٠°}{جا ٥٠°}$ ≈ ١٠ سم
∴ محيط ▱ أ ب حـ ء = ٢ × (٩ + ١٠) = ٣٨ سم

(٢٢) (د)
الحل :
(د ∘ ن) (٢) = د (ن (٢)) = د (٣^٢) = د (٩)
= ٤ (٩) − ٥ = ٣١

(٢٣) (أ)
الحل :
$نهـا_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٧ س + ٦}{٢ س^٢ - ٨ س + ٤}$ ...
$= نهـا_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س^٢ + ٢ س - ٣)}{(س - ٢)(٢ س - ٢)}$
$= \frac{٤ + ٤ - ٣}{٦ - ٢} = \frac{٥}{٤}$

(٢٤) (ب)

(٢٥) (ب)
الحل :
∵ $س^{\frac{٣}{٢}} = ٨$ ∴ $س = ٨^{\frac{٢}{٣}} = ٤$

(٢٦) (ب)
الحل :
∵ $\sqrt{٤ س^٢ - ١٢ س + ٩} \leq ٩$
∴ $\sqrt{(٢ س - ٣)^٢} \leq ٩$ ∴ |٢ س − ٣| ≤ ٩
∴ −٩ ≤ ٢ س − ٣ ≤ ٩ ∴ −٦ ≤ ٢ س ≤ ١٢
∴ −٣ ≤ س ≤ ٦ ∴ م.ح = [−٣ ، ٦]

(٢٧) (أ)
الحل :
$نهـا_{س \to \infty} \frac{١}{س} \sqrt{٢ + ٤ س^٢} = نهـا_{س \to \infty} \sqrt{\frac{٢}{س^٢} + ٤}$
$= \sqrt{٤} = ٢$

(٢٨) (ب)
الحل :
$نهـا_{س \to ١} \frac{(س + ٢)^٥ - ١}{س^٢ - ١} = نهـا_{س \to -١} \frac{(س + ٢)^٥ - ١^٥}{س + ٢ ...}$
$\times نهـا \frac{١}{س - ١} = نهـا \frac{(س + ٢)^٥ - ١^٥}{(س + ٢) - ١}$
$\times نهـا \frac{١}{س - ١} = ٥ \times ١^٤ \times \frac{١}{-١ - ١} = -\frac{٥}{٢}$

النموذج الثالث

(١) (د)
الحل :
$نهـا_{س \to ٢} \frac{س^٥ - ٢^٥}{س - ٢} = ٥ \times ٢^٤$

(٢) (جـ)
الحل :
$\frac{أ + ب + حـ}{جا أ + جا ب + جا حـ} = ٢$ نق $= ٢ \times ٤ = ٨$ سم

(٣) (ب)
الحل :
لو$_٢$ د (س) = لو$_٢$ $٢^{س}$ = س لو$_٢$ ٢ = س

(٤) (جـ)
الحل :
لو$_ب$ س = لو$_ب$ ٢٧ − لو$_ب$ ب − لو$_ب$ ٣
∴ لو$_ب$ س = لو$_ب$ $\frac{٢٧}{٣ ب}$ ∴ س = $\frac{٩}{ب}$

(٥) (جـ)
الحل :
$نهـا_{س \to \infty} \frac{٣ س + ٢ س^٢}{س + ٤ س^٢}$ ...
$= نهـا \frac{٣ + ٢ س^٢}{١ + ٤ س^٢} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

(٦) (جـ)
الحل :
ص = س^٣ + ٧ بتبديل المتغيرات
∴ س = ص^٣ + ٧
∴ ص = $\sqrt[٣]{س - ٧}$ ∴ د$^{-١}$ (س) = $\sqrt[٣]{س - ٧}$
∴ د$^{-١}$ (−١) = $\sqrt[٣]{-١ - ٧}$ = −٢

(٧) (جـ)

(٨) (ب)
الحل :
$نهـا_{س \to \infty} (١ + ٢ س^٢ - س^٣)$
$= نهـا_{س \to \infty} س^٣ (\frac{١}{س^٣} + \frac{٢}{س} - ١)$
= ∞ (٠ + ٠ − ١) = −∞

(٩) (أ)
الحل :
ع = $\sqrt{٢٥ + ٩ - ٢ (٥)(٣) جتا ١٢٠°}$ = ٧ سم

(١٠) (أ)

(١١) (د)

(١٢) (ب)
الحل :
لو (جا θ) + لو (قتا θ) = لو (جا θ × قتا θ) = لو ١
= صفر

(١٣) (جـ)
الحل :
|٢ س − ٢| ≥ ٧ ∴ ٢ س − ٢ ≥ ٧
∴ ٢ س ≥ ٩ ∴ س ≥ ٣
، ٢ س − ٢ ≤ −٧ ∴ ٢ س ≤ −٥
∴ س ≤ $-\frac{٥}{٢}$ ∴ م.ح = ح −]$-\frac{٥}{٢}$ ، ٣[

(١٤) (جـ)
الحل :
$-\frac{١}{٢}$ = لو$_٤$ $(١ - \frac{١}{٤} أ)$ ∴ $١ - \frac{١}{٤} أ = ٤^{-\frac{١}{٢}}$
∴ $١ - \frac{١}{٤} أ = \frac{١}{٢}$ ∴ $\frac{١}{٤} أ = \frac{١}{٢}$
∴ أ = ٢

١٥ (أ)

الحل :

$٢^{س+١} - ٢^{س-١} = ٢٤$

∴ $٢^{س}(٢ - \frac{١}{٢}) = ٢٤$ ∴ $٢^{س} \times \frac{٣}{٢} = ٢٤$

∴ $٢^{س} = ٢٤ \times \frac{٢}{٣} = ١٦$ ∴ س = ٤

١٦ (د)

١٧ (د)

١٨ (ج)

١٩ (ب)

الحل :

= نهـا (س ← ∞) $(٥ + \frac{١}{س} - \frac{٢}{س^٢}) = ٥$

٢٠ (أ)

٢١ (د)

الحل :

∵ $حـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ - ٢ أ ب جتا حـ$

∴ $أ^٢ + ب^٢ - ٢ أ ب جتا حـ = أ^٢ + ب^٢ + أ ب$

∴ − ٢ أ ب جتا حـ = أ ب

∴ جتا حـ = $-\frac{١}{٢}$ ∴ ق (∠حـ) = ١٢٠°

٢٢ (ج)

الحل :

∵ د (س − ١) = $٢^{(س-١)+٢}$

∴ د (س) = $٢^{س+٢}$

٢٣ (ب)

الحل :

نهـا (س ← ∞) $\left(\frac{٣ + \frac{٢}{س} + \frac{١}{س^٢}}{١ - \frac{٣}{س} + \frac{٢}{س^٢}}\right)^٤ = \left(\frac{٣}{١}\right)^٤ = ٨١$

٢٤ (ب)

الحل :

نهـا (س ← ٢) $\frac{جا(س - ٢)}{(س - ٢)}$ × نهـا (س ← ٢) $\frac{١}{س + ٢}$

$= ١ \times \frac{١}{٢ + ٢} = \frac{١}{٤}$

٢٥ (ج)

٢٦ (د)

الحل :

∵ جتا ب = $\frac{حـ}{٢ أ}$ ∴ $\frac{أ^٢ + حـ^٢ - ب^٢}{٢ أ حـ} = \frac{حـ}{٢ أ}$

∴ $أ^٢ + حـ^٢ - ب^٢ = حـ^٢$

∴ $أ^٢ = ب^٢$ ∴ أ = ب

٢٧ (د)

الحل :

د (٢⁺) = نهـا (س ← ٢⁺) $(٣ س^٢ + أ س - ٢) = ١٦$

∴ $٣ (٢)^٢ + أ (٢) - ٢ = ١٦$

∴ أ = ٣

، د (٢⁻) = نهـا (س ← ٢⁻) (٢ س + ب) = ١٦

∴ ٢ (٢) + ب = ١٦ ∴ ب = ١٢

∴ أ + ب = ٣ + ١٢ = ...

٢٨ (ب)

الحل :

حـ أ جتا ب + حـ ب جتا أ

$= حـ أ \times \frac{أ^٢ + حـ^٢ - ب^٢}{٢ أ حـ} + حـ ب \times \frac{ب^٢ + حـ^٢ - أ^٢}{٢ ب حـ}$

$= \frac{١}{٢} (أ^٢ + حـ^٢ - ب^٢ + ب^٢ + حـ^٢ - أ^٢)$

$= \frac{١}{٢} \times ٢ حـ^٢ = حـ^٢$

النموذج الرابع

١ (أ)

٢ (د)

الحل :

بوضع س − ٢ ≥ ٠ ∴ س ≥ ٢

، س − ٣ ≠ ٠ ∴ س ≠ ٣

∴ مجال د = [٢ ، ∞[− {٣}

٣ (د)

الحل :

بقسمة البسط والمقام على س

∴ نهـا (س ← ∞) $\frac{أ + \frac{٦}{س}}{٢ + \frac{٧}{س}} = ٤$

∴ $\frac{أ}{٢} = ٤$ ∴ أ = ٨

٤ (ب)

٥ (ب)

الحل :

جتا θ = $\frac{٣^٢ + ٥^٢ - ٧^٢}{٢ (٣)(٥)} = -\frac{١}{٢}$

∴ θ = ١٢٠° ∴ قياس أكبر زاوية = ١٢٠°

٦ (د)

الحل :

نهـا (س ← ٢) $\frac{س^٥ - ٢^٥}{س^٣ - ٢^٣} = \frac{٥}{٣} \times ٢^٢ = \frac{٢٠}{٣} = ٦ \frac{٢}{٣}$

٧ (ب)

الحل :

ص = ٧ س بتبديل المتغيرات

∴ س = ٧ ص ∴ ص = $\frac{١}{٧}$ س

∴ $د^{-١}$ (س) = $\frac{١}{٧}$ س

٨ (أ)

٩ (ج)

الحل :

د (أ) + د (− أ) = د (أ) − د (أ) = صفر

١٠ (ب)

الحل :

نهـا (س ← ٢) $\frac{(\sqrt{س} - \sqrt{٢})(س - ١)}{(\sqrt{س} - \sqrt{٢})} = ٢ - ٣ = -١$

١١ (أ)

الحل :

∵ ∠ أ حادة ، أ > ب

∴ عدد الحلول = ١

١٢ (ج)

الحل :

نهـا (س ← ٠) $\frac{\sqrt{س + ١} - ١}{س} \times \frac{\sqrt{س + ١} + ١}{\sqrt{س + ١} + ١}$

= نهـا (س ← ٠) $\frac{س + ١ - ١}{س (\sqrt{س + ١} + ١)}$

= نهـا (س ← ٠) $\frac{١}{\sqrt{س + ١} + ١} = \frac{١}{٢}$

١٣ (ب)

١٤ (ج)

الحل :

$\frac{ء}{جا ٣٠°} = \frac{١٥ \sqrt{٣}}{جا ٦٠°}$

∴ ء = $\frac{١٥ \sqrt{٣} \times جا ٣٠°}{جا ٦٠°} = ١٥$ سم

١٥ (ج)

الحل

نهـا (س ← ٠) $\frac{(س + ٢)^٥ - ٢^٥}{س} = ٥ \times ٢^٤ = ٨٠$

١٦ (أ)

الحل :

د (س + ١) = $٤^{س+١-١} = ٤^{س}$

١٧ (ب)

الحل :

أ = $\sqrt{(٢)^٢ + (٢,٥)^٢ - ٢ (٢)(٢,٥) \times \frac{٢}{٥}} = ٢,٥$ سم

∴ أ = حـ

∴ Δ أ ب حـ متساوي الساقين.

١٨ (ج)

الحل :

نهـا (س ← $\frac{\pi}{٢}$) (٢ س − جتا س) = ٢ $(\frac{\pi}{٢})$ − جتا ٩٠° = π

١٩ (ب)

الحل :

(س + ٦) = $س^٢$ ∴ $س^٢ - س - ٦ = ٠$

∴ (س − ٣) (س + ٢) = ٠

∴ س = ٣ أ ، س = −٢ (مرفوضة)

∴ م.ح = {٣}

٢٠ (ج)

الحل :

$\frac{س}{جا س}$ = ٢ نق (بضرب الطرفين × ٢)

∴ $\frac{٢ س}{جا س}$ = ٤ نق

٢١ (أ)

الحل :

نهـا (س ← ٠) $\frac{جا^٢ ٢ س}{س^٢}$ = نهـا (س ← ٠) (أ ٢ + ٢ جا س)

∴ ٤ = ٢ أ + ٢ ∴ ٢ أ = ١ ∴ أ = $\frac{١}{٢}$

٢٢ (أ)

الحل :

$\frac{لو ٦٤}{لو ٨} = \frac{لو ٨^٢}{لو ٨} = \frac{٢ لو ٨}{لو ٨} = ٢$

٢٣ (ب)

٢٤ (أ)

الحل :

٢ نق = $\frac{٧}{جا ٣٠°} = ١٤$ سم

٢٥ (د)

الحل :

لو ٥ س = ٢ ∴ ٥ س = $١٠^٢ = ١٠٠$

∴ س = ٢٠

٢٦ (ج)

٢٧ (ج)

الحل :

حـ = ٥٠٠٠ $(١ + ٠,٠٥)^٢ = ٧٠٢٥,٥$ جنيه

٢٨ (أ)

الحل :

∵ د متصلة عند س = ١

∴ نهـا (س ← ١⁺) د (س) = نهـا (س ← ١⁻) د (س) ∴ ل = م

∴ $ل^٢ + م^٢ - ٢ ل م = ل^٢ + ل^٢ - ٢ ل^٢$ = صفر

النموذج الخامس

١ (ج)

٢ (ج)

٣ (ب)

٤ (ب)

الحل :

∵ نقطة تقاطع منحنى الدالة د مع منحنى الدالة $د^{-١}$ تقع على المستقيم ص = س

∴ ٢ ك − ٣ = ك ∴ ك = ٣

٥ (د)

الحل :

نهـا (س ← ∞) $\frac{س^٢ + ٥}{٦} = \frac{∞ + ٥}{٦} = ∞$

٦ (أ)

الحل :

نهـا (س ← ٢) $\frac{(\sqrt{س} - \sqrt{٢})(س + ٢)}{(س + ١)(\sqrt{س} - \sqrt{٢})} = \frac{٢ + ٢}{٢ + ١} = \frac{٤}{٣}$

٧ (أ)

الحل :

∵ د متصلة عند س = ١

∴ د (١) = نهـا (س ← ١) د (س)

∴ ٢٠٠ = نهـا (س ← أ) $\frac{س^٥ - أ^٥}{س - أ}$

∴ ٢٠٠ = $\frac{٥}{٤}$ × $أ^٤$ ∴ $أ^٤ = ١٦٠$ ∴ أ = ...

٨ (أ)

الحل :

∵ $\frac{س}{جا س}$ = ٢ نق ∴ $\frac{س}{٢ جا س}$ = نق

٩ (ج)

الحل :

بالقسمة على ١٢

∴ $\frac{١٦}{١٢} = \frac{جا ب}{١٢} = \frac{جا حـ}{١٢}$ ∴ $\frac{جا أ}{٤} = \frac{جا ب}{٣} = \frac{جا حـ}{٢}$

ويفرض أن أ = ٢ ك ، ب = ٣ ك ، حـ = ٤ ك

، ∵ أ طول أصغر الأضلاع

∴ ق (∠أ) هي قياس أصغر الزوايا

∴ جتا أ = $\frac{ب^٢ + حـ^٢ - أ^٢}{٢ ب حـ}$

$= \frac{٩ ك^٢ + ١٦ ك^٢ - ٤ ك^٢}{٢ (٣ ك)(٤ ك)} = \frac{٧}{٨}$

∴ ق (∠أ) = ٢٨° ٥٧َ

١٠ (أ)

الحل

(د ○ ر) (س) = د (ر (س)) = د (س)

$= \sqrt[٣]{س^٣} = س$

١١ (د)

١٢ (ب)

الحل

بوضع س − ٣ = ٠ ∴ س = ٣

∴ مجموعة أصفار الدالة ر = {٣}

مجال ر = (ح ∩ [١ ، ٥]) − {٣}

= [١ ، ٥] − {٣}

١٣ (ب)

١٤ (د)

الحل

، د $(\frac{\pi}{٤}^{+})$ = نهـا (س ← $\frac{\pi}{٤}^{+}$) جا (π − س) = جا $(\pi - \frac{\pi}{٤})$

= جا $(\frac{\pi}{٤})$ = ١

، د $(\frac{\pi}{٤}^{-})$ = نهـا (س ← $\frac{\pi}{٤}^{-}$) $\frac{جا (\frac{\pi}{٤} - س)}{\frac{\pi}{٤} - س}$ ...

= نهـا ... $\frac{جا (\frac{\pi}{٤} - س)}{٢ (\frac{\pi}{٤} - س)} = \frac{١}{٢}$

∴ د $(\frac{\pi}{٤}^{+})$ ≠ د $(\frac{\pi}{٤}^{-})$

∴ نهـا (س ← $\frac{\pi}{٤}$) د (س) غير موجودة

١٥ (ج)

الحل

نهـا (س ← ∞) $\frac{٥ + \frac{٤}{س}}{١ + \frac{٢}{س}} = \frac{٥}{١} = ٥$

١٦ (د)

الحل :

$\text{٢ نق} = \frac{١٠\sqrt{٣}}{\text{جا } ٦٠^{\circ}} = ٢٠ \text{ سم}$

١٧ (أ)

الحل :

$\frac{\text{جا أ}}{٣} = \frac{\text{جا ب}}{\frac{٥}{٢}} = \frac{\text{جا حـ}}{٤}$

$\therefore \text{أ} : \text{ب} : \text{حـ} = ٣ : \frac{٥}{٢} : ٤ = ٦ : ٥ : ٨$

١٨ (جـ)

الحل :

$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا } ٢س}{٤س} \times \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{ظا } ٣س}{س} = \frac{٢}{٤} \times ٣ = \frac{٣}{٢}$

١٩ (جـ)

الحل :

$س^{\frac{١}{٦}} = ٢^{\frac{١}{٢}} \times ٣^{\frac{١}{٣}}$ $\therefore س = \left(٢^{\frac{١}{٢}} \times ٣^{\frac{١}{٣}}\right)^{٦}$

$\therefore س = ٢^{٣} \times ٣^{٢} = ٨ \times ٩ = ٧٢$

٢٠ (جـ)

الحل :

$\because \text{لو } (س + ١١) = ٢$

$\therefore س + ١١ = ١٠^{٢} = ١٠٠$

$\therefore س = ١٠٠ - ١١ = ٨٩$

٢١ (د)

الحل :

$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \frac{\sqrt[ن]{س} - ١}{\sqrt[م]{س} - ١} = \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \frac{س^{\frac{١}{ن}} - ١^{\frac{١}{ن}}}{س^{\frac{١}{م}} - ١^{\frac{١}{م}}}$

$= \left(\frac{١}{ن} \div \frac{١}{م}\right) \times ١^{(\frac{١}{ن} - \frac{١}{م})} = \frac{م}{ن}$

٢٢ (ب)

الحل :

$\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \text{ د}(س) = \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} (٣س - ١) = ٣(٢) - ١ = ٥$

٢٣ (ب)

٢٤ (جـ)

الحل :

$\because س \in [-١ \text{ ، } ٤]$ $\therefore -١ \le س \le ٤$

$\therefore -٢ \le ٢س \le ٨$ $\therefore -٥ \le ٢س - ٣ \le ٥$

$\therefore |٢س - ٣| \le ٥$

٢٥ (ب)

الحل :

$٤ + \text{لو}_{٢} س = ٣^{٢} = ٩$

$\therefore \text{لو}_{٢} س = ٥$ $\therefore س = ٢^{٥} = ٣٢$

٢٦ (جـ)

الحل :

$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \frac{س^{حـ}(س^{أ-حـ} - ١)}{س^{ء}(س^{أ-ء} - ١)}$

$= \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}} س^{(حـ-ء)} \times \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \frac{س^{أ-حـ} - ١^{أ-حـ}}{س^{أ-ء} - ١^{أ-ء}}$

$= ١ \times \frac{أ-حـ}{أ-ء} \times ١ = \frac{أ-حـ}{أ-ء}$

٢٧ (أ)

الحل :

$\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهــا}} \text{ د}(س) = \underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهــا}} \frac{(س-٥)(س+٥)}{(س-٥)}$

$= ٥ + ٥ = ١٠$

∴ د متصلة عند س = ٥ إذا كان د (٥) = ١٠

٢٨ (أ)

الحل :

$حـ = \sqrt{٥^{٢} + ٧^{٢} - ٢\,(٥)\,(٧)\,\text{جتا } ٦٥^{\circ}} \approx ٦,٧ \text{ سم}$

2021

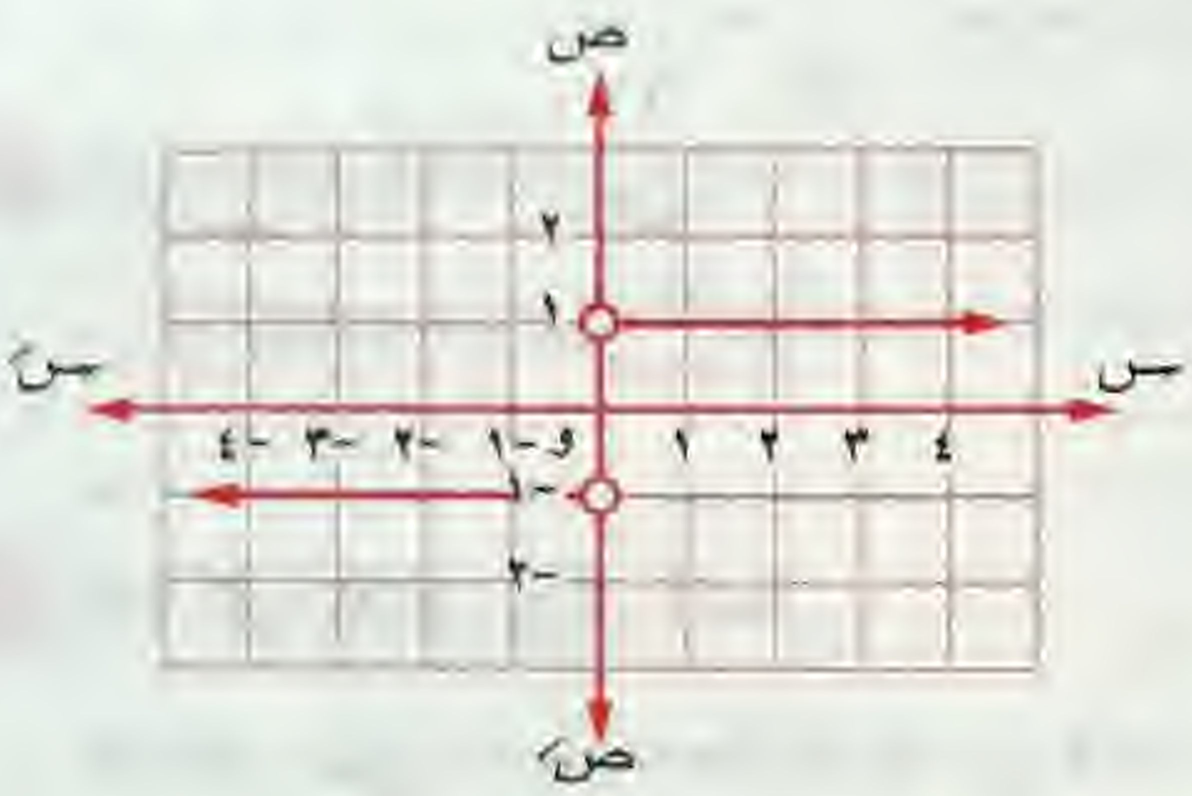
أولاً : نماذج الامتحانات النهائية

النموذج الأول

امتحان إلكتروني ①

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ مدى الدالة الممثلة بالشكل المقابل هو ....



(أ) $\{1\}$

(ب) $\{1 ، -1\}$

(جـ) $\{-1\}$

(د) ح

---

٢ إذا كانت النقطة $\left(س ، \frac{4}{س}\right)$ نقطة تقاطع منحنى الدالة د والدالة العكسية لها $د^{-1}$

فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ± ٢ (د) ± ٤

---

٣ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{2س + 3}{5س^2 + 4} = ...$

(أ) ٢ (ب) صفر (جـ) $\frac{3}{4}$ (د) $\frac{2}{5}$

---

٤ فى Δ أ ب جـ إذا كان : ٤ جا أ = ٣ جا ب = ٦ جا جـ فإن : ق(∠ جـ) = ...

(أ) ٨٩° (ب) ٢٩° (جـ) ٥٧° (د) ٨٢°

---

٥ أ ب جـ مثلث فيه : ق(∠ جـ) = ٢٣َ ٩٦° ، أ = ٧ سم ، ب = ٩ سم

أوجد : جـَ ، مساحة Δ أ ب جـ لأقرب $سم^2$.

---

٦ إذا كانت : د(١) = ٣ ، ر(٣) = ٥ فإن : (ر ∘ د)(١) = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ١٥ (د) $\frac{3}{5}$

٧ مجموعة حل المعادلة : $٢^{٢س} - ١٢ \times ٢^{س} + ٢^{٥} =$ صفر في ح هي ....

(أ) {٢ ، ٣} (ب) {٢} (جـ) {٣} (د) {٤ ، ٨}

٨ استخدم منحنى الدالة د حيث د (س) = $\frac{١}{س}$ لتمثيل منحنى الدالة ر حيث ر (س) = د (س − ٢) + ٢ ومن الرسم عيِّن مداها وابحث اطرادها.

٩ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{(س + ٢)^{٥} - ٣٢}{س} =$ ....

(أ) ٢٥ (ب) ٦٤ (جـ) ٨٠ (د) ١٠٠

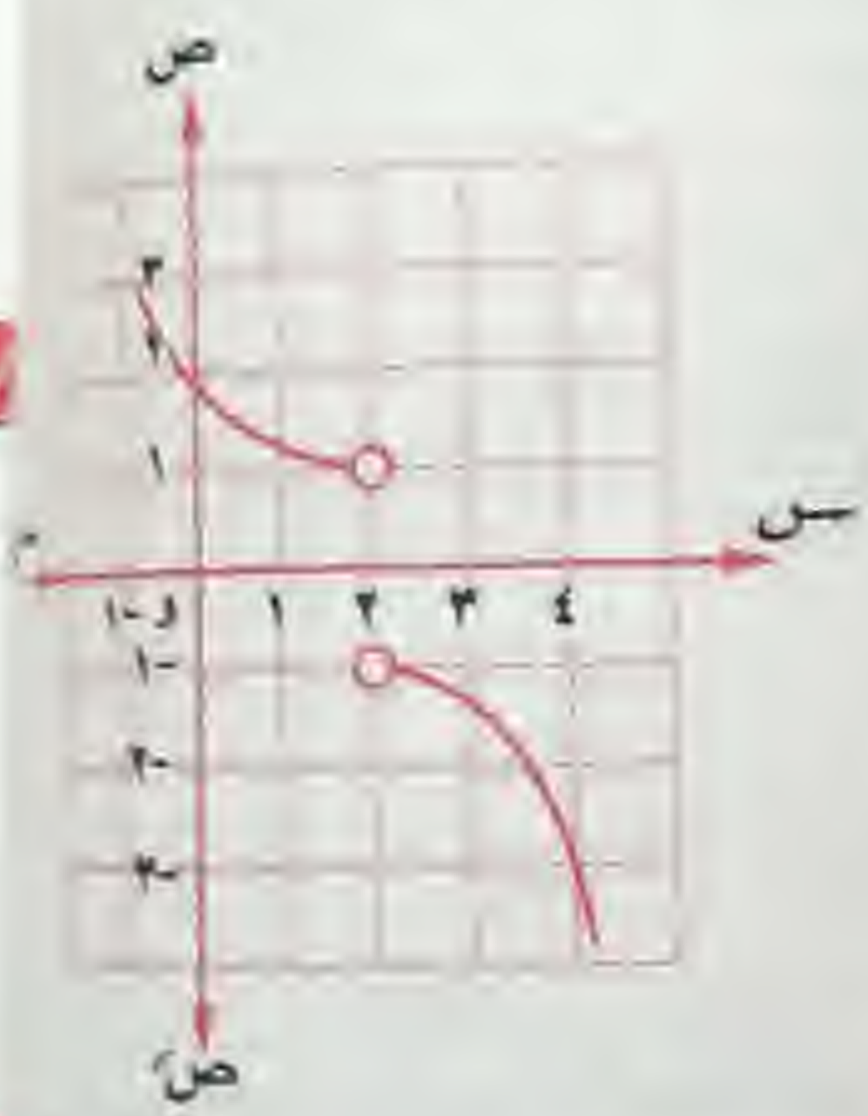
١٠ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د فإن : $\lim\limits_{س \to ٢} |د(س)| =$ ....

(أ) ١

(ب) −١

(جـ) ٢

(د) غير موجودة.



١١ عدد الحلول الممكنة للمثلث ل م ن حيث : ق (∠ ل) = ٤٠°

، لَ = ١٢ سم ، مَ = ١٥ سم يساوي ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) عدد لا نهائي

١٢ مجموع جذري المعادلة : $٥^{٢س} - ١٢ \times ٥^{س} + ٢٧ = ٠$ يساوي ....

(أ) لو$_{٥}$ ١٢ (ب) ١٢ (جـ) لو$_{٥}$ ٢٧ (د) ٢٧

١٣ إذا كان : س = ٥ + ٢$\sqrt{٦}$ فإن : لو $\left(س + \frac{١}{س}\right) =$ ....

(أ) ١ (ب) ٥ − ٢$\sqrt{٦}$ (جـ) ١٠ (د) ٥ + ٢$\sqrt{٦}$

14 أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه $5\sqrt{3}$ سم فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه يساوى .... سم.

(أ) $5\sqrt{3}$ (ب) $10\sqrt{3}$ (جـ) ١٠ (د) ٥

15 إذا كانت د (س) = ٢ + $\sqrt{3 - س}$ فأوجد مجال ومدى د ثم أوجد $د^{-1}$ (س) وعين مجال $د^{-1}$ ومداها.

16 إذا كانت د : ح ← ح حيث د (س) = (أ + ١) س + ب − ٢ وكانت د (س) تربط كل عدد حقيقى بنفسه فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (١ ، ٣) (ب) (٠ ، ٣) (جـ) (٠ ، ٢) (د) (١ ، ٢)

17 إذا كانت د (س) = $\frac{س^2 - 16}{س - 4}$ عند س ≠ ٤ فإن : قيمة د (٤) التى تجعل الدالة متصلة عند هذا الموضع تساوى ....

(أ) غير معرفة (ب) $\lim\limits_{س \to 4} \frac{س^2 - 16}{س - 4}$

(جـ) صفر (د) ١٦

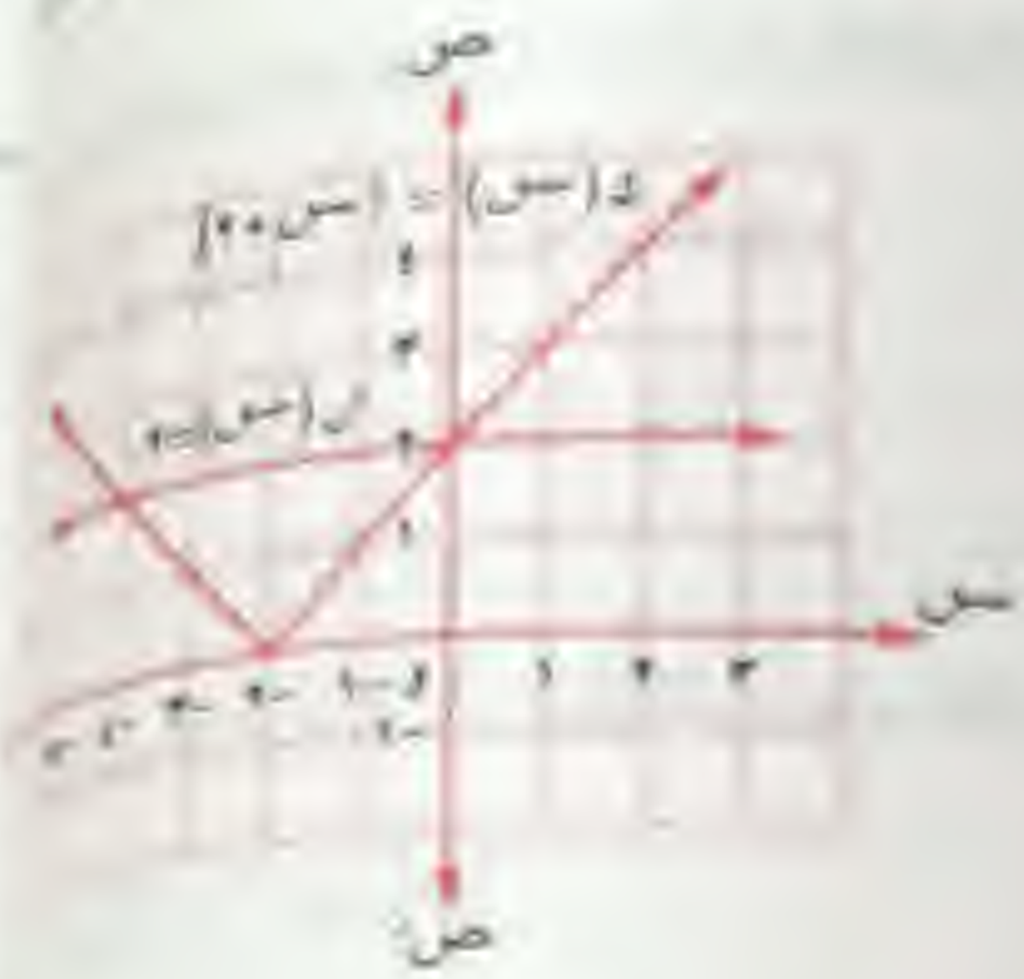
18 مجموعة حل المعادلة : $لو_3 س \times لو_2 3 = 5$ فى ح هى ....

(أ) {٣٢} (ب) {٥} (جـ) {٣} (د) {٢}

19 إذا كان أ ب حـ مثلثاً فيه ق (∠ أ) : ق (∠ ب) : ق (∠ حـ) = ٣ : ٥ : ٤

فإن $حـ^2 : أ^2$ = ...

(أ) $\sqrt{6}$: ٢ (ب) ٢ : ٣ (جـ) ٤ : ٣ (د) ٣ : ٢



٢٠ في الشكل المقابل : مجموعة حل المتباينة

د (س) ≥ ر (س) في ح

هي ....

(أ) {−١ ، ٠}

(ب) [−٤ ، ٠]

(ج) ح − [−١ ، ٠]

(د)]−٤ ، ٠[

---

٢١ إذا كانت د دالة حيث :

$$د(س) = \begin{cases} س^{٢} - س + ٤ & \text{عندما } س < ٢ \\ ك & \text{عندما } س = ٢ \\ ٥\,س - ٤ & \text{عندما } س > ٢ \end{cases}$$

① ابحث وجود $\lim_{س \to ٢}$ د (س)

② أوجد إن أمكن قيمة ك التى تجعل د متصلة عند س = ٢

---

٢٢ نوع الدالة د : د (س) = $\frac{جا\, س}{س}$ هى ....

(أ) زوجية. (ب) فردية. (ج) لا زوجية ولا فردية. (د) زوجية وفردية.

---

٢٣ $\lim_{س \to ٠} \frac{جا\, \pi |س|}{٤\, س}$ = ...

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) ١ (ج) $\frac{١}{٤}$ (د) غير موجودة

---

٢٤ إذا كان : $س^{\frac{٣}{٢}} = ٨$ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ٩

---

٢٥ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٣} - ٧\,س + ٦}{٢\,س^{٢} - ٨\,س + ٤}$ = ...

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

٢٦ إذا كانت : $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{٢ س + أ}{س + ١} = ٥$ فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) ١٠

---

٢٧ في أي Δ س ص ع يكون : $س^{٢} + ص^{٢} - ٢$ س ص جتا ع = ...

(أ) $س^{٢}$ (ب) $ص^{٢}$ (جـ) $ع^{٢}$ (د) ع

---

٢٨ مجموعة الحل في ح للمتباينة : $\sqrt{٤ س^{٢} - ١٢ س + ٩} \geq ٩$ تساوي ....

(أ)]−٣ ، ٦[(ب) [−٣ ، ٦] (جـ) ح − [−٣ ، ٦] (د) ح −]−٣ ، ٦[

---

٢٩ مجموعة حل المعادلة : $|٣ - ٢ س| - ٥ س = ٣$ في ح هي ....

(أ) {٠ ، ٣} (ب) {٠ ، −٢} (جـ) {٠} (د) $\emptyset$

---

٣٠ إذا كانت : د (س − ١) = $٢^{س - ٥}$ ، د (س + ٣) = $\frac{١}{٣٢}$ فإن : س = ...

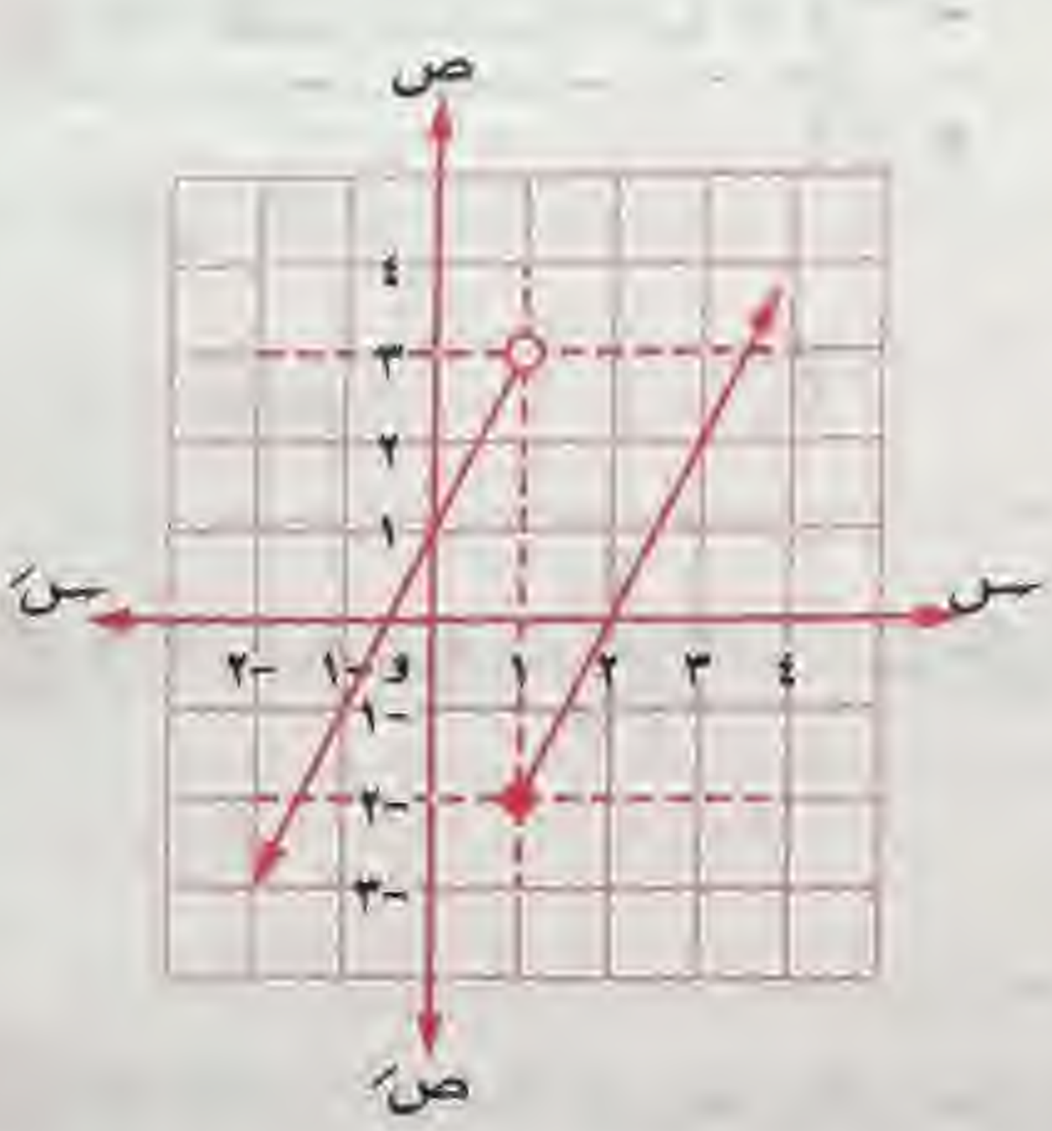
(أ) −٤ (ب) −٢ (جـ) ٤ (د) ٦

---

٣١ إذا كان الشكل المقابل

يمثل منحنى الدالة د فإن :

$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ د (س) + د (١^{+}) + د (١^{-}) = ...



(أ) ٢

(ب) ٣

(جـ) ٤

(د) ٦

---

٣٢ Δ أ ب جـ محيطه ٣٣ سم ، وكان : جا أ + جا جـ = $\frac{٢}{٣}$ ، جا ب = $\frac{١}{٤}$

فإن : ب = ...

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ١٥

امتحان الكترونى

النمــوذج الثانى

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ إذا كانت د : ط ← ط حيث د (س) = ٢ س ، ت : ط ← ط حيث

$$ت (س) = \begin{cases} \frac{س}{٢} & ، \text{ س زوجى} \\ \frac{س + ١}{٢} & ، \text{ س فردى} \end{cases}$$

فإن : (د ○ ت) (٣) − (د ○ ت) (٨) = ...

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) −٤ (د) −٥

---

٢ $\underset{س \to \infty}{نهـا} \left(\frac{٣}{٥}\right)^{\frac{١}{س}}$ = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) ∞

---

٣ أ ب جـ مثلث فيه ء منتصف $\overline{ب جـ}$ أثبت أن : $(أب)^٢ + (أجـ)^٢ = ٢ (أء)^٢ + ٢ (ب ء)^٢$

وإذا كان : أب = ٥ سم ، أجـ = ٨ سم ، ب جـ = ١٢ سم أوجد : أء

---

٤ إذا كانت د : د (س) =

$$\begin{cases} \frac{س^٢ - ١}{س - ١} & ، \text{ س} \neq ١ \\ ٢أ & ، \text{ س} = ١ \end{cases}$$

متصلة عند س = ١

فإن : أ = ...

(أ) صفر (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) ١

---

٥ Δ أ ب جـ فيه : $\frac{أ}{جا أ}$ = ٦ سم فإن طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٦

---

٦ إذا كانت : د دالة فردية وكان س د (س) + $س^٢$ د (−س) = ٢

فإن : د (٢) = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{-١}{٢}$ (د) −٣

---

٧ إذا كان : س = ٥ + ٢ $\sqrt{٦}$ أوجد فى أبسط صورة قيمة : لو $\left(\frac{١}{س} + س\right)$ بدون الحاسبة

٨ في $\triangle$ س ص ع يكون : $\frac{س^2 + ص^2 - ع^2}{2\, س\, ص} = $ ....

(أ) جتا س (ب) جتا ص (ج) جتا ع (د) جا ع

٩ $\underset{س \to 1}{\text{نهـــا}} \frac{س^2 - س^{-2}}{س - س^{-1}} = $ ....

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) -٢

١٠ إذا كانت : د (س) = $3^{س}$ فإن مجموعة الحل في ح للمعادلة :
د (٢ س) - ٢٨ د (س) + د (٣) = صفر هي ....

(أ) {١ ، ٢٧} (ب) {٢٧} (ج) {٠ ، ٣} (د) {٣}

١١ إذا كان : لو أ ∈]٠ ، ١[فإن : أ ∈ ....

(أ)]٠ ، ١[(ب)]١ ، ٢[(ج)]١ ، ١٠[(د)]١ ، ∞[

١٢ منحنى الدالة الزوجية يكون متماثلاً حول المستقيم ....

(أ) ص = س (ب) $\overleftrightarrow{ص ص'}$ (ج) $\overleftrightarrow{س س'}$ (د) ص = - س

١٣ $\triangle$ ل م ن فيه : $\frac{جا ل}{3} = \frac{2\, جا م}{3} = \frac{جا ن}{4}$ فإن : لَ : مَ : نَ = ...

(أ) ٦ : ٨ : ٣ (ب) ٣ : ٦ : ٨ (ج) ٨ : ٣ : ٦ (د) ٦ : ٣ : ٨

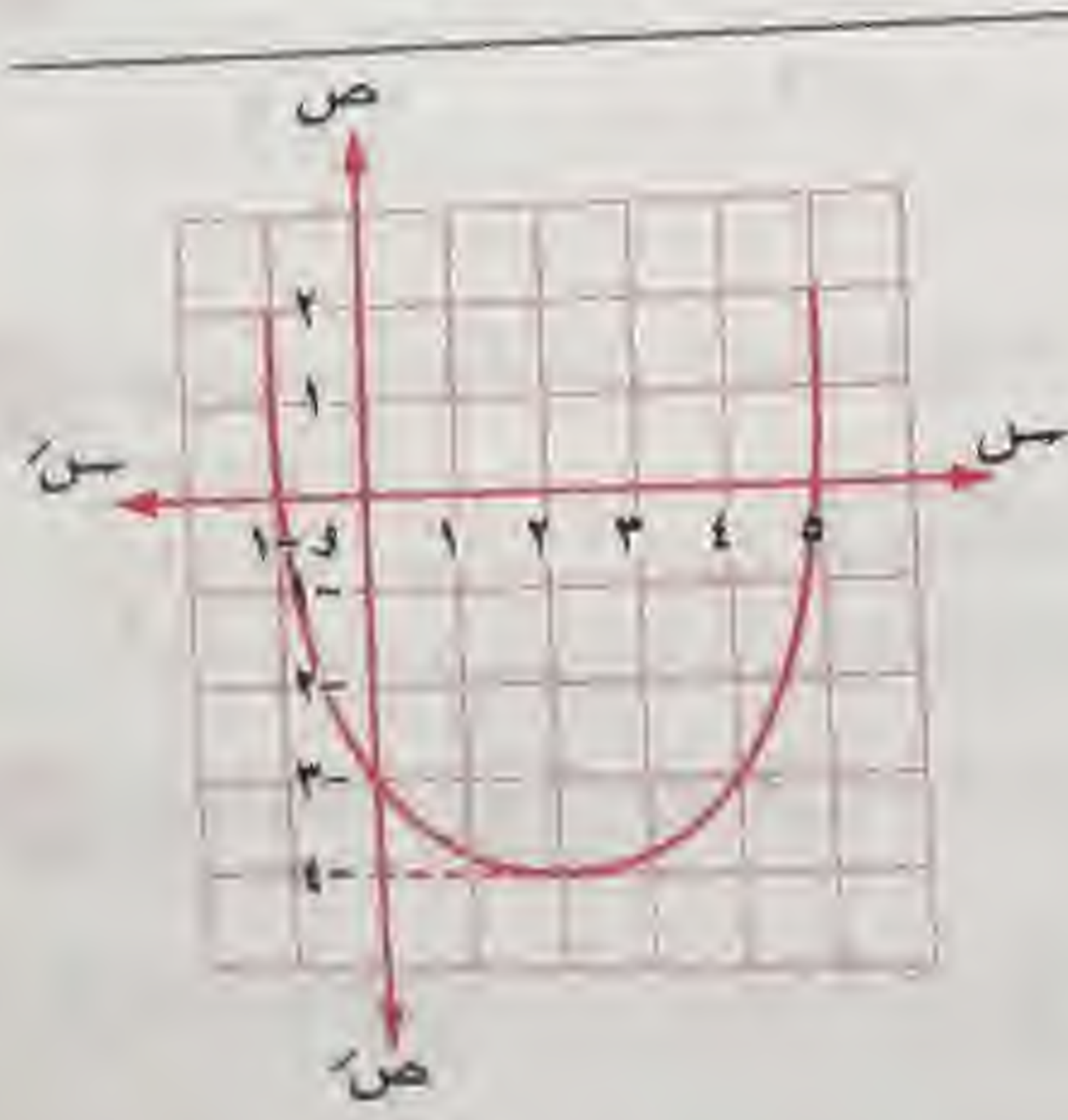
١٤ أ ب حـ مثلث فيه : حـَ = ٧ سم ، ق (∠ أ) = ٧٠° ، ق (∠ ب) = ٤٠°

فإن : بَ = ... سم

(أ) ٦,٣ (ب) ٨,٤ (ج) ٣,٦ (د) ٤,٨

١٥ إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د فإن :

$\underset{س \to 2}{\text{نهـــا}} \frac{[د (س)]^2 + د (س) - 12}{د (س) + 4} = $ ....



(أ) -٧ (ب) -٤ (ج) -١ (د) ٣

16 استخدم منحنى الدالة د : د $(س) = \frac{1}{س}$ لرسم منحنى الدالة ر : ر $(س) = \frac{1}{س - 2} + 3$ ومن الرسم عين مجال ومدى ر واطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك ، هل الدالة ر أحادية أم لا ؟

---

17 مدى الدالة د : د $(س) = \frac{س - 2}{2 - س}$ يساوى ....

(أ) ح (ب) ح $- \{2\}$ (جـ) ح $- \{-2\}$ (د) $\{-1\}$

---

18 إذا كان : ص $= أ^{لو_{أ} س}$ فإن : ....

(أ) س + ص = 0 (ب) س = 2 ص
(جـ) س − ص = 0 (د) س = $\frac{1}{2}$ ص

---

19 لو$_{3}$ 5 × لو$_{2}$ 3 × لو$_{5}$ 16 = ...

(أ) 30 (ب) 15 (جـ) لو 10000 (د) لو$_{30}$ 240

---

20 المنحنى ر $(س) = س^2 + 4$ هو نفس المنحنى د $(س) = س^2$ بإزاحة مقدارها 4 وحدات فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{و س}$ (ب) $\overrightarrow{و س}$ (جـ) $\overleftarrow{و ص}$ (د) $\overrightarrow{و ص}$

---

21 ابحث وجود نهاية د $(س) = \begin{cases} س^2 + 1 & لكل\ س < 3 \\ 3س + 1 & لكل\ س \geq 3 \end{cases}$ عند س = 3

---

22 الدالة د حيث د $(س) = أ^{س}$ تكون تناقصية على مجالها إذا كان ....

(أ) أ = 1 (ب) أ > 1 (جـ) 0 < أ < 1 (د) أ = −1

---

23 $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} (2س + جا س) = $ ....

(أ) π (ب) $\pi - 1$ (جـ) $1 - \pi$ (د) $\pi + 1$

---

24 $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{س^2}}{س} = $ ....

(أ) صفر (ب) 2 (جـ) −1 (د) 1

٢٥ مجموعة الحل في ح للمعادلة : | س - ٧ | = ٢ س - ٢ تساوى ....

(أ) {٣ ، -٥} (ب) {٣} (ج) {-٥} (د) ∅

---

٢٦ إذا كانت : ص = $\sqrt{س}$ لكل س ≥ ٠ فإن الدالة العكسية لها هى ص = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ س^{٢} (ب) س^{٢} (ج) س^{٢} - ١ (د) س$^{\frac{١}{٢}}$

---

٢٧ إذا كان محيط Δ أ ب جـ = ٣٣ سم وكان جا أ + جا جـ = $\frac{٢}{٣}$ ، جا ب = $\frac{١}{٤}$

فإن : أ جـ = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٩ (ج) ١٢ (د) ١٥

---

٢٨ نهـا (س ← ٠) $\frac{\text{جا ٢ س + ٥ ظا ٣ س}}{\text{س}}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ١٥ (ج) ٢١ (د) ١٧

---

٢٩ مجموعة حل المتباينة : $\sqrt{س^{٢} - ٤ س + ٤} > ٠$ فى ح هى ....

(أ) ح - {٢} (ب) ح - {-٢} (ج) ح (د) ∅

---

٣٠ إذا كانت د (س) دالة وكانت : نهـا (س ← ٢) $\frac{\text{د(س) - ٨}}{\text{س - ٢}}$ = ٧

فإن : نهـا (س ← ٢) $\frac{\text{٢ س}^{٢}\text{ - د(س)}}{\text{س - ٢}}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٧ (ج) ٨ (د) ١٥

---

٣١ عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب جـ حيث : ق (∠ أ) = ١١٠° ، أ = ٧ سم

، ب = ٤ سم هو ....

(أ) ١ (ب) صفر (ج) عدد لا نهائى. (د) ٢

---

٣٢ مجموعة حل المعادلة : لو (س + ٢) + لو (س - ٢) = ١ - لو ٢ فى ح هى ....

(أ) {لو$_{٥}$ ١٢٥} (ب) {لو$_{٢}$ ١٦} (ج) {لو$_{٣}$ ٩} (د) {لو$_{١٠}$ ١٠٠}

(د) ٤

(د) ليس لها وجود.

(ب) ٩ (د) ١٥

(د) ١

(د) غير موجودة.

١٣ المساحة المحصو...

١٤ إذا كان : لو ص...

(أ) ص = $س^٢$

١٥ إذا كانت : د دا...

(أ) ٢ س

١٦ في Δ أ ب حـ

(أ) ٢ : ٣ : ٤

١٧ نهــا

(أ) ٨٠

النمـــوذج الثالث

امتحان الكتروني ٣

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ إذا كانت : د (س) = ٧ س + ١٠

أوجد قيمة س التى تحقق : د (٢ س − ١) + د (س − ٢) = ٥٠

---

٢ إذا كان : لو ٣ = س ، لو ٥ = ص فإن : لو ١٥ = ...

(أ) س ص (ب) $\frac{س}{ص}$ (جـ) س + ص (د) س − ص

---

٣ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٥ + س^{-٢}}{١ + ٣ س^{-٢}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٥}{٤}$ (جـ) $\frac{٥}{٣}$ (د) ٥

---

٤ إذا كان : $٩^{س} = ٢$ ، $٢٧^{ص} = ٤$ فإن : $\frac{س − ص}{س + ص}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٧}$ (ب) $\frac{-١}{٧}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{-٤}{٣}$

---

٥ إذا كانت : د (س) = $لو_{أ}$ (٢ س + ٤) ، $د^{-١}$ (٥) = ١٤ فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

---

٦ $\lim\limits_{س \to ١٦} \frac{\sqrt[٤]{س} − ١}{س − ١٦}$ = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ١ (د) ليس لها وجود.

---

٧ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{س (\text{ظتا} س + \text{ظتا} ٢ س + \text{ظتا} ٥ س)}{\text{جا} س}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٩ (د) ١٥

---

٨ لو ٢٥ + $\frac{لو ٨ \times لو ١٦}{لو ٦٤}$ = ...

(أ) ٢ (ب) لو ٢ (جـ) ٣ (د) ١

٩ أ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه : ق (د أ) = ٥٠° ، ق (د ء ب حـ) = ٧٠°

، ب ء = ٨ سم أوجد محيط متوازي الأضلاع لأقرب سم.

١٠ $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٢} \dfrac{\text{س} - ٢}{\text{س} + ١}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ∞

١١ $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٠} \dfrac{١ - \text{قا س}}{\text{حتا س} - ١}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) صفر (د) ١-

١٢ $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٥} \dfrac{\text{س}^٢ - ٨\,\text{س} + ١٥}{\text{س}^٢ - ١٠\,\text{س} + ٢٥}$ = ...

(أ) غير موجودة. (ب) صفر (جـ) ٢ (د) ٣

١٣ المساحة المحصورة بين منحنيي الدالتين د : د (س) = | س + ٣ | - ٢

ر : ر (س) = صفر هي .... وحدة مربعة.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

١٤ إذا كان : $\text{لو}_٣$ ص = س فإن الصورة الأسية هي ....

(أ) ص = $\text{س}^٣$ (ب) س = $\text{ص}^٣$ (جـ) س = $٣^{\text{ص}}$ (د) ص = $٣^{\text{س}}$

١٥ إذا كانت : د دالة فردية على [- س ، س] فإن : د (- س) + د (س) = ...

(أ) ٢ س (ب) غير معرفة. (جـ) -٢ س (د) صفر

١٦ في Δ أ ب حـ إذا كان : ٢ حا أ = ٣ حا ب = ٤ حا حـ فإن : أ : ب : حـ = ...

(أ) ٢ : ٣ : ٤ (ب) ٤ : ٣ : ٢ (جـ) ٣ : ٤ : ٦ (د) ٦ : ٤ : ٣

١٧ $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٢} \dfrac{\text{س}^٥ - ٣٢}{\text{س}^٢ + ٣\,\text{س} - ١٠}$ = ...

(أ) ٨٠ (ب) $\dfrac{٨٠}{٧}$ (جـ) $\dfrac{١٦}{٧}$ (د) ١٦

١٧ طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ الذى فيه ق (∠ أ) = ٣٠° ، أ = ١٠ سم يساوى ....

(أ) ١٠ سم (ب) ٢٠ سم (جـ) ٥ سم

١٨ الدالة د : د (س) = { س^٢ ، س > ٢ ؛ ـ س^٢ ، س ≤ ٢ } متناقصة فى الفترة ....

(أ)]٠ ، ٢[(ب)]ـ ∞ ، ٠[(جـ) ح ـ [٠ ، ٢]

١٩ مجال الدالة د : د (س) = لو$_{١ ـ س}$ س هو ....

(أ) س > ٠ (ب) س < ١ (جـ) ٠ < س < ١

٢٠ إذا كانت : د (س) = $\sqrt{س - ٢}$ ، ر (س) = $\sqrt{٥ - س}$

فإن مجال (د ∘ ر) = ...

(أ)]ـ ∞ ، ٥] (ب)]ـ ∞ ، ١] (جـ) [١ ، ∞[

٢١ ارسم الشكل البيانى للدالة د : د (س) = { |س| ، س ≤ ٠ ؛ س^٢ ، س > ٠ }

ومن الرسم حدد مدى الدالة وابحث اطرادها .

٢٢ مجموعة حل المعادلة : |س + ٢| + س = ـ ٢ فى ح هى ....

(أ) ∅ (ب) ح (جـ)]ـ ∞ ، ـ ٢]

٢٣ قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه ٣ سم ، ٥ سم ، ٧ سم يساوى ....

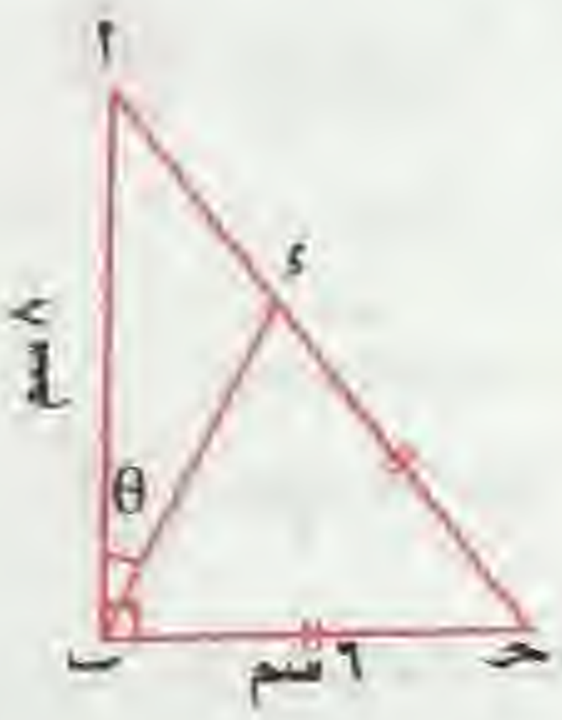
(أ) ١٥٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ٦٠° (د) ٣٠°

٢٥ أ ب حـ مثلث حاد الزوايا فيه : أ = ٥ سم ، ب = ٧ سم ، ق (∠ أ) = ٤٠°

فإن مساحة سطح Δ أ ب حـ تساوى .... سم²

(أ) ١٦ (ب) ١٧ (جـ) ١٨ (د) ٧

٢٦ فى الشكل المقابل :

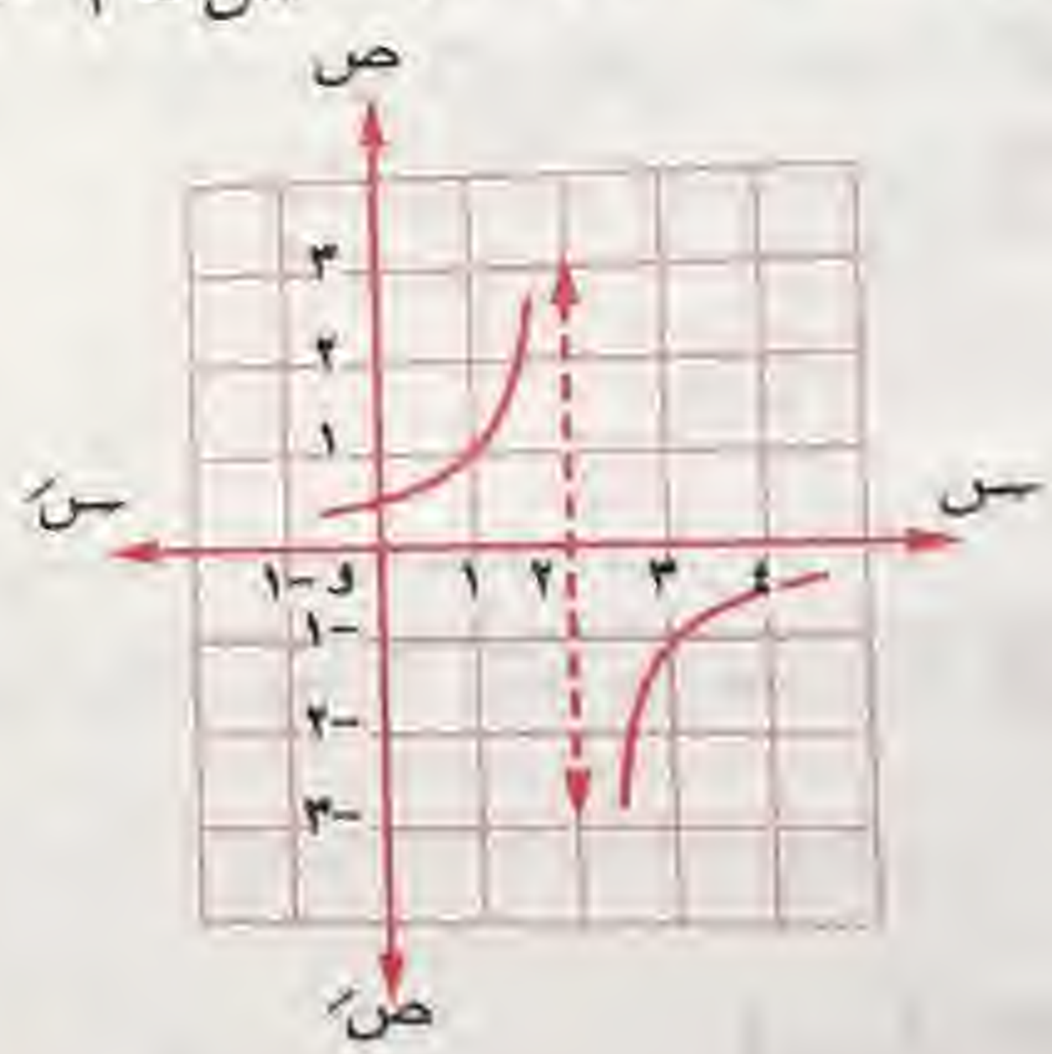


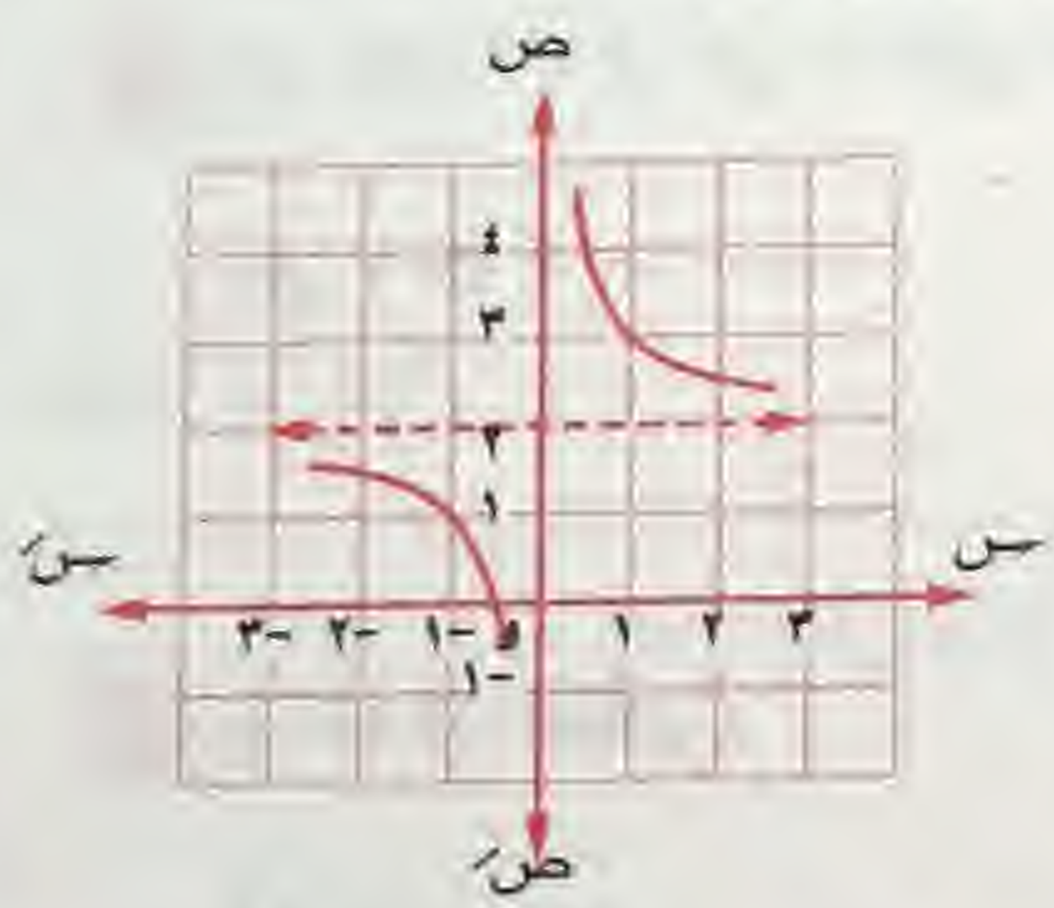
إذا كان : حـ ء = حـ ب = ٦ سم

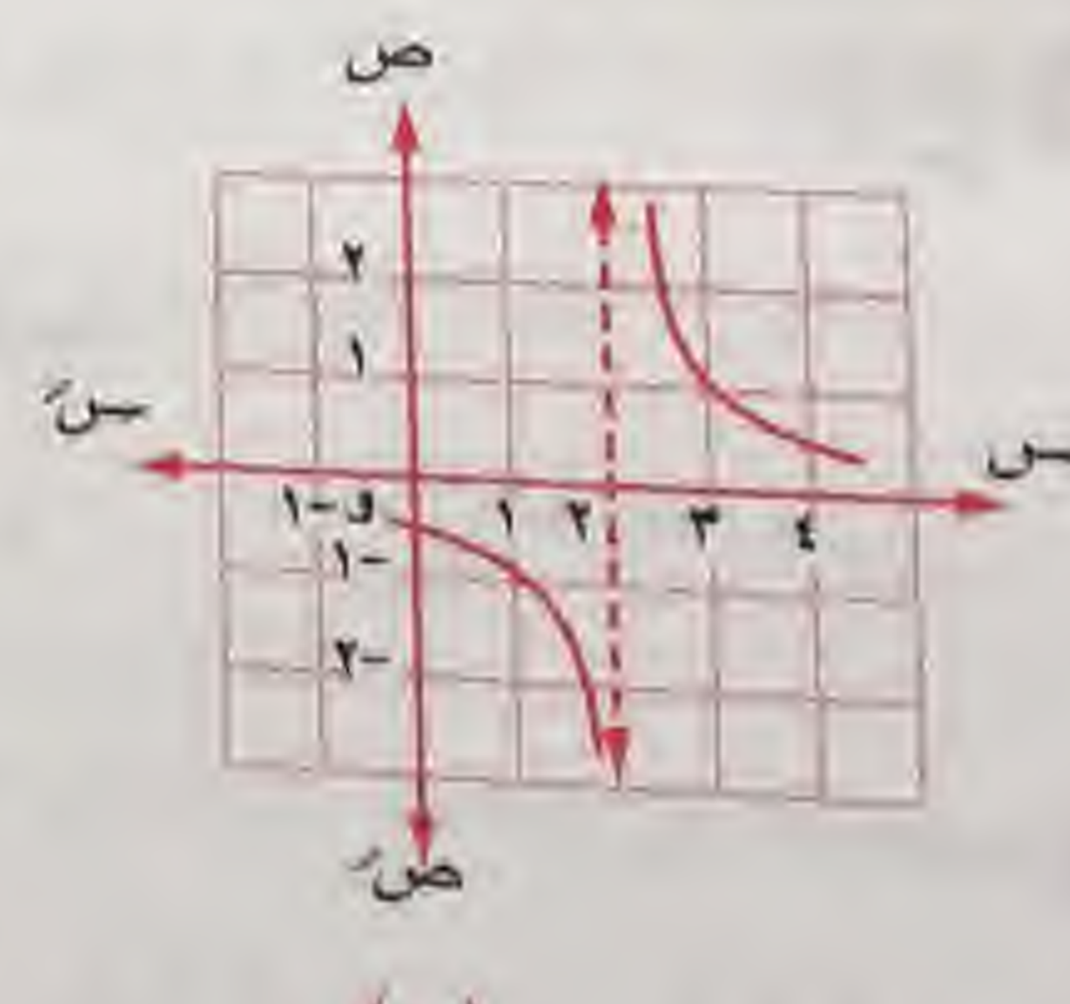
فإن : طا θ = ...

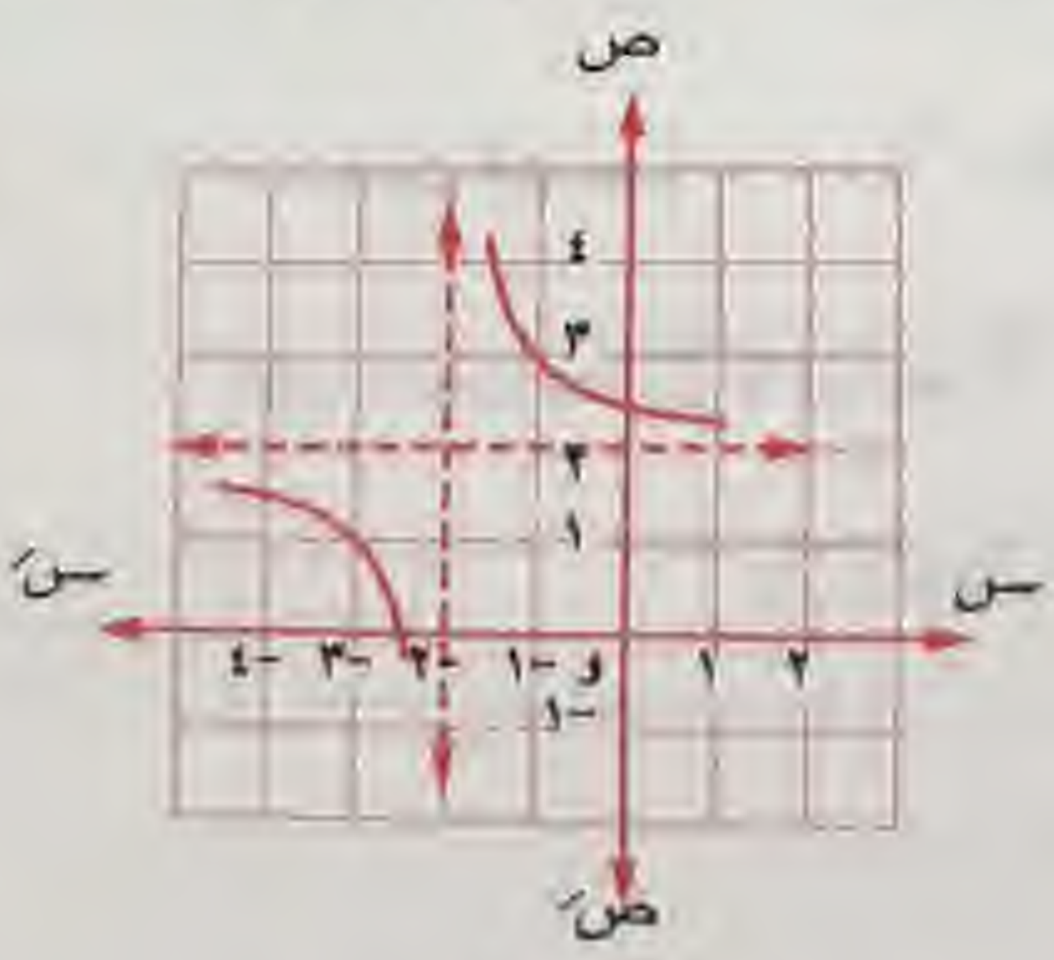
(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ٢

٢٧ إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{س - ٢}$ فإن الشكل الذى يمثل الدالة د هو ....


(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

٢٨ إذا كانت د : د(س) = $\begin{cases} \dfrac{(س + ٣)^{٥} - ٢٤٣}{س} & ، \quad س \neq صفر \\ ك & ، \quad س = صفر \end{cases}$

متصلة عند س = صفر **أوجد : قيمة ك**

---

٢٩ $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{\sqrt{٩س^{٢} + ٤} + ٥س}{٤س + ٣}$ = ...

(أ) ∞ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ٢

---

٣٠ مجموعة حل المتباينة : $|٢س - ٦| + |٣ - س| > ١٢$ هي ....

(أ)]−١ ، ٧[(ب) ح − [−٣ ، ٩]

(جـ) ح − [−١ ، ٧] (د)]−٣ ، ٩[

---

٣١ إذا كان : ٢ لو ص + ٤ لو س − ٣ لو س ص = ٢ (١ − لو ٢) وكان ...

فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ١٦ (د) ...

---

٣٢ **في الشكل المقابل :**



$\overline{أء} \parallel \overline{بحـ}$

ق(∠أحـب) = ٣٠° ، بحـ = ٢٠ سم

، ق(∠أءحـ) = ١٠٠° ، أء = ١٢ سم

فإن : مساحة Δ أبحـ = ... سم^{٢} تقريبًا.

(أ) ٦٠ (ب) ٧٧ (جـ) ١٠٤ (د) ...

النمـوذج الرابع

امتحان إلكترونى ٤

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ نهـــا (س ← ٠) ٥ س قتا ٢ س = ...

(أ) $\frac{٥}{٢}$ (ب) ١٠ (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) صفر

٢ فى Δ أ ب حـ : $\frac{ب^٢ + حـ^٢ - أ^٢}{٢ ب حـ}$ = ...

(أ) جتا أ (ب) جتا ب (جـ) جتا حـ (د) جا أ

٣ مجموعة الحل فى ح للمتباينة : |س - ١| ≤ ٣ يساوى ....

(أ) [-٢ ، ٤] (ب)]-٢ ، ٤[(جـ) ح -]-٢ ، ٤[(د) ح - [-٢ ، ٤]

٤ نهـــا (س ← -١) $\frac{س^٢ + س}{س^٣ + ١}$ = ...

(أ) صفر (ب) $-\frac{١}{٣}$ (جـ) -١ (د) ليس لها وجود.

٥ طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس Δ س ص ع الذى فيه : سَ = ٢٠ جا س سم يساوى .... سم.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢٠ (د) ٤٠

٦ إذا كان : $٢^س = ٣^ص = ٦$ فأى مما يأتى صحيح ؟

(أ) ص - س = س ص (ب) س - ص = س ص

(جـ) س ص = $\frac{س}{ص}$ (د) س + ص = س ص

٧ مجموعة حل المعادلة : لو ٥ س = -١ فى ح هى ....

(أ) {$\frac{١}{١٠}$} (ب) {$\frac{١}{٥٠}$} (جـ) {١} (د) {٥٠}

٢٨ إذا كانت د : د(س) = $\begin{cases} \frac{(س + ٣)^٥ - ٢٤٣}{س} & ، س \neq صفر \\ ك & ، س = صفر \end{cases}$

متصلة عند س = صفر   **أوجد : قيمة ك**

---

٢٩ $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{٩س^٢ + ٤} + ٥س}{٤س + ٣} =$ ……………

(أ) ∞   (ب) ٥   (جـ) ٣   (د) ٢

---

٣٠ مجموعة حل المتباينة : |٢س − ٦| + |٣ − س| < ١٢ هي ……………

(أ)]−١ ، ٧[(ب) ح − [−٣ ، ٩]

(جـ) ح − [−١ ، ٧]   (د)]−٣ ، ٩[

---

٣١ إذا كان : ٢ لو ص + ٤ لو س − ٣ لو س ص = ٢ (١ − لو ٢) وكان : س…

فإن : ك = ……………

(أ) ٤   (ب) ٥   (جـ) ١٦   (د) ٢٥

---

٣٢ في الشكل المقابل :

$\overline{أد} // \overline{بجـ}$

ق(∠أجـب) = ٣٠° ، بجـ = ٢٠ سم

، ق(∠دأجـ) = ١٠٠° ، أد = ١٢ سم

فإن : مساحة Δ أبجـ = …………… سم^٢ تقريباً.



(أ) ٦٠   (ب) ٧٧   (جـ) ١٠٤   (د) ١٢٠

النمــوذج الرابع

امتحان إلكترونى ٤

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ نهـــا$_{س \leftarrow ٠}$ ٥ س ظتا ٢ س = ...

(أ) $\frac{٥}{٢}$ (ب) ١٠ (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) صفر

---

٢ فى Δ أ ب جـ : $\frac{ب^٢ + جـ^٢ - أ^٢}{٢ ب جـ}$ = ...

(أ) جتا أ (ب) جتا ب (جـ) جتا جـ (د) جا أ

---

٣ مجموعة الحل فى ح للمتباينة : |س − ١| ≤ ٣ يساوى ....

(أ) [−٢ ، ٤] (ب)]−٢ ، ٤[(جـ) ح −]−٢ ، ٤[(د) ح − [−٢ ، ٤]

---

٤ نهـــا$_{س \leftarrow -١}$ $\frac{س^٢ + س}{س^٣ + ١}$ = ...

(أ) صفر (ب) $-\frac{١}{٣}$ (جـ) −١ (د) ليس لها وجود.

---

٥ طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس Δ س ص ع الذى فيه : سَ = ٢٠ جا س سم

يساوى .... سم.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢٠ (د) ٤٠

---

٦ إذا كان : $٢^{س} = ٣^{ص} = ٦$ فأى مما يأتى صحيح ؟

(أ) ص − س = س ص (ب) س − ص = س ص

(جـ) س ص = $\frac{س}{ص}$ (د) س + ص = س ص

---

٧ مجموعة حل المعادلة : لو ٥ س = −١ فى ح هى ....

(أ) $\{\frac{١}{١٠}\}$ (ب) $\{\frac{١}{٥٠}\}$ (جـ) {١} (د) {٥٠}

٨ أوجد قياس أصغر زاوية في Δ أ ب جـ الذي فيه : أ = ٨ سم ، ب = ٧ سم ، ومحيطه ٢١ سم.

٩ إذا كانت كل من د ، ر حيث د (س) = ٢ س + أ ، ر (س) = ب س + ٢ دالة عكسية للأخرى فما قيمة كل من أ ، ب ؟

١٠ نهـا (هـ ← ٠) $\frac{(٢ - ٣هـ)^{٧} - ١٢٨}{٤هـ}$ = ...

(أ) −٣٣٦ (ب) ٣٣٦ (جـ) ١٩٢ (د) −١٩٢

١١ إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = لو (١ − أ س) يمر بالنقطة $(\frac{١}{٨} ، \frac{١}{٢})$

فإن : أ =

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٨

١٢ | د (س) | =

(أ) { د (س) ، س ≥ ٠ ؛ − د (س) ، س < ٠ }

(ب) { د (س) ، س < ٠ ؛ − د (س) ، س ≥ ٠ }

(جـ) { د (س) ، د (س) ≥ ٠ ؛ − د (س) ، د (س) < ٠ }

(د) { د (س) ، د (س) < ٠ ؛ − د (س) ، د (س) ≥ ٠ }

١٣ إذا كانت الدالة د : د (س) = { أ س − ٣ عندما س < −١ ؛ ٣ س − ٢ عندما س > −١ }

لها نهاية عند س = −١ أوجد : قيمة أ

١٤ نهـا (س ← ∞) لو $٥^{\frac{١}{س}}$ = ...

(أ) ٥ (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٥}$ (د) صفر

١٥ جميع العلاقات الآتية تكون فيها ص دالة في س ما عدا العلاقة ....

(أ) ص = ٢ س + ١

(ب) ص = $س^{٢}$ − ٤

(جـ) س = $ص^{٢}$ − ٢

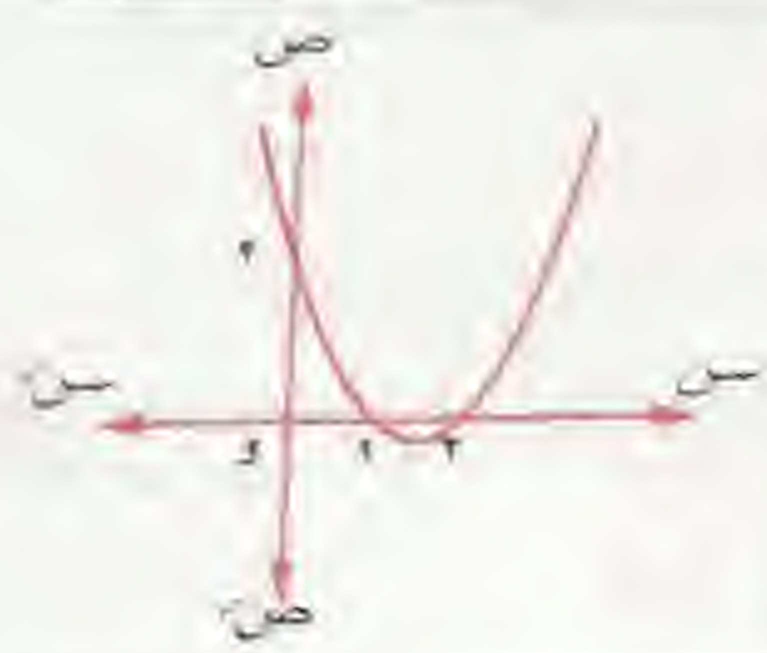
(د) ص = جا س

١٦ ارسم الشكل البيانى للدالة د ، د (س) = $\begin{cases} -\text{س}^{2} & ، \text{س} < ٠ \\ \text{س} & ، \text{س} \geq ٠ \end{cases}$

ومن الرسم أوجد مدى الدالة ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك موضحًا اطرادها.

---

١٧ إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د



فإن : $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{د (س)}}{\text{د (س)} + ٢}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١

(جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ٢

---

١٨ فى الشكل المقابل :



إذا كان : ب حـ = ١٠ سم

فإن محيط Δ ب ء حـ ≃ .... سم.

(أ) ٦٠ (ب) ٦٢

(جـ) ٦٤ (د) ٦٧

---

١٩ إذا كانت : د (س) = $٢^{\text{س}}$ فإن قيمة س التى تحقق المعادلة :

د (س + ١) − د (س − ١) = ٢٤ تساوى ....

(أ) ١٦ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ٢

---

٢٠ إذا كانت : $٣^{\text{س} - ٢} = ٢^{\text{س} - ٢}$ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) −٢ (جـ) صفر (د) ٢

---

٢١ مجال الدالة د : د (س) = $\dfrac{١}{|\text{س}| - ٣}$ هو ....

(أ) {٣ ، −٣} (ب) [−٣ ، ٣]

(جـ) ح − [−٣ ، ٣] (د) ح − {−٣ ، ٣}

٢٢ نقطة رأس منحنى الدالة د : د (س) = (٢ − س)^{٢} + ٣ هى ....

(أ) (٢ ، ٣)　　(ب) (٢ ، −٣)　　(جـ) (−٢ ، ٣)　　(د) (−٢ ، ...

٢٣ أ ب جـ مثلث فيه ق (∠أ) : ق (∠ب) : ق (∠جـ) = ٣ : ٤ : ٣ فإذا كان: أ ...
فإن محيط الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب جـ يساوى تقريبًا .... سم

(أ) ١٧　　(ب) ١٨　　(جـ) ١٩　　(د) ١٥

٢٤ نهـا$_{س \to ٠}$ $\frac{٣^{٢س} - ١}{٣^{س+٢} - ٩}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٩}$　　(ب) $\frac{٢}{٩}$　　(جـ) $\frac{٩}{٢}$　　(د) $\frac{١}{٦}$

٢٥ المنحنى الموضح بالشكل المقابل
متماثل حول المستقيم الذى
معادلته ....



(أ) س = صفر　　(ب) ص = صفر
(جـ) ص = −٢　　(د) س = ٢

٢٦ إذا كانت : ∠أ تكمل ∠جـ　فإن : جتا أ + جتا جـ = ...

(أ) ١　　(ب) صفر　　(جـ) $\frac{١}{٢}$　　(د) −١

٢٧ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} جا ٩س ظتا س ، & س \in]-\frac{\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}[- \{٠\} \\ ك^{٢} ، & س = ٠ \end{cases}$
متصلة عند س = ٠　فإن : ك = ...

(أ) ٣　　(ب) ± ٣　　(جـ) ٩　　(د) ± $\frac{١}{٣}$

٢٨ لو (جتا θ) + لو (قا θ) = ... حيث θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

(أ) ١　　(ب) صفر　　(جـ) ٢　　(د) −١

٢٩ إذا كان : د (س) = | س − ٢ | + ٤ فإن مجموعة حل المعادلة د (س + ٢) = ٦

هى ....

(أ) {٠ ، ٤} (ب) {٢ ، −٢} (جـ) {٢ ، ٤} (د) {−٢ ، −٤}

---

٣٠ نهــا (س ← ٠) $\dfrac{\text{٢ س جتا ٨ س + ٢ جا ٥ س}}{\text{طا ٢ س}}$ = ...

(أ) ١٣ (ب) ١٠ (جـ) ٩ (د) ٦

---

٣١ إذا كانت الدالة د : د (س) دالة أحادية ، وكان : د (٢ ك + ٣) = د (ك − ١)

فإن : ك = ...

(أ) −١ (ب) −٢ (جـ) −٣ (د) −٤

---

٣٢ أ ب جـ مثلث فيه : ب جـ = ١٤ سم ، ق(∠ب) = ٦٠° ومساحة المثلث تساوى ٤٢ $\sqrt{3}$ سم

فإن : أ ب = ... سم

(أ) ١٤ (ب) ١٢ (جـ) ٧ (د) ٦

النمـوذج الخامس

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ نها س ← ١ $\dfrac{س^{٦\frac{١}{٢}} - س^{\frac{١}{٢}}}{س^{٢\frac{١}{٢}} - س^{\frac{١}{٢}}}$ = ...

(أ) $\frac{١٣}{٧}$ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) س

---

٢ إذا كان : $٥^{س + ١} = ٧^{س + ١}$ فإن : $٣^{س + ١}$ = ...

(أ) صفر (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١

---

٣ إذا كان : س < ١ فإن : | ٢ − س | − | س − ٤ | = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ٢ س − ٧ (د) ٧ − ٢ س

---

٤ مجموعة الحل فى ح للمعادلة : | ٢ س − ٤ | = | س + ١ | تساوى ....

(أ) {٠ ، ٥} (ب) {١ ، ٥} (جـ) {٢ ، ٥} (د) {٥}

---

٥ مجال الدالة د : د (س) = $\dfrac{\sqrt{س - ٢}}{س - ٣}$ هو ....

(أ) ح (ب) {٣} (جـ) [٢ ، ∞[(د) [٢ ، ∞[−

---

٦ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \dfrac{س^{٢} - ٩}{س - ٣} & ، س \neq ٣ \\ ٢ أ & ، س = ٣ \end{cases}$ متصلة عند س = ٣

فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) −٣ (د) ٣

---

٧ فى Δ ءهـو وإذا كان : ق (∠ء) = ٣٠° ، هـو = ١٥ $\sqrt{٣}$ سم ، ق (∠ءهـ) =

فإن : ءو = ... سم.

(أ) ٣٠ (ب) ٤٥ (جـ) ١٥ (د) ٦٠

امتحان إلكتروني ٥

٨ موضحًا خطوات الحل حيث س عدد حقيقي أوجد مجموعة حل المعادلة :

$٣^{٢س - ١} - ٤ \times ٣^{س} + ٩ = ٠$

٩ $\lim_{س \to \infty}$ (٣ + ٥ $س^{٢}$ + ٣ س) = ...

(أ) غير موجودة. (ب) ٥ (جـ) ∞ (د) ١١

١٠ إذا كانت : د (س) = ٤ س - ٥ ، ر (س) = $٣^{س}$

فإن : (د ∘ ر) (٢) = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢٧ (د) ٣١

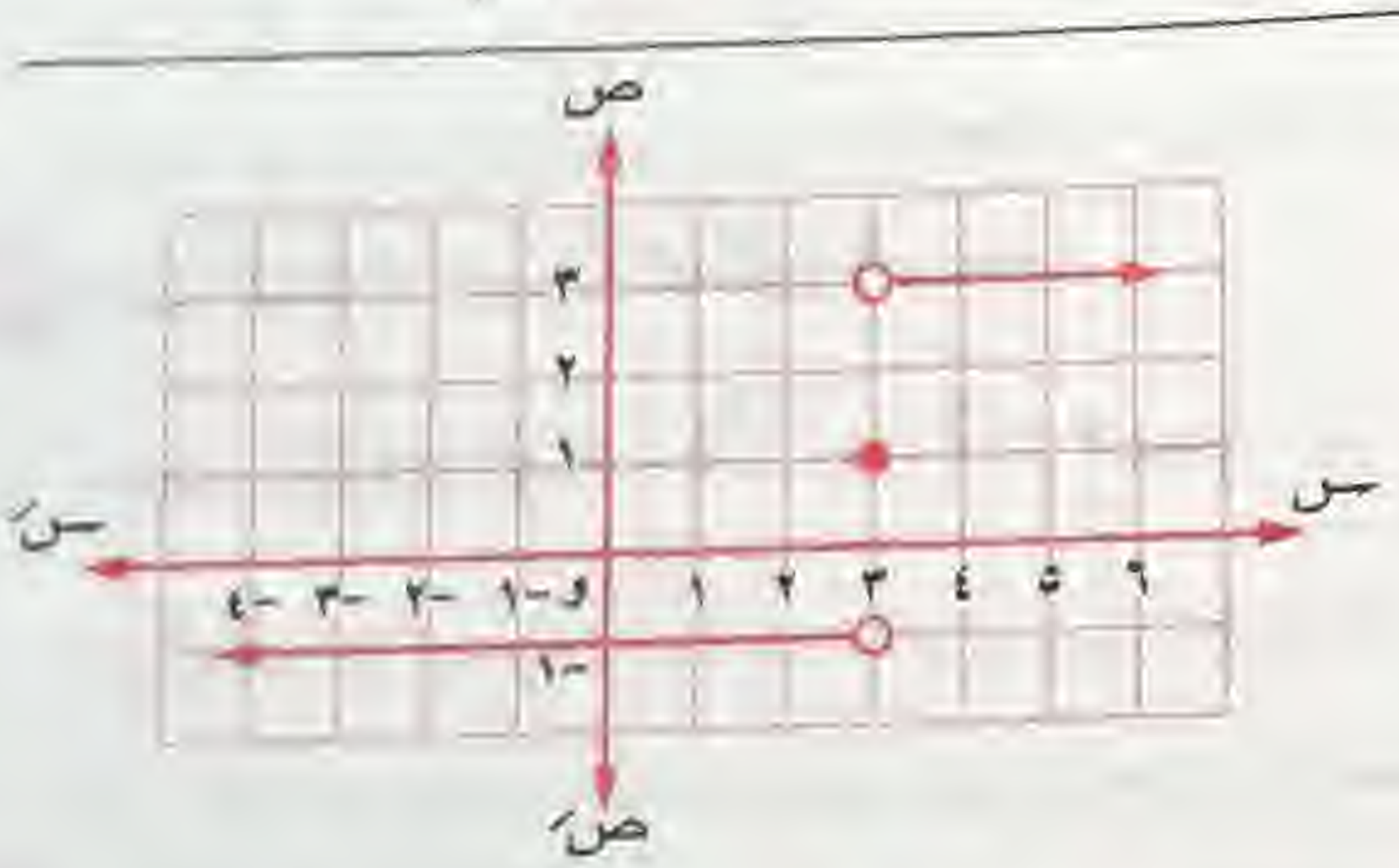
١١ إذا كانت : د (أ) = $٢^{أ}$ فإن : $لو_{٢}$ د (أ) = ...

(أ) ٢ (ب) د (أ) (جـ) أ (د) $\frac{١}{٢ أ}$

١٢ من الشكل المقابل :

د (٣^{+}) + د (٣) = ...

(أ) ٢ (ب) ٠ (جـ) ٤ (د) ٦



١٣ $\lim_{س \to ٠}$ ($\frac{حا ٢ س}{س}$ - حتا ٥ س) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

١٤ من بين الدوال الآتية الدالة الزوجية هى د (س) = ...

(أ) حا س (ب) حا ٣٠° (جـ) س حتا س (د) $س^{٢}$ + طا س

١٥ فى أى مثلث س ص ع يكون ٢ سَ عَ × .... = $سَ^{٢} + عَ^{٢} - صَ^{٢}$

(أ) حتا س (ب) حتا ع (جـ) حتا ص (د) حا ص

١٦ أ ب حـ ء شكل رباعي فيه : أ ب = ٢٢ سم ، ق(د أ ء ب) = ٦٥°

، ق(د ء ب أ) = ٥٠° ، ب حـ = ٢٥ سم ، ء حـ = ١٨ سم

أوجد : ق(د حـ ب ء)

---

١٧ إذا كانت : $\lim\limits_{س \to -1} \frac{س^2 + ك س + م}{س^2 - 1} = 3$ فإن : ك + م = ...

(أ) −٤ (ب) −٥ (جـ) −٨ (د) −٩

---

١٨ مدى الدالة د : د(س) = $\frac{س^2 - 1}{س - 1}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٠} (جـ) ح − {١} (د) ح − {٢}

---

١٩ إذا كان : $\frac{أ + ب}{١٣} = \frac{ب + حـ}{١١} = \frac{حـ + أ}{١٢}$ فإن : حتا أ = ...

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٧}$ (جـ) $\frac{١٩}{٣٥}$ (د) $\frac{٤}{١١}$

---

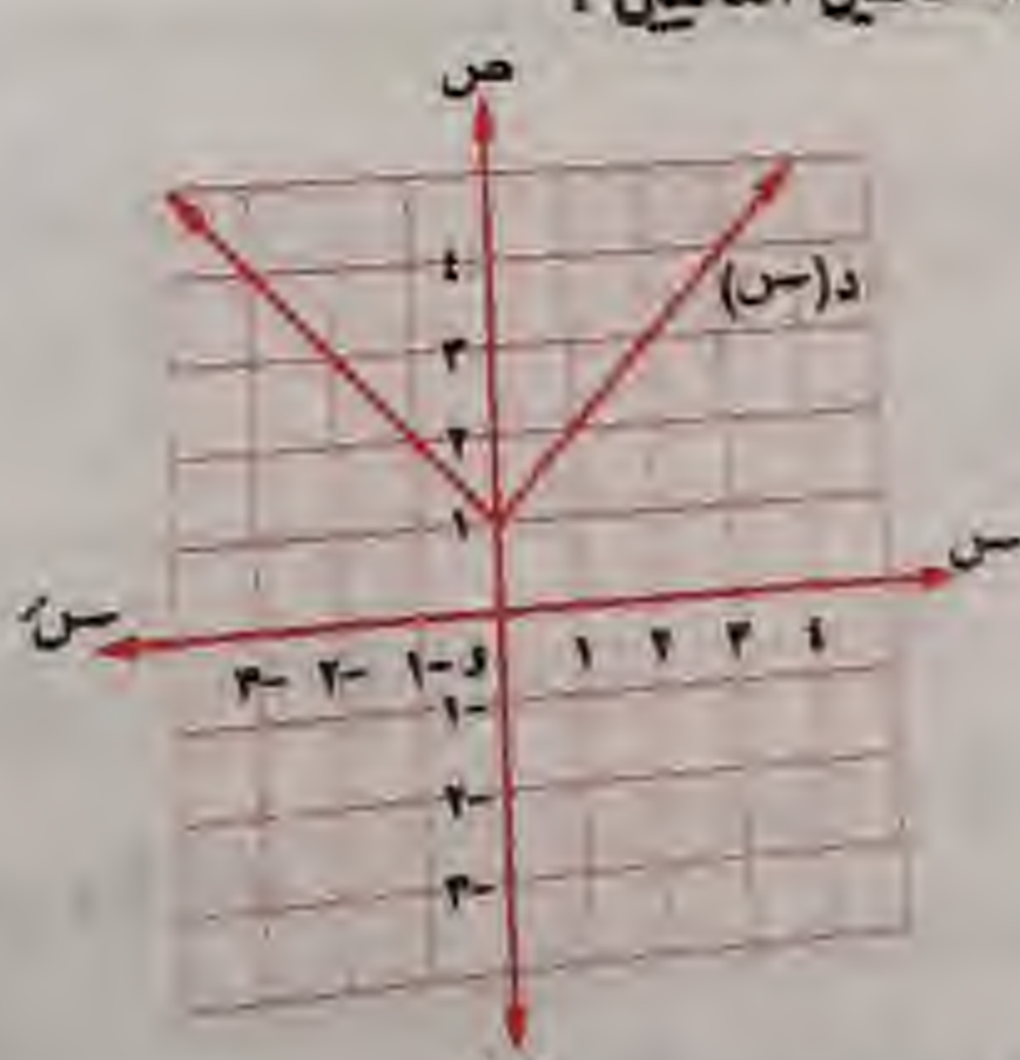
٢٠ عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب حـ

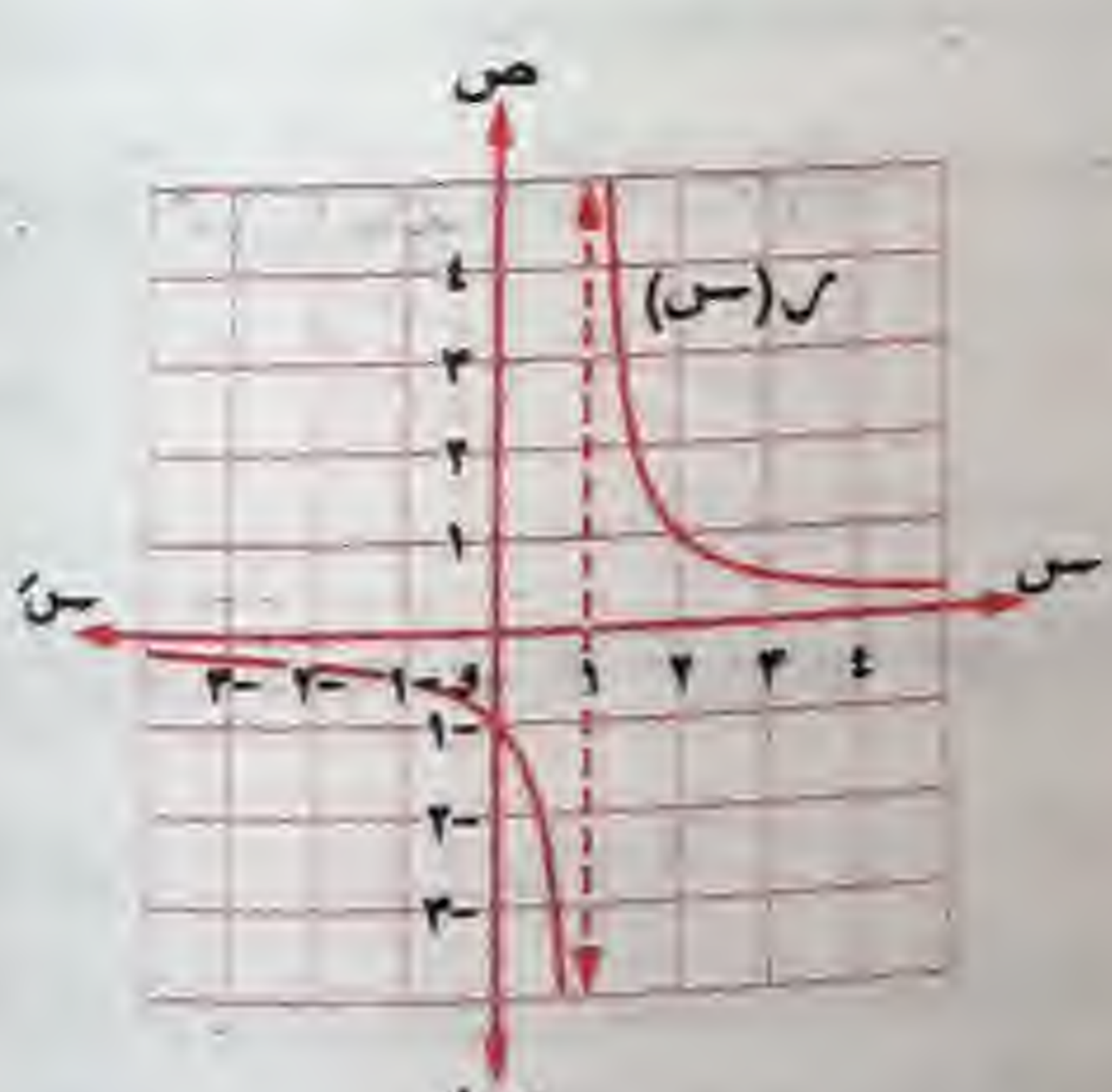
حيث : ق(د أ) = ٤٧° ، أ = ٤ سم ، ب = ٦ سم يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٠ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى

---

٢١ من الشكلين التاليين :





أوجد (د ∘ ر) ومثلها بيانيًا مبينًا المجال وكونها زوجية أم فردية وابحث تماثلها وكونها أحادية أم لا.

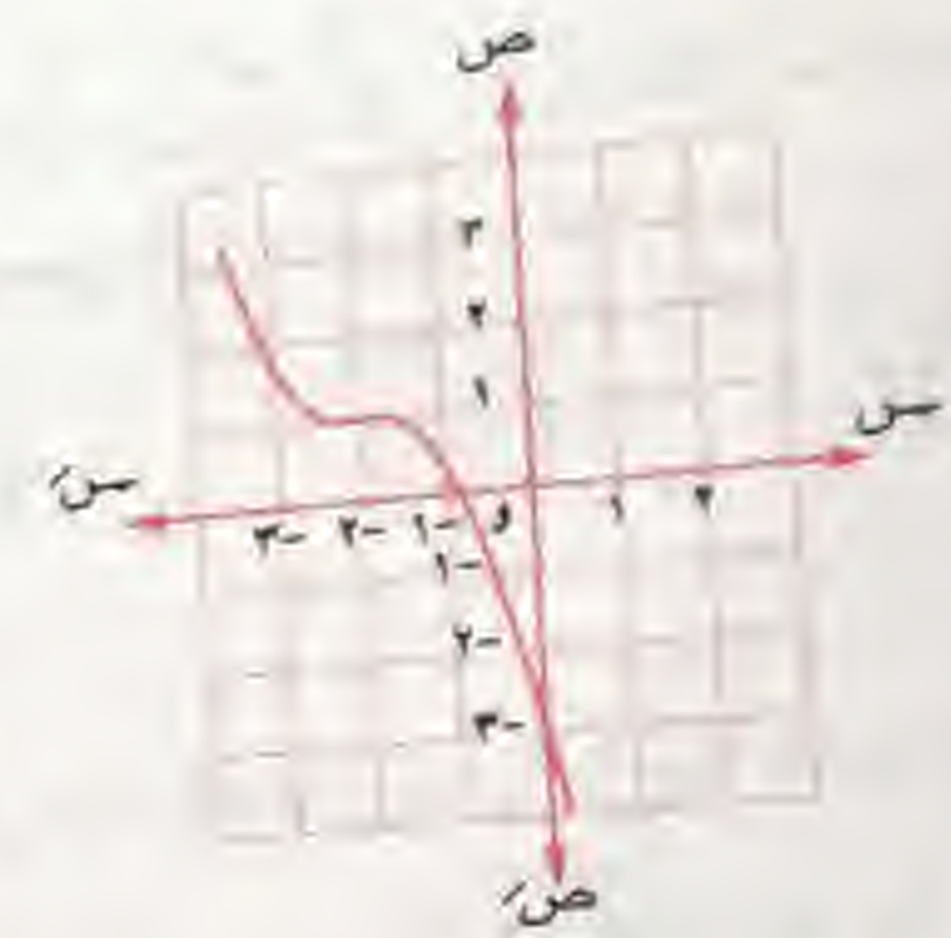
٢٢ إذا كانت : د (س) = ٢ − $(س - ١)^٣$ فإن الشكل الذى يمثل الدالة د هو ....



(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

---

٢٣ $\underset{س \to ١}{نهـا}$ (٢ س − ٥) = ...

(أ) ٢ (ب) −٣ (جـ) ٧ (د) صفر

---

٢٤ مجموعة حل المعادلة : $لو_{س}$ (س + ٦) = ٢ فى ح هى ....

(أ) {٣ ، −٢} (ب) {٣} (جـ) {٣ ، ١} (د) {٦ ، ١}

---

٢٥ الدالة العكسية للدالة د : د (س) = ٨ $س^٣$ − ١ هى $د^{-١}$ (س) = ...

(أ) $\sqrt[٣]{س^٣ - \frac{١}{٨}}$

(ب) $\frac{\sqrt[٣]{س + ١}}{٢}$

(جـ) ٨ $\sqrt[٣]{س}$ − ١

(د) $\frac{\sqrt[٣]{س - ١}}{٢}$

٢٦ Δ ل م ن فيه ق(∠ل) = ٣٠° ، م ن = ٧ سم فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه يساوى ....

(أ) ٧ سم (ب) ٣٫٥ سم (جـ) ١٤ سم (د) $\frac{14}{\sqrt{3}}$

٢٧ مجموعة حل المعادلة : ٢ $س^2$ = ١٦ فى ح هى ....

(أ) {٢} (ب) {-٢} (جـ) {٢ ، -٢} (د) {٤ ،

٢٨ ابحث اتصال الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{س + جا س}{٣ س - ٢ جا س} & ، س > ٠ \\ ٣ س - ١ & ، س \leq ٠ \end{cases}$ عند س

٢٩ الدالة د : د (س) = ٥ - $س^2$ - ٤ س تزايدية عندما س ∈ ....

(أ)]٢ ، ∞[(ب)]-٢ ، ∞[(جـ)]-∞ ، ٢[(د)]-

٣٠ $\lim_{س \to \pi} \frac{جا ٢ س}{٤ س - \pi}$ = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{-1}{2}$ (جـ) $\frac{1}{4}$ (د) $\frac{-1}{4}$

٣١ فى Δ أ ب جـ إذا كان : ٣ جا أ = ٤ جا ب = ٢ جا جـ فإن جيب تمام أصغر زاوية فى Δ أ ب جـ = ...

(أ) $\frac{11}{24}$ (ب) $\frac{43}{48}$ (جـ) $\frac{29}{36}$ (د) $\frac{11}{16}$

٣٢ مجموعة حل المتباينة : $\sqrt{س^2 - ٦ س + ٩}$ + ٢ ≥ ٩ هى ....

(أ) ح -]-٤ ، ١٠[
(ب) ح -]-٨ ، ١٠[
(جـ) [-٤ ، ١٠]
(د) [-٨ ، ١٠]

النمــوذج السادس

امتحان الكتروني ٦

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ إذا كانت : $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ + ٧س + ب}{س^٢ - ٦س + ٨} = \frac{١٥}{٢}$ فإن : ب = ...

(أ) −٤٤ (ب) ٧ (جـ) −٨ (د) ٨

٢ إذا كان : لو$_ب$ س + لو$_ب$ ٣ = لو$_ب$ ٢٧ − ١ فأى مما يأتى يعبر عن س بدلالة ب؟

(أ) س = ٩ ب (ب) س = $\frac{١}{٩}$ ب (جـ) س = $\frac{٩}{ب}$ (د) س = $\frac{١}{٩ب}$

٣ إذا كان : لو$_٢$ (س + ٢) − لو$_٢$ (س − ١) = لو$_٢$ ٤ فإن : س = ...

(أ) −٢ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) −١

٤ ابحث نوع كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

① د$_١$ (س) = س جتا س

② د$_٢$ (س) = $\begin{cases} س^٢ & ، س \geq ٠ \\ |س| & ، س < ٠ \end{cases}$

٥ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ - ١}{س}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) غير موجودة. (د) −١

٦ إذا كان : س$^{\frac{٢}{٣}}$ = ٦٤ فإن : س = ...

(أ) ٥١٢ (ب) ١٦ (جـ) ٤ (د) ٢

٧ مساحة سطح الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب جـ المتساوى الأضلاع الذى طول ضلعه ٩ سم تساوى .... سم^٢

(أ) ٩ π (ب) ٩ $\sqrt{٣}$ π (جـ) ٢٧ π (د) ٨١ π

٨ إذا كانت: د(س) = ٢س − ١ ، ر(س) = $س^٢$

فإن: (ر ∘ د)(−٢) = ...

(أ) −٧ (ب) ١١ (جـ) −٤٩ (د) ٤٩

---

٩ $\underset{هـ \to ٠}{نهـا} \dfrac{(س + هـ)^٧ - س^٧}{هـ}$ = ...

(أ) $س^٧$ (ب) ٧ $س^٦$ (جـ) صفر (د) ١

---

١٠ في Δ أ ب جـ يكون: $أ^٢ + ب^٢ - جـ^٢$ = ...

(أ) جتا أ (ب) أ ب جتا جـ (جـ) جتا جـ (د) ٢ أ ب جتا جـ

---

١١ منحنى ر (س) = | س + ٣ | هو نفس منحنى د (س) = | س |

بإزاحة مقدارها ٣ وحدات في اتجاه ....

(أ) $\overrightarrow{و س}$ (ب) $\overleftarrow{و س}$ (جـ) $\overleftarrow{و ص}$ (د) $\overrightarrow{و ص}$

---

١٢ مجموعة حل المتباينة : | ٣ − ٢ س | ≥ ١ في ح هي ....

(أ) [١ ، ٢] (ب)]١ ، ٢[(جـ) ح −]١ ، ٢[(د) ح − [١ ، ٢]

---

١٣ إذا كانت د : $ح^+$ ⟵ ح حيث د (س) = $\dfrac{١}{س^٢ + ١}$

أوجد : $د^{-١}$ (س) وعين مجال $د^{-١}$ ومداها.

---

١٤ الشكل المقابل يوضح منحنيي الدالتين د ، ر

فإن : (ر ∘ د) (١) = ...



(أ) −٨
(ب) −٢
(جـ) ٤
(د) ٥

---

١٥ نقطة تماثل الدالة د : د (س) = $\dfrac{٢س - ١}{س}$ هي ....

(أ) (١ ، ٢) (ب) (٢ ، ١) (جـ) (٢ ، ٢) (د) (٠ ، ٢)

١٦ نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ $\frac{جا ٢س^٢ + ظا^٢ ٢س}{٣س^٢}$ = ...

(أ) $\frac{٨}{٣}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) ٢ (د) ٣

١٧ إذا كان : لو (٢س + ص) = $\frac{١}{٢}$ (لو س + لو ص) + لو ٣ حيث س ≠ ص

وكانت : ص = ك س فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) −٤

١٨ نهـا$_{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}}$ (٢س − جتا س) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) π (د) $\frac{\pi}{٢}$

١٩ الدالة الزوجية المتصلة عند النقطة (أ ، ب) تكون متصلة أيضًا عند النقطة ....

(أ) (أ ، ب) (ب) (−أ ، ب) (جـ) (أ ، −ب) (د) (−أ ، −ب)

٢٠ مدى الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٠ & ، س \geq ٠ \\ ١ & ، س < ٠ \end{cases}$ هو ....

(أ) {١} (ب) {٠} (جـ) ح (د) {٠ ، ١}

٢١ طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث س ص ع الذى فيه :

سَ = ٣ سم ، صَ = ٥ سم ، عَ = ٧ سم يساوى .... سم.

(أ) $\frac{٧}{٣}\sqrt{٣}$ (ب) $٢\sqrt{٣}$ (جـ) ٤,٤ (د) $\frac{١٤}{٣}\sqrt{٣}$

٢٢ فى الشكل المقابل :



إذا كان محيط Δ أ ب جـ = ٤٢ سم

، الدائرة م تمس أضلاع المثلث من الداخل

فإن : ق (∠ أ) = ...

(أ) ٥٣° ٧َ (ب) ٦٧° ٢٣َ (جـ) ٣٦° ٥٣َ (د) ٢٢° ٣٧َ

النمــوذج السابع

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ إذا كانت : د (س) = $(١٠)^{٢س}$ ، ى (س) = لو ($\sqrt[٢]{س}$) فإن : (ى ∘ د) (س) = ...

(أ) $١٠^{٢س}$ (ب) لو $\sqrt[٢]{س}$ (جـ) $١٠^{٢س}$ لو $\sqrt[٢]{س}$ (د) س

٢ فى Δ أ ب جـ يكون : $\frac{أ}{أ + ب} = \frac{جا أ}{.........}$

(أ) جا ب (ب) جا جـ (جـ) جا أ + جا ب (د) جا أ + جا جـ

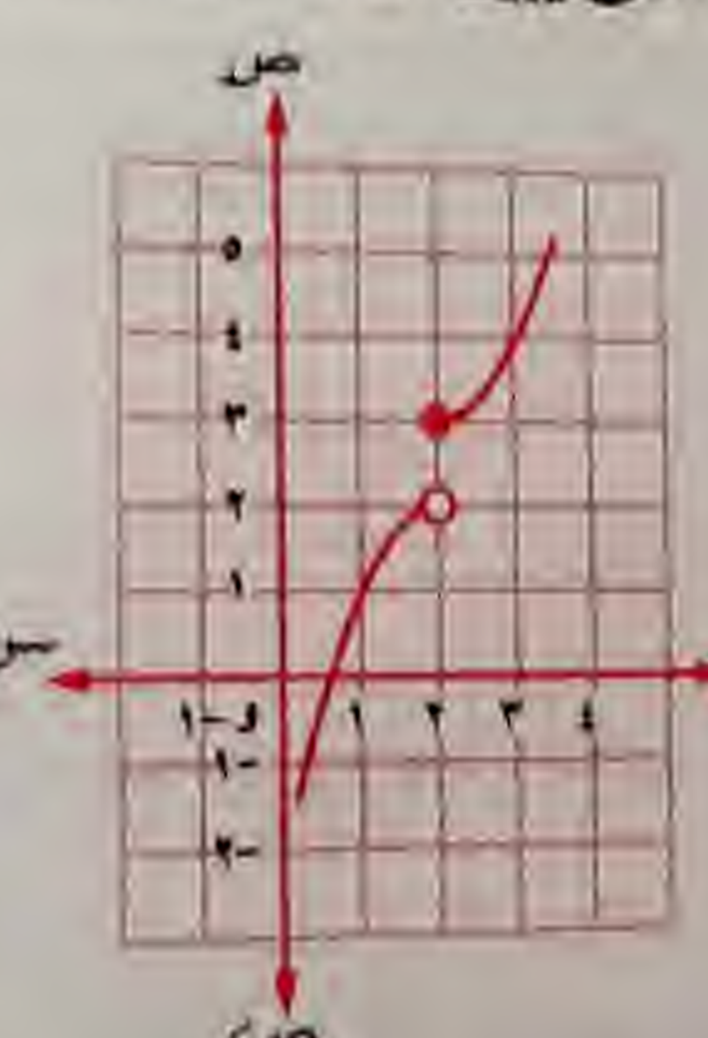
٣ فى Δ أ ب جـ إذا كان : جا أ = ٢ جا جـ ، ب جـ = ٦ سم فإن : أ ب = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٦

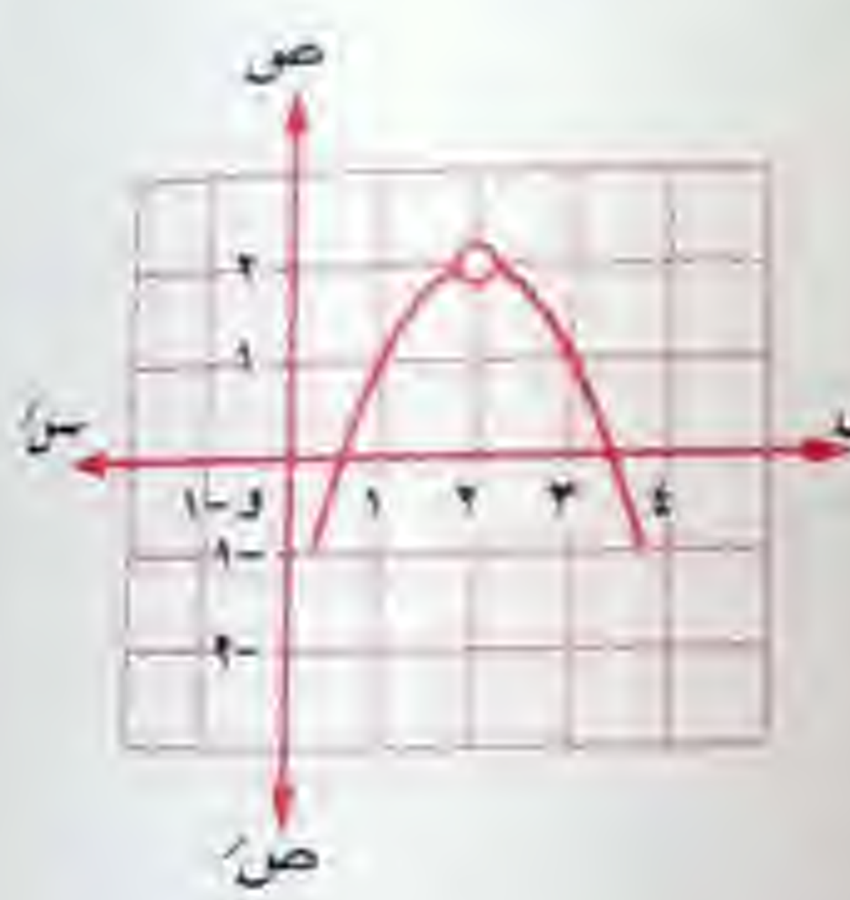
٤ أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة : $س^{\frac{٤}{٣}} - ١٠ س^{\frac{٢}{٣}} + ٩ =$ صفر

٥ الشكل الذى يبين الدالة المتصلة عندما س = ٢ هو الشكل ......

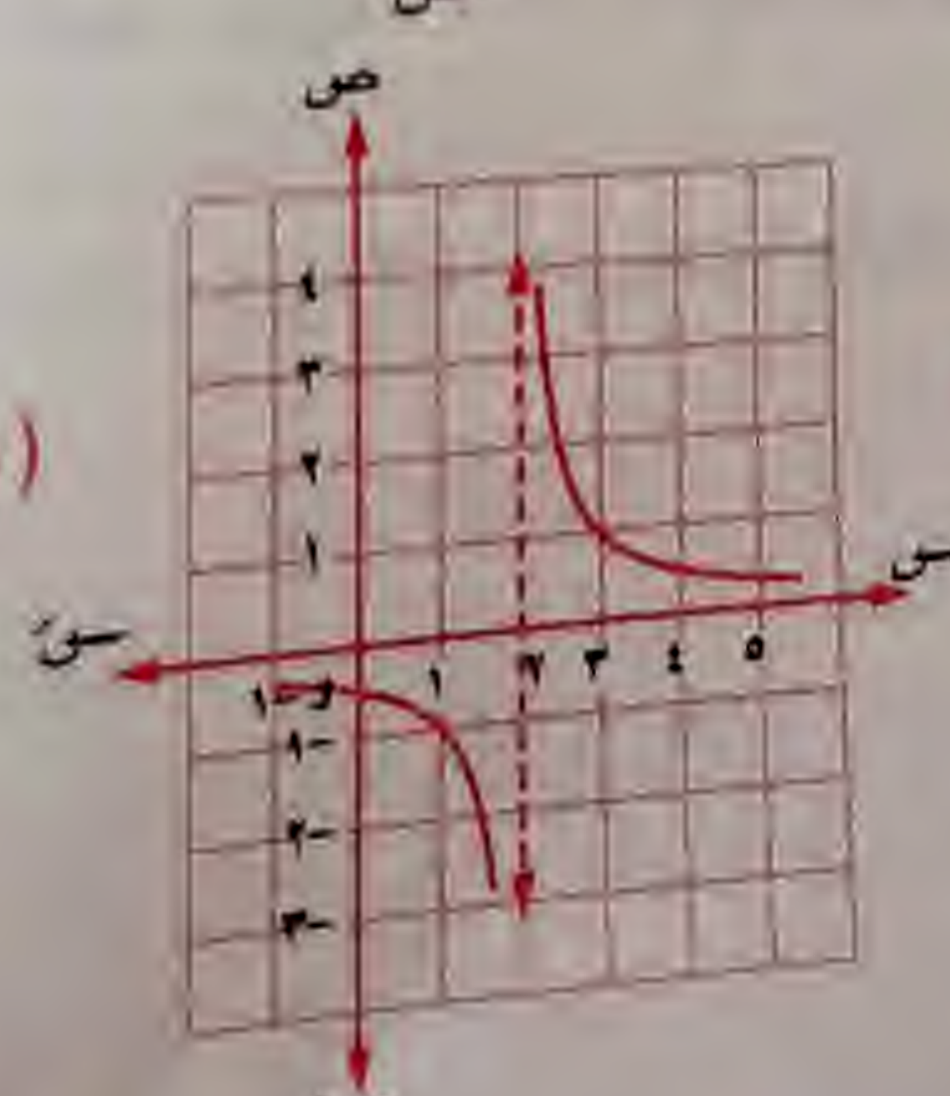
(أ)



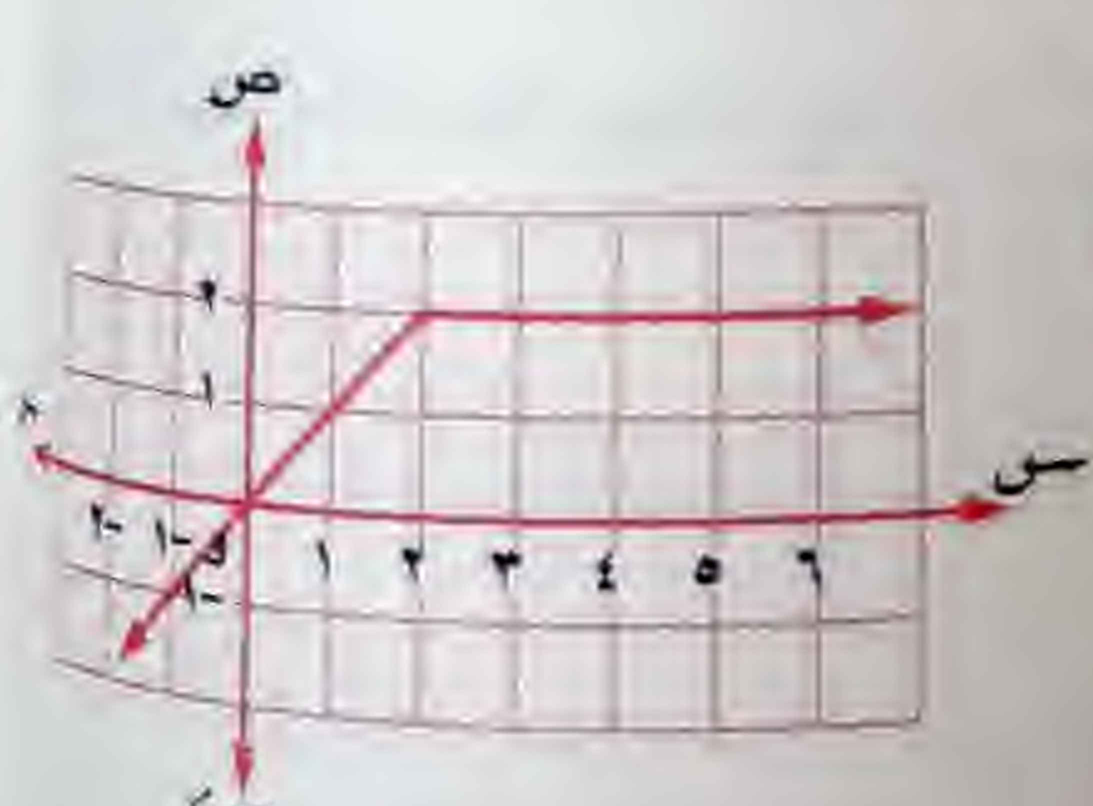
(ب)



(جـ)



(د)



٦ مجال الدالة د : د (...

(أ)]-٢ ، ∞[...

٧ فى Δ أ ب جـ يكو...

(أ) جا (٩٠° - ...

(جـ) جتا ب

٨ عدد الحلول الممك...

ى (د س) = ٣٠ ...

(أ) ١

٩ نهــا (س ← ١) ...

(أ) $\frac{١}{١٦}$

١٠ إذا كان طول نص...

فإن : $\frac{٢ أ}{جا أ} =$ ...

(أ) ١٢

١١ مجموعة حل ال...

(أ) {٢٥ ، ...

(جـ) { $\frac{١}{٢٥}$ ، ...

١٢ إذا كانت : د ...

(أ) ٥٠

١٣ لو٢ $\frac{٣}{٢٥}$ + ...

(أ) ٤

٦ مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{س + ٢}$ + $\sqrt{٥ - س}$ هو ....

(أ)]-٢ ، ∞[(ب)]-٢ ، ٥] (جـ) [-٢ ، ٥] (د)]٣ ، ∞[

٧ فى Δ أ ب حـ يكون : $ب^٢ + حـ^٢ - أ^٢$ = ٢ ب حـ × ....

(أ) حا (٩٠° - ب) (ب) حا (٩٠° - أ)

(جـ) حتا ب (د) حتا (٩٠° - ب)

٨ عدد الحلول الممكنة للمثلث س ص ع الذى فيه :

ق (∠ س) = ٣٠° ، س = ٦ سم ، ص = ٩ سم يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٠ (د) عدد لا نهائى.

٩ $\lim_{س \to ١} \frac{٤ - \sqrt{س + ١٥}}{١ - س^٢}$ = ...

(أ) $\frac{١}{١٦}$ (ب) ١٦ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) ٤

١٠ إذا كان طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ يساوى ٦ سم

فإن : $\frac{٢ أ}{حا أ}$ = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ٦ (جـ) ١٨ (د) ٢٤

١١ مجموعة حل المعادلة : $(لو_٥ ص)^٢ - ٧ لو_٥ ص + ١٢ = ٠$ فى ح هى ....

(أ) {٢٥ ، ١٢٥} (ب) {٢٥ ، ٦٢٥}

(جـ) {$\frac{١}{٢٥}$ ، ٦٢٥} (د) {١٢٥ ، ٦٢٥}

١٢ إذا كانت : د (س) = $\frac{س - ٥}{|س - ٥|}$ فإن : $[د (٥^+)]^٢ + [د (٥^-)]^٢$ = ...

(أ) ٥٠ (ب) صفر (جـ) ٤ (د) ٢

١٣ $لو_٢ \frac{٣}{٢٥} + ٥ لو_٢ ٥ + لو_٢ ٢٧ - لو_٢ \frac{١٢٥}{١٢} - لو_٢ ٢٤٣$ = ...

(أ) ٤ (ب) $لو_٢ ٩$ (جـ) لو ٢٥ (د) لو $\frac{١}{١٠٠}$

١٤ إذا كانت : نهـــا [illegible] = [illegible] فإن : [illegible]

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ٤ (د) ± ٢

---

١٥ إذا كانت د : د(س) = $س^٣$ + ١ فأي العبارات الآتية غير صحيحة ؟

(أ) د دالة أحادية.

(ب) د دالة فردية.

(جـ) د تزايدية على مجالها.

(د) منحنى الدالة د يقطع محور السينات عند س = −١

---

١٦ س ص ع مثلث فيه : سَ = ٥ سم ، صَ = ٧ سم ، ق(∠ ع) = ٦٥°

احسب : عَ ثم أوجد : محيط Δ س ص ع

---

١٧ إذا كان : $لو_٢$ س = ٣ فإن : $لو_س$ ٢ = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) ٨ (د) ٩

---

١٨ إذا كانت : $د^{-١}$ هى الدالة العكسية للدالة د فإن : ....

(أ) مجال $د^{-١}$ = مجال د

(ب) مجال $د^{-١}$ = مدى د

(جـ) مدى $د^{-١}$ = مدى د

(د) مدى $د^{-١}$ = مجال $د^{-١}$

---

١٩ $\lim_{ص \to ٢} \frac{ص^٥ - ٣٢}{ص - ٢}$ = ...

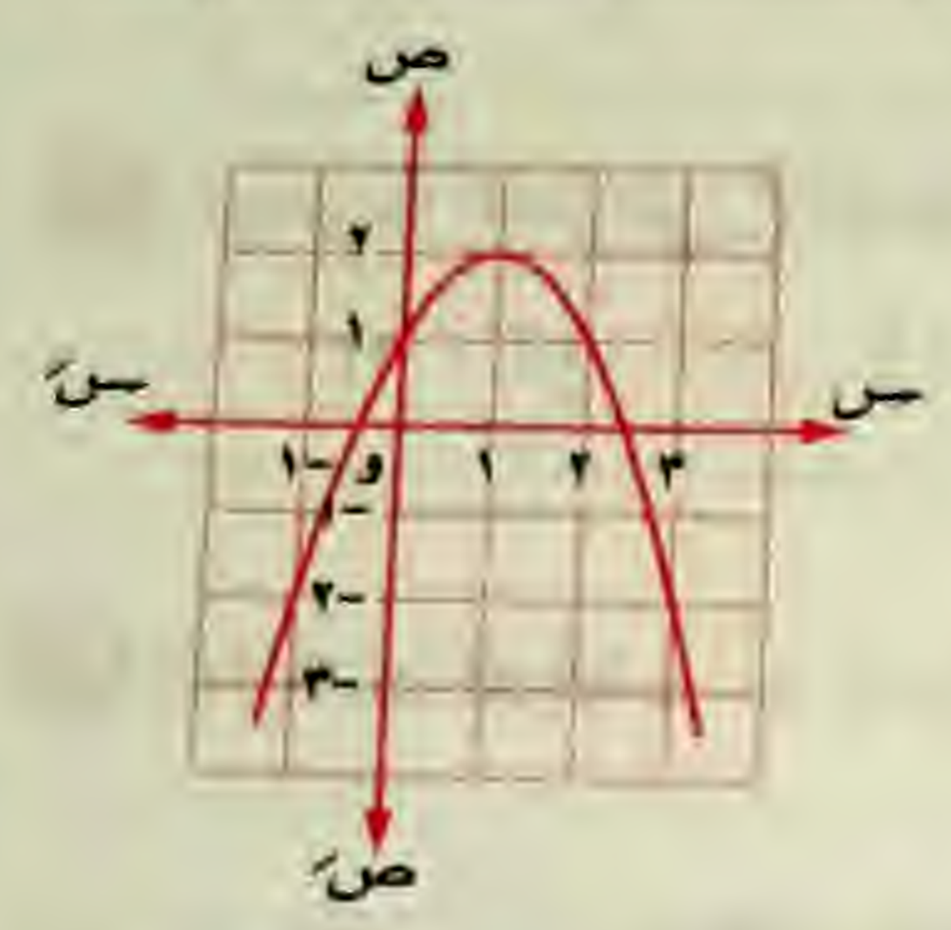
(أ) ٣١ $ص^٤$ (ب) ٣٢ × $٢^٤$ (جـ) ٦٤ (د) ٥ × $٢^٤$

٢٠ ابحث وجود نهاية للدالة د حيث :

د (س) = { $\frac{\text{طا ٢ س}}{\text{حا س}}$ عندما س > ٠ ، $\frac{\text{٥ س + ٦}}{\text{س + ٣}}$ عندما س < ٠ } عندما س تؤول إلى الصفر.

---

٢١ قاعدة الدالة التى تمثل الشكل المقابل هى



د (س) = ...

(أ) (س − ٢)^{٢} + ١

(ب) − (س − ٢)^{٢} + ١

(جـ) − (س − ١)^{٢} + ٢

(د) (−س + ١)^{٢} + ٢

---

٢٢ مجموعة حل المعادلة : | ٢ س − ١ | = ٥ فى ح هى ....

(أ) {٣} (ب) {−٢} (جـ) ∅ (د) {٣ ، −٢}

---

٢٣ إذا كانت : د (س) = { س − ٤ ، س ≥ ٤ ؛ ر (س) ، س < ٤ } متماثلة حول المستقيم س = ٤

فإن : الدالة ر تكون ....

(أ) تزايدية. (ب) تناقصية. (جـ) زوجية. (د) ثابتة.

---

٢٤ إذا كان د (س) = س^{٢} − ٣ ، ر (س) = $\sqrt{\text{س − ٢}}$ أوجد : (د ∘ ر) (س)

فى أبسط صورة محددًا المجال ثم أوجد : (د ∘ ر) (٣)

---

٢٥ نهـا$_{\text{س} \to ٠}$ $\frac{\text{٣ س + ٢ س}^{-١}}{\text{س + ٤ س}^{-١}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ٢ (د) ٤

---

٢٦ إذا كان : أ ∈]٠ ، ٩] فإن : لو$_{٣}$ أ ∈ ....

(أ)]−∞ ، ٢] (ب)]٢ ، ٨١] (جـ) [٢ ، ∞[(د)]−∞ ، ٠[

١٧ [illegible] = ...

(أ) ٢ (ب) ١ (ج) صفر (د) ∞

١٨ مجموعة الحل في ح للمعادلة : $\sqrt{س^2 - ٦س + ٩} + ٢س = ٩$ تساوي ......

(أ) {٤ ، ٦} (ب) {٦} (ج) {٤} (د) ∅

١٩ مجموعة الحل في ح للمتباينة : |س − ٢| ≥ ٢ هي ......

(أ)]١ ، ٥[(ب) [١ ، ٥] (ج) ح −]١ ، ٥[(د) ح − [١ ، ٥]

٢٠ إذا كانت الدالة د : د(س) = $\begin{cases} \frac{س^2 - ٤}{س - ٢} & ، س \neq ٢ \\ ك & ، س = ٢ \end{cases}$

متصلة عند س = ٢ فإن : ك = ...

(أ) صفر (ب) ٨ (ج) ٢ (د) ٤

٢١ إذا كانت : $ب^{س} - ٢ب^{-س} = ١$ حيث ب > ١ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) لو ٢ (ج) $لو_{٢}$ ب (د) $لو_{ب}$ ٢

٢٢ إذا كان : أ ب حـ مثلث مساحته ٢٤ سم^2 ، وطول نصف قطر الدائرة الخارجة عنه ٥ سم

فإن : جا أ جا ب جا (أ + ب) = ...

(أ) $\frac{٣}{٢٥}$ (ب) $\frac{٦}{٢٥}$ (ج) $\frac{٩}{٢٥}$ (د) $\frac{١٢}{٢٥}$

النمـوذج الثامن

امتحان الكتروني ٨

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ لو_أ س ÷ لو_أب س = ...

(أ) ١ - لو_أ ب　(ب) ١ + لو_أ ب　(ج) ١ - لو_ب أ　(د) ١ + لو_ب أ

---

٢ إذا كانت : د (س) = { ٢ س^{٢} + أ س - ٢ ، س < ٢ ؛ ٢ س + ب ، س > ٢ }

وكان : نهـــا (س ← ٢) د (س) = ١٦ فإن : أ + ب = ...

(أ) ٤　(ب) ١٠　(ج) -١٣　(د) ٧

---

٣ طول قطر الدائرة الداخلة للمثلث المتساوى الأضلاع الذى طول ضلعه ٤ $\sqrt{٣}$ سم يساوى .... سم.

(أ) ٢ $\sqrt{٣}$　(ب) ٤ $\sqrt{٣}$　(ج) ٤　(د) ٨

---

٤ قيمة : لو_٣ ٥٤ - لو_٣ $\frac{٨}{١٥}$ + لو_٣ $\frac{٤}{٥}$ = ...

(أ) لو_٣　(ب) ٣　(ج) ٢٧　(د) ٤

---

٥ إذا كانت : ص = د (س) منحنى دالة حقيقية فإن صورته بإزاحة قدرها ٢ وحدة جهة اليمين هى ر (س) = ...

(أ) د (س - ٢)　(ب) د (س + ٢)　(ج) د (س) + ٢　(د) د (س) - ٢

---

٦ عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب ج حيث : ق (∠ أ) = ٦٠° ، بَ = ٣ سم ، أَ = ٥ سم هو ....

(أ) ١　(ب) ٢

(ج) لا يوجد مثلث.　(د) عدد لا نهائى من المثلثات.

---

٧ نهـــا (س ← صفر) $\frac{س^{٢} + س}{س}$ = ...

(أ) صفر　(ب) ١　(ج) ٢　(د) ٣

٨ إذا كان: د(س) = ٥^س فأوجد في ح مجموعة حل المعادلة: د(س) + د(س − ١) = ١٥٠

٩ في Δ أ ب جـ يكون: جتا(أ + ب) = ...

(أ) $\frac{أ^٢ + ب^٢ - جـ^٢}{٢ أ ب}$ (ب) $\frac{أ^٢ + جـ^٢ - ب^٢}{٢ أ جـ}$ (جـ) $\frac{ب^٢ + جـ^٢ - أ^٢}{٢ ب جـ}$ (د) $\frac{جـ^٢ - أ^٢ - ب^٢}{٢ أ ب}$

١٠ إذا كان: ١ < س < ٢ فإن: $\sqrt{س^٢ - ٢س + ١} + \sqrt{س^٢ - ٤س + ٤}$ = ...

(أ) ٢س − ٣ (ب) ٢س − ١ (جـ) ١ (د) ٣

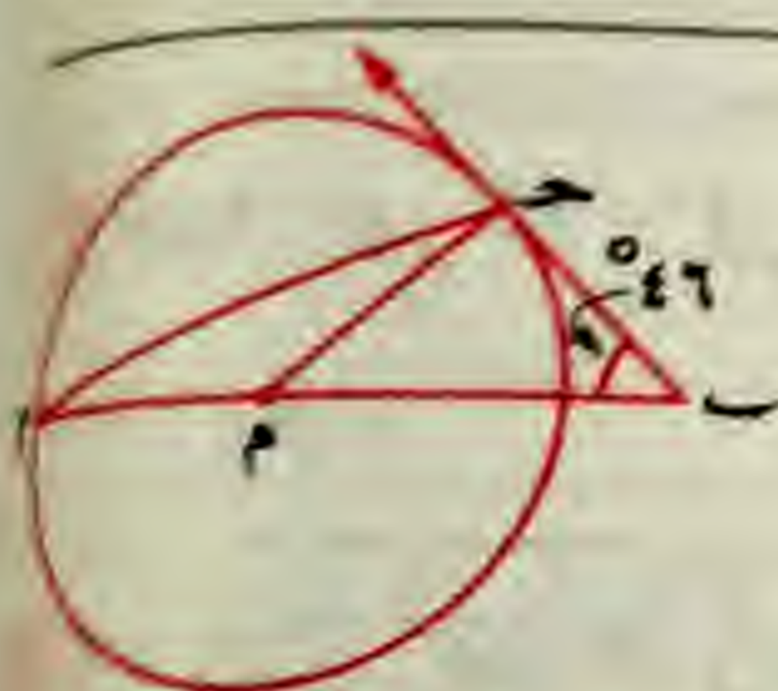
١١ $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٧س + ١٢}{س - ٣}$ = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) −٢ (د) ٣

١٢ مجال الدالة د : د(س) = $\sqrt{\frac{س - ٥}{س + ٤}}$ = ...

(أ) $[٥ ، \infty[$ (ب) $[-٤ ، ٥]$ (جـ) $ح - [-٤ ، ٥[$ (د) $ح -]-٤ ، ٥]$

١٣ في الشكل المقابل:



إذا كان: أ جـ = ٢٠ سم

فإن محيط Δ أ جـ م = ... سم.

(أ) ٤١٫٥ (ب) ٤٣٫٥ (جـ) ٤٥ (د) ٤٧٫٥

١٤ $٣^{لو_٣ ٤} + لو_٥ ٢٥$ = ...

(أ) ٦ (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) ١

١٥ مجال الدالة د : د(س) = $\sqrt{٩ - س}$ هو ......

(أ) ح (ب) ح − {٩} (جـ) $]-\infty ، ٩]$ (د) $[٩ ، \infty[$

١٦ $\lim_{س \to ٥} \frac{س^٢ - ٥س}{\sqrt{س + ٤} - ٣}$ = ...

(أ) ٣٠ (ب) ٦ (جـ) ٥ (د) ٢٥

١٧ أ ب جـ مثلث فيه : ب جـ = ١٩ سم ، ق(∠أ) = ١١٢° ، ق(∠جـ) = ٣٢°

أوجد مساحة Δ أ ب جـ لأقرب سم² وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه لأقرب سم.

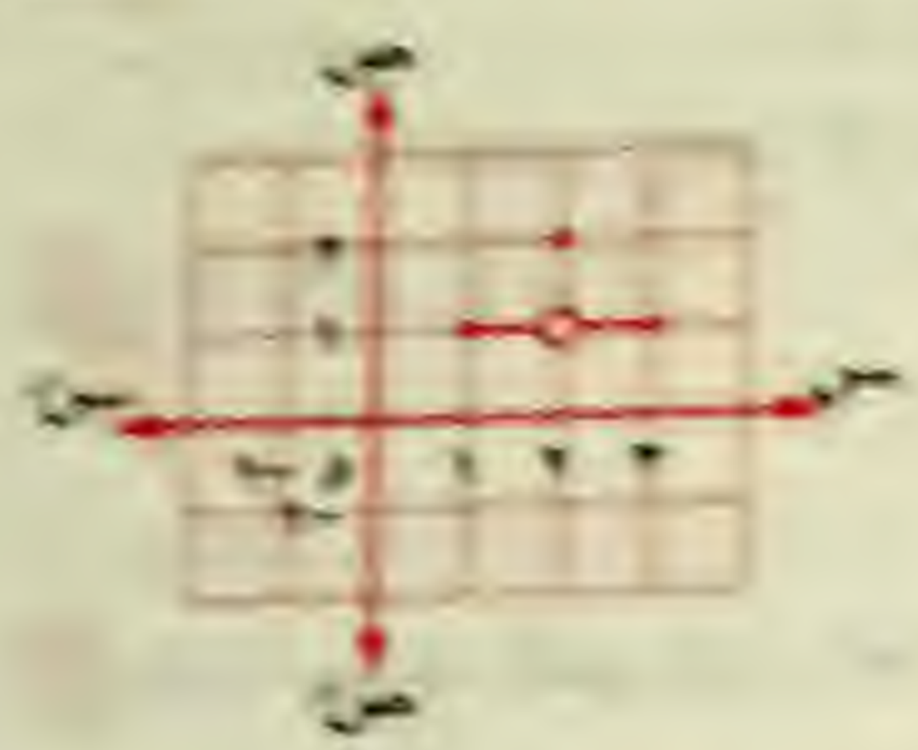
---

١٨ مجال الدالة د : د (س) = لو$_{١ - س}$ س هو ....

(أ) س > ٠ (ب) س < ١ (جـ) ٠ < س < ١ (د) ٠ ≤ س ≤ ١

---

١٩ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د



فأى من الجمل الآتية صحيح ؟

(أ) د متصلة على الفترة [١ ، ٢]

(ب) د متصلة على الفترة]١ ، ٢[

(جـ) نهـا$_{س \leftarrow ٢}$ د (س) موجودة حيث ٢ ∈ [١ ، ٢]

(د) نهـا$_{س \leftarrow ٢}$ د (س) موجودة حيث ٢ ∈]١ ، ٢[

---

٢٠ نهـا$_{س \leftarrow \infty}$ $\left(\frac{٣ س^٢ + ٢ س + ١}{س^٢ - ٣ س + ٢} \right)^٤$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢٧ (د) ٨١

---

٢١ إذا كانت د : ح ← ح حيث د (س) = ٤ س − ٢ ، ى : [−٢ ، ٣] ← ح

حيث ى (س) = ٤ − ٣ س ارسم الدالة (د + ى) محدداً مجالها ومداها وابحث اطرادها.

---

٢٢ أى مما يأتى لا يساوى ($\sqrt[٥]{س^٤}$) ؟

(أ) $\left(\sqrt[٥]{س} \right)^٤$ (ب) $\sqrt[٤]{س^٥}$ (جـ) س$^{\frac{٤}{٥}}$ (د) $\left(س^{\frac{١}{٥}}\right)^٤$

---

٢٣ إذا كانت الدالة د دالة زوجية فى الفترة [جـ ، ء] فإن : جـ + ء = ...

(أ) ٢ جـ (ب) ٢ ء (جـ) جـ − ء (د) صفر

---

٢٤ أوجد قيمة أ التى تجعل الدالة د متصلة عند أ حيث د (س) = $\begin{cases} ٢ - س^٢ & ، س \le أ \\ س & ، س > أ \end{cases}$

٢٥ إذا كانت: د(س) = (س − ٥)(س + ٥) ، ص(س) = س − ٥

فإن: $\frac{دص}{دس}$(٥) = ...

(أ) ١٠ (ب) ١ (جـ) $\frac{دص}{دس}$(−٥) (د) غير معرفة.

---

٢٦ نهـــا (س ← ٨) $\frac{جا + \sqrt[3]{س}}{\sqrt[3]{س}}$ = ...

(أ) ٨ (ب) −٢ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) ٢

---

٢٧ إذا كان: $\left(\frac{١}{٢}\right)^{أ^{٢} - أ - ٢}$ = ١ حيث أ > صفر فإن: أ = ...

(أ) ١ (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) ٣

---

٢٨ Δ أ ب حـ الذى فيه: ق(∠حـ) = ١١٦° ، حـ = ١٢ سم ، أ = ١٠ سم

يكون: ب = ... سم (لأقرب جزء من عشرة).

(أ) ٢,٦ (ب) ٣,٦ (جـ) ٤,٦ (د) ٥,٦

---

٢٩ نهـــا (س ← .) $\frac{١ - جتا س + ظا ٥ س}{١ - جتا س - ظا س}$ = ...

(أ) −٥ (ب) ٥ (جـ) صفر (د) غير معرفة.

---

٣٠ Δ أ ب حـ فيه: جتا ب = $\frac{حـ}{٢ أ}$ فإن: Δ أ ب حـ يكون ....

(أ) متساوى الأضلاع. (ب) متساوى الساقين.

(جـ) مختلف الأضلاع. (د) غير ذلك.

---

٣١ مجموعة حل المتباينة: $\frac{١}{|٢ س - ٣|}$ > ٢ فى ح هى ....

(أ) $[\frac{٥}{٤} ، \frac{٧}{٤}] - \{\frac{٣}{٢}\}$ (ب) $]\frac{٥}{٤} ، \frac{٧}{٤}[$

(جـ) $]\frac{٥}{٤} ، \frac{٧}{٤}[- \{\frac{٣}{٢}\}$ (د) $[\frac{٥}{٤} ، \frac{٧}{٤}]$

---

٣٢ الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد التالية هى ....

(أ) $د_{١}$(س) = س + ٥ (ب) $د_{٢}$(س) = $س^{٢}$

(جـ) $د_{٣}$(س) = |س − ٢| (د) $د_{٤}$(س) = −٣

النمـوذج التاسع

امتحان إلكتروني ٩

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ مجموعة حل المعادلة : $لو_{(س + ٢)} ١٢٥ = ٣$ فى ح هى ....

(أ) {٥}　　(ب) {٣}　　(جـ) ∅　　(د) {٢}

---

٢ Δ ل م ن الذى فيه : ق (∠ ل) = ٣٠° ، مَ = ٩ سم يكون له حلان عندما

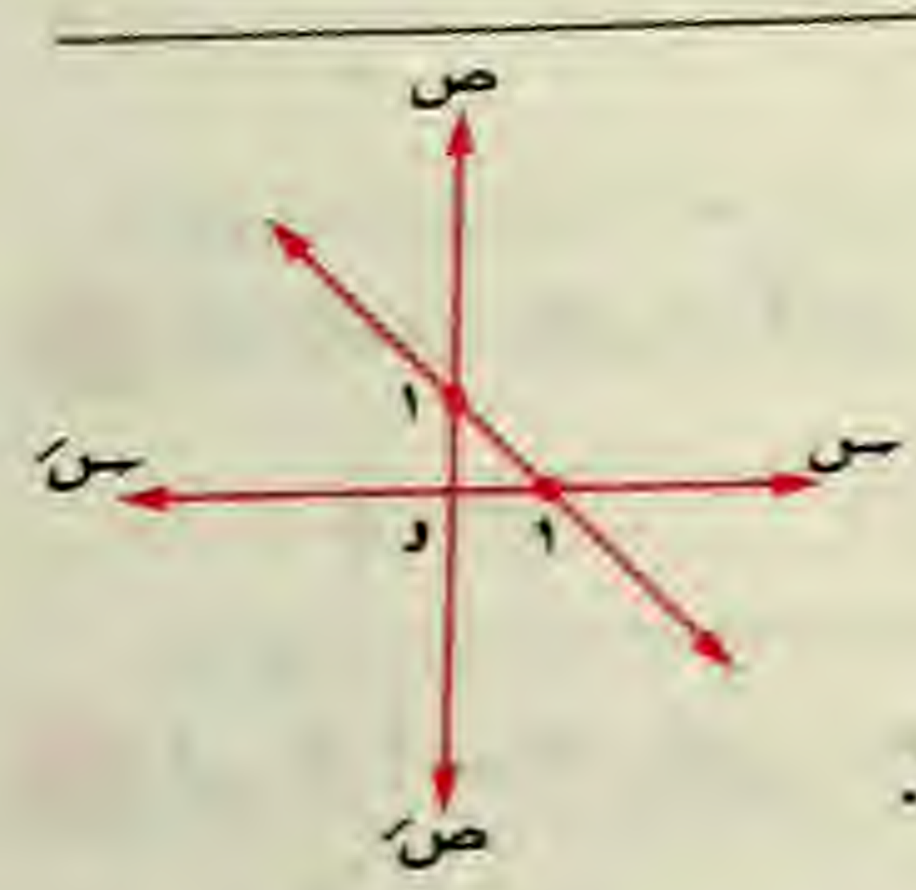
لَ = ... سم.

(أ) ٦　　(ب) ١٠　　(جـ) ١١　　(د) ٢

---

٣ إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن : $\lim_{س \to ٢}$ | د (س) | = ...



(أ) −١　　(ب) صفر

(جـ) ١　　(د) غير موجودة.

---

٤ إذا كانت : د (س) = ٢ + $\sqrt{س - ١}$ أوجد الدالة العكسية.

---

٥ إذا كانت د : ح ← ح حيث د (س + ١) − د (س) = س − ١

فإن : د (١٠) − د (٩) = ...

(أ) ١　　(ب) ٩　　(جـ) ٨　　(د) ١٨

---

٦ $\lim_{س \to ٠} \frac{٢ س}{جا ٢ س}$ = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$　　(ب) $\frac{٣}{٢}$　　(جـ) ٦　　(د) ليس لها وجود.

٧ صورة المنحنى : ص = |س| − ٥ بالانتقال ٣ وحدات في اتجاه و س ، ٥ وحدات في اتجاه و ص هي

(أ) ص = |س − ٣| + ٨
(ب) ص = |س − ٣|
(جـ) ص = |س − ٣| − ١٠
(د) ص = |س + ٣|

---

٨ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} س^{٢} + أ س - ٢ & ، س > ٢ \\ ٤ & ، س = ٢ \\ ٥ أ + ب س & ، س < ٢ \end{cases}$ متصلة عند س = ٢

أوجد قيمة كل من : أ ، ب

---

٩ $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{س + ٥} - \sqrt{٥}}{\sqrt{س} - \sqrt{٥}}$ = ...

(أ) ١
(ب) −١
(جـ) ∞
(د) − ∞

---

١٠ إذا كانت : ص = $\sqrt[٥]{س}$ فإن الدالة العكسية لها ص = ...

(أ) $\frac{١}{٥}$ س^٥
(ب) س^٥
(جـ) س^٥ − ١
(د) ٥ س^٥

---

١١ في Δ أ ب حـ يكون : حـ (أ جتا ب + ب جتا أ) = ...

(أ) أ^٢
(ب) ب^٢
(جـ) حـ^٢
(د) ٢ حـ^٢

---

١٢ أ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه : أ ب = ٩ سم ، ب حـ = ١٣ سم ، أ حـ = ٢٠ سم

فإن : طول $\overline{ب ء}$ = ... سم.

(أ) ٥
(ب) ١٠
(جـ) ٢,٥
(د) ٤

---

١٣ إذا كان : د (س) = س − ١ ، ر (س) = $\sqrt{س}$ فإن مجال (ر ∘ د) هو ....

(أ) ح
(ب)]− ∞ ، ١]
(جـ) [١ ، ∞[
(د) ح − {١}

---

١٤ $\lim_{س \to ٤} \frac{س^{٣} \sqrt{س} - ١٢٨}{س - ٤}$ = ...

(أ) ١١٢
(ب) ٩٦
(جـ) ٨٤
(د) ٧٢

١٥ إذا كانت : د (س) = $\frac{\sqrt{س^{٢} - ٢س + ١}}{س - ١}$ فإن مدى الدالة د هو ....

(أ) {١} (ب) ح (جـ)]-١ ، ١[(د) {-١ ، ١}

١٦ ارسم منحنى الدالة د : د (س) = $\sqrt{س^{٢} - ٤س + ٤}$ وعين مداها وابحث اطرادها.

١٧ مجموعة الحل فى ح للمعادلة :

$لو_{٢} س - \frac{٣}{لو_{٢} س} = ٢$ تساوى ....

(أ) {-١ ، ٣} (ب) {٨ ، $\frac{١}{٢}$} (جـ) {٨ ، ٢} (د) {$\frac{١}{٨}$ ، ٢}

١٨ $\lim_{هـ \to صفر} \frac{(س + هـ)^{٩} - س^{٩}}{هـ}$ = ...

(أ) $س^{٩}$ (ب) ٩ $س^{٨}$ (جـ) صفر (د) غير موجودة.

١٩ إذا كان : أ > ب > جـ > ١ فإن : $لو_{جـ} لو_{ب} لو_{أ} أ^{ب^{جـ}}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) أ ب جـ

٢٠ إذا كان أ ب جـ مثلث فيه : أ = ٤ سم ، ب = ٤ $\sqrt{٣}$ سم ، جـ = ٨ سم

فإن جيب قياس أصغر زاوية فيه يساوى ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (جـ) ١ (د) صفر

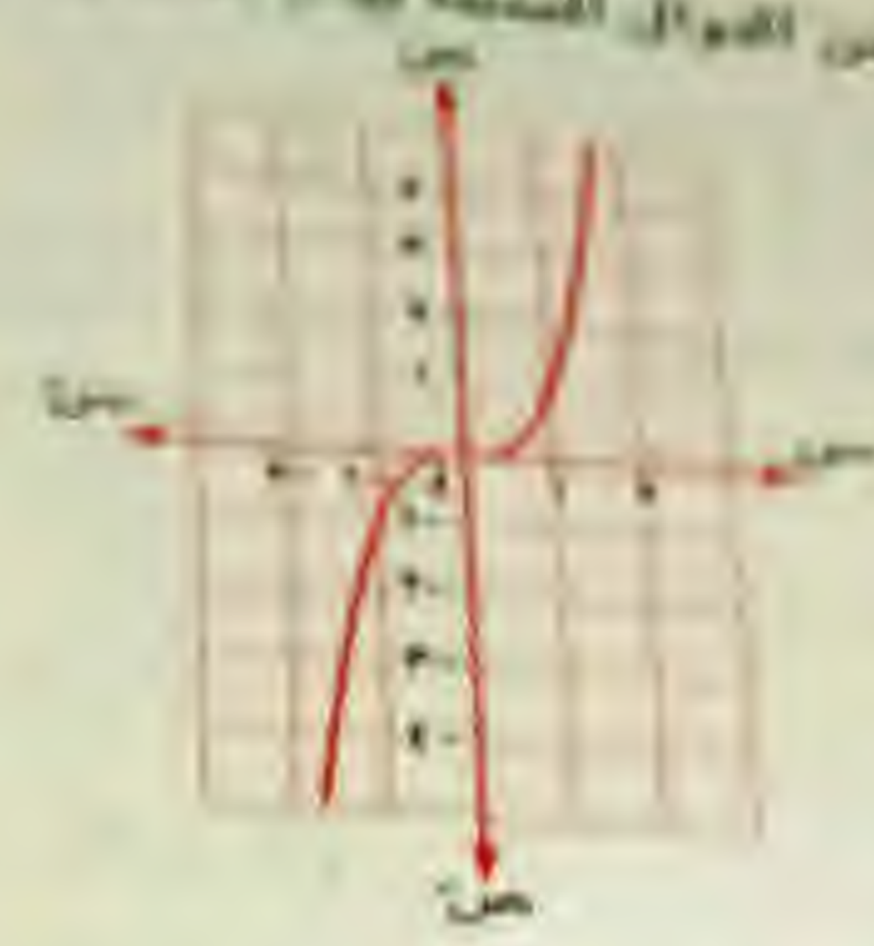
٢١ حل المثلث أ ب جـ الحاد الزوايا الذى فيه : أ = ٢١ سم ، ب = ٢٥ سم

وطول قطر الدائرة المارة برؤوسه ٢٨ سم

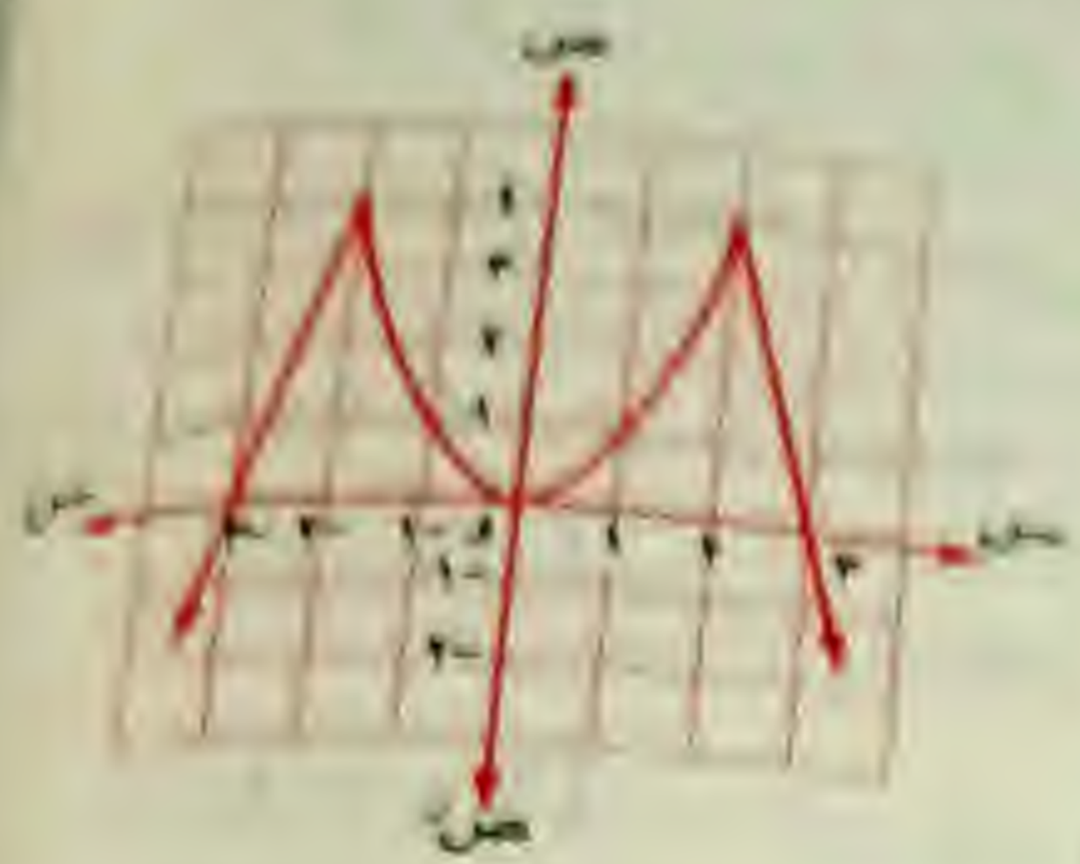
٢٢ إذا كان : س = ٥ + ٢ $\sqrt{٦}$ فإن : لو $\left(\frac{١}{س} + س\right)$ = ...

(أ) ١ (ب) ٥ - ٢ $\sqrt{٦}$ (جـ) ١٠ (د) ٥ + ٢ $\sqrt{٦}$

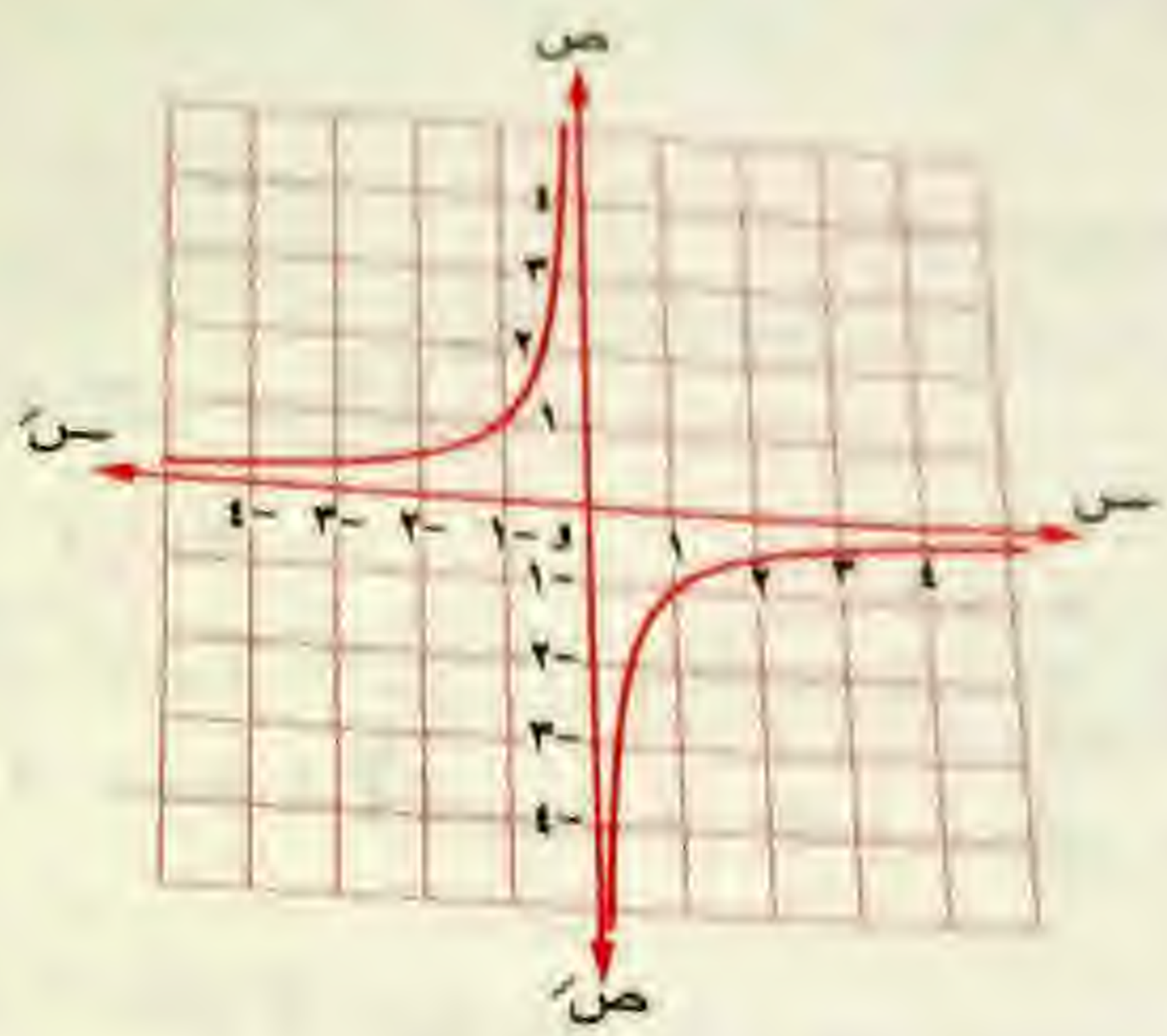
٢٣ أي من الدوال الممثلة بيانيًا كالتالي تكون ليست زوجية وليست فردية ؟



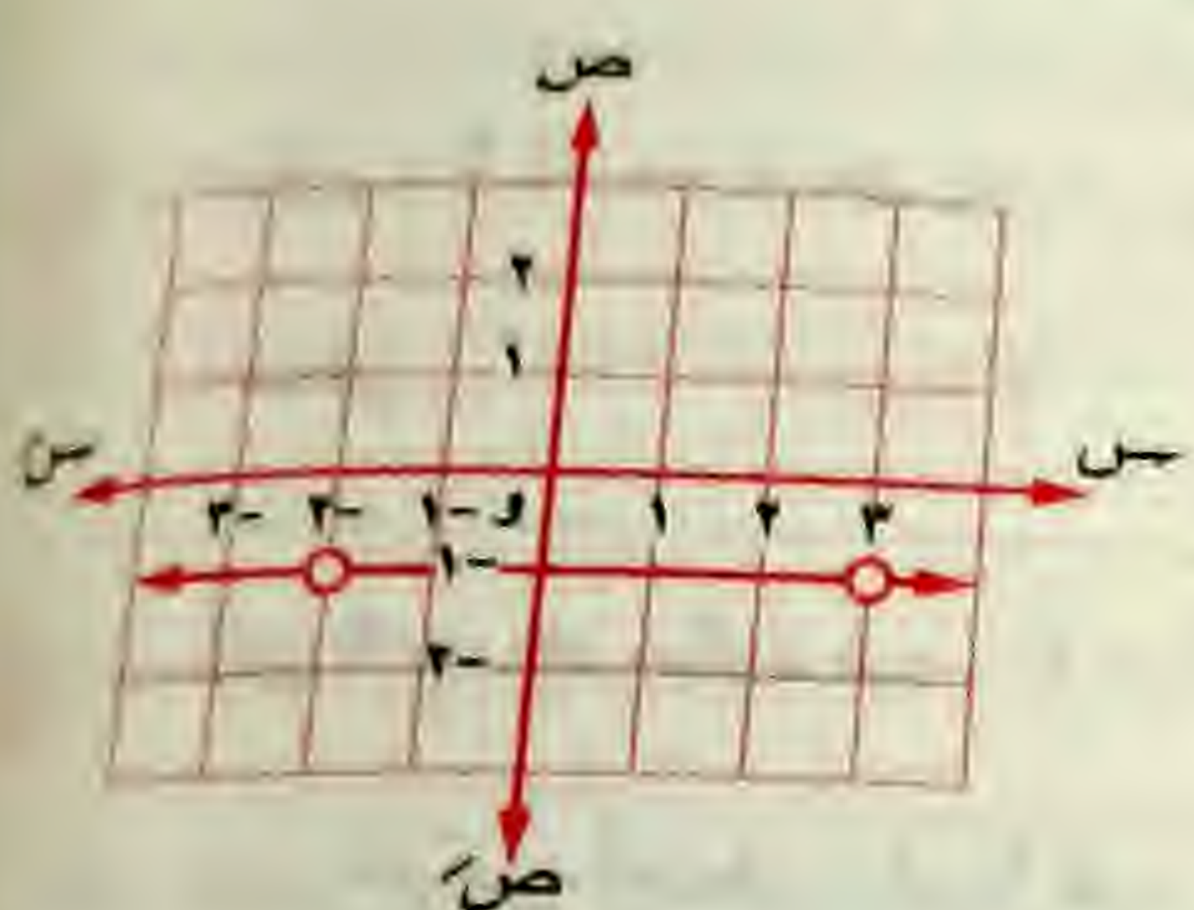
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

---

٢٤ **في الشكل المقابل :**



إذا كان : طا (د ء هـ حـ) = $\frac{٣}{٤}$

فإن طول نصف قطر الدائرة المارة

برؤوس Δ أ ب حـ = ... سم.

(أ) ٩ (ب) ٥,٧ (جـ) $٤\frac{٣}{٤}$ (د) ٣,٧٥

٢٥ إذا كانت : د (س) = $س^٢$ + |س| حيث س عدد حقيقى

فإن مجموعة حل المعادلة د (س) = ٢ فى ح تساوى ....

(أ) {-٢} (ب) {-٢ ، -١ ، ١}

(جـ) {١ ، -١} (د) {١}

---

٢٦ $\lim_{س \to ٢} \sqrt{٤ - س^٢}$ = ...

(أ) -١ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) غير موجودة.

---

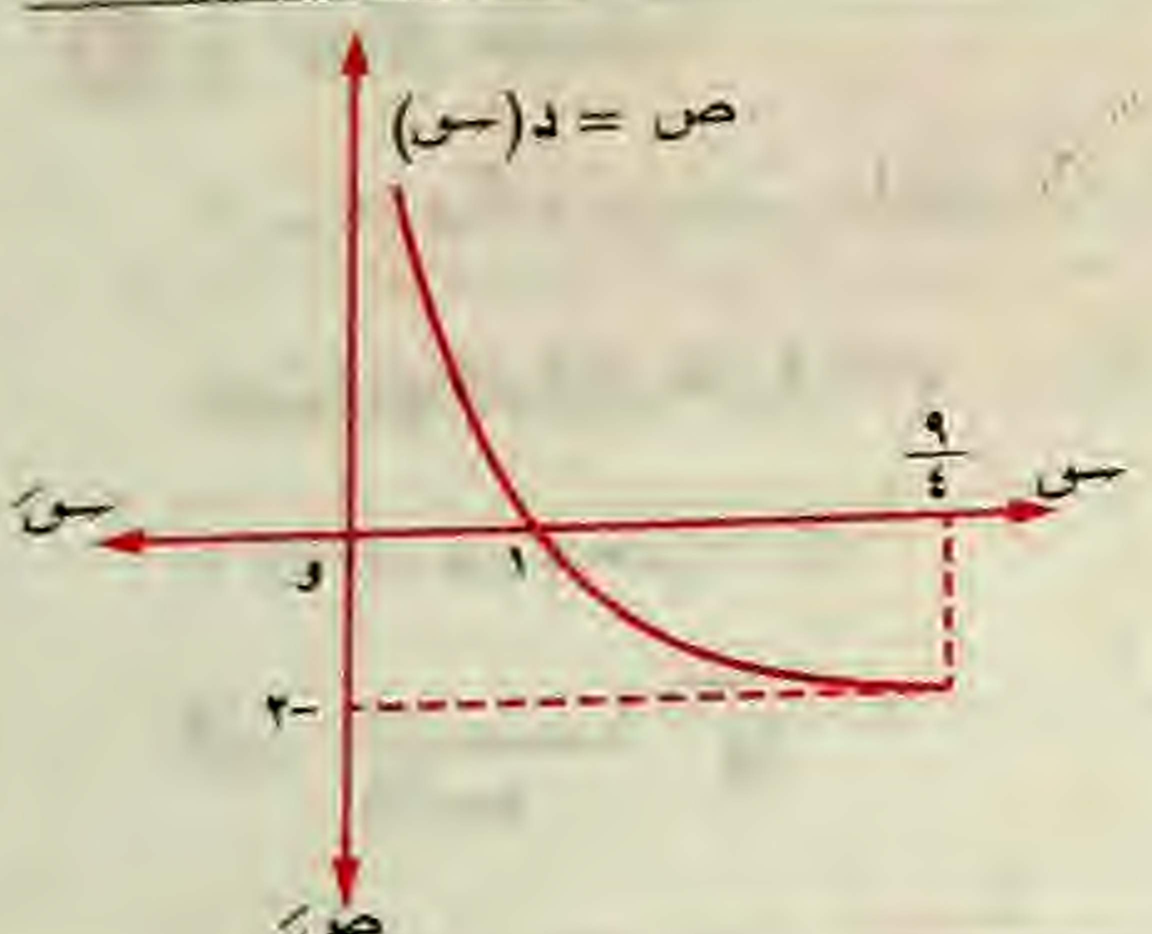
٢٧ إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى

الدالة د : د (س) = $لو_م$ س

فإن : $لو_م \frac{١٦}{٨١}$ = ...

(أ) -٢ (ب) ١

(جـ) ٢ (د) ٤



---

٢٨ $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا س + جا س}{١ - جتا س - جا س}$ = ...

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) ٠ (د) ∞

---

٢٩ إذا كان محيط المثلث أ ب جـ = ٣٣ سم ، جا أ + جا جـ = $\frac{٢}{٣}$ ، جا ب = $\frac{١}{٤}$

فإن : أ جـ = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ١٥

---

٣٠ مدى الدالة د : د (س) = $\frac{س + ١}{س + ٢}$ يساوى ....

(أ) ح (ب) ح - {-٢} (جـ) ح - {١} (د) $ح_+$

---

٣١ إذا كانت : د (س) = أ س + ب ، $د^{-١}$ (٩) = ٣ ، $د^{-١}$ (٥) = ٢

فإن : أ + ب = ...

(أ) -١ (ب) ١ (جـ) ٧ (د) -٧

---

٣٢ $\lim_{س \to -١} \frac{٢ |س + ١|}{س + ١}$ = ...

(أ) ٢ (ب) -٢ (جـ) ٠ (د) غير موجودة.

النمــوذج العاشر

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ لو ظا ١° + لو ظا ٢° + لو ظا ٣° + ... + لو ظا ٨٨° + لو ظا ٨٩° = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ١٠ (د) ٨٩

٢ في الشكل المقابل :



أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة

طول نصف قطرها ٤ سم

، ق (∠ب أ جـ) = θ°

فإن : $\lim_{\theta \to 0}$ (نهـا) $\frac{\text{ب جـ}}{\theta^\circ}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

٣ إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا المثلث هى ٨ : ٣ : ١ فإن النسبة بين طولى أكبر ضلعين فى المثلث هى ....

(أ) √٣ : ٢ (ب) √٦ : ٢ (جـ) ٨ : ٣ (د) ٨ : ٥

٤ نهـا (س ← -٣) $\frac{\sqrt{\text{س} + ٧} - ٢}{\text{س} + ٣}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{١}{٢}$

٥ إذا كان : ٣^أ = ٤^ب فإن : $٩^{\frac{أ}{ب}} + ١٦^{\frac{ب}{أ}}$ = ...

(أ) ٧ (ب) ١٢ (جـ) ٢٠ (د) ٢٥

٦ إذا كانت : نهـا (س ← ∞) $\frac{٣ ك |\text{س}|}{٤ \text{س} + ٣}$ = ٦ فإن : ك = ...

(أ) ٦ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) ٨ (د) ٣

٧ إذا كانت د : د (س) = $س^{٢}$ فإن صورة منحنى د بالانعكاس فى محور السينات والانتقال ٣ وحدات فى اتجاه $\overrightarrow{و س}$ ووحدتين فى اتجاه $\overrightarrow{و ص}$ هى ....

(أ) $-(س - ٣)^{٢} - ٢$ (ب) $-(س + ٣)^{٢} + ٢$

(جـ) $-(س + ٣)^{٢} - ٢$ (د) $-[(س + ٣)^{٢} + ٢]$

---

٨ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} س^{٢} + أ س - ٢ & ، س > ٢ \\ ٤ & ، س = ٢ \\ ٥ أ + ب س & ، س < ٢ \end{cases}$ متصلة عند س = ٢

أوجد قيمتى : أ ، ب

---

٩ أ ب جـ مثلث محيطه ٧٠ سم ، أ = ٢٦ سم ، ق (∠ أ) = ٦٠° أوجد مساحة سطحه.

---

١٠ إذا كان : د (س) = س + ١ ، ر (س) = $\frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$

فإن : $\lim_{س \leftarrow ١}$ (ر ∘ د) س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) −٢ (د) ٣

---

١١ إذا كان : $لو_{٢}$ ٣ × $لو_{٣}$ ٤ × $لو_{٤}$ ٥ × ... × $لو_{ن}$ (ن + ١) = ١٠ فإن : ن = ...

(أ) ٩ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ١٠٢٣

---

١٢ مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt[٢ن]{س^{٢} - ١}$ هو ....

(أ)]−١ ، ١[(ب) [−١ ، ١] (جـ) ح −]−١ ، ١[(د) ح − {−١ ، ١}

---

١٣ أ ب جـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ١١٢° ، ق (∠ ب) = ٣٣° ، جـَ = ١٩ سم

فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه = ... سم

(أ) ١٦ (ب) ١٧ (جـ) ٣٢ (د) ٣٣

---

١٤ إذا كان : $٢^{س}$ = ٢٠ ، ن < س < ن + ١ ، ن عدداً صحيحاً فإن : ن = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ١٠

١٥ في Δ س ص ع يكون ص² + ع² − س² = ٢ ص ع × ....

(أ) جتا س (ب) جا ع (ج) جتا ع (د) جا س

---

١٦ إذا كانت : د (س) = { ٣ س − ١ ، س ≠ ٢ ؛ ٦ ، س = ٢ } فإن : نهـا (س ← ٢) د (س) = ...

(أ) −٥ (ب) ٥ (ج) ٦ (د) ليس لها وجود.

---

١٧ إذا كان : د (س) = لو٢ (س + ٢) وكان : د⁻¹ (٢) = −٣ فإن : ٢ = ...

(أ) −٧ (ب) ٧ (ج) ٣ (د) ١

---

١٨ تكون الدالة الأسية التى أساسها ٢ تزايدية إذا كانت ....

(أ) ٢ > ٠ (ب) ٢ > ١ (ج) ٠ < ٢ < ١ (د) ٢ = ١

---

١٩ نهـا (س ← ∞) (٤ − ٣ س − س³) = ...

(أ) ∞ (ب) غير موجودة. (ج) −١ (د) −∞

---

٢٠ إذا كانت د دالة فردية ، ٢ ∈ مجال د فإن : د (٢) + د (−٢) = ...

(أ) ٢ د (٢) (ب) ٢ د (−٢) (ج) صفر (د) د (٢)

---

٢١ أوجد جبريًا في ح مجموعة حل المعادلة : | س − ٣ | = | ٩ − ٢ س |

---

٢٢ إذا كانت : د دالة فردية فإن : (٢ د (٣) + ٧ د (−٣)) ÷ (١٠ د (−٣)) = ...

(أ) ٣ (ب) −٣ (ج) $\frac{1}{2}$ (د) $-\frac{1}{2}$

---

٢٣ إذا كانت : د (س) = √(س + ٣) ، ر (س) = √(٦ − س)

فإن : (د ∘ ر) (٥) = ...

(أ) غير معرفة. (ب) صفر (ج) ٥ (د) ٢

---

٢٤ مدى الدالة د : د (س) = { ٢ س + ٣ ، س > ٣ ؛ ٩ ، س < ٣ } هو ....

(أ) {٣} (ب) ح (ج)]٩ ، ∞[(د) [٩ ، ∞[

٢٥ فى Δ أ ب حـ إذا كان : ق(∠ب) = ٦٠° ، ق(∠حـ) = ٣٠° ، حـَ = ٤ سم

فإن : بَ = ... سم.

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ٢ $\sqrt{٣}$ (د) ٤ $\sqrt{٣}$

---

٢٦ نهــا (س ← ...) $\frac{١ - ظا س}{جا س - جتا س}$ = ...

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) صفر (د) ليس لها وجود.

---

٢٧ إذا كانت مساحة Δ أ ب حـ هى م ، نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه

فإن : $\frac{٤ \text{ نق} \times م}{أَ بَ حـَ}$ = ...

(أ) $\frac{أ}{جا أ}$ (ب) جتا أ (جـ) ١ (د) نق

---

٢٨ إذا كانت : د(س) = ٧س + ١

فأوجد قيمة س التى تحقق : د(٢س - ١) + د(س - ٢) = ٥٠

---

٢٩ إذا كان : نهــا (س ← ٢⁺) د(س) = ل ، نهــا (س ← ٢⁻) د(س) = م وكانت الدالة متصلة

عند س = ٢ فإن : ل^٢ + م^٢ - ٢ ل م = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) ٦

---

٣٠ إذا كان : أَ = جا ب ، بَ = جا حـ ، حـَ = جا أ فإن محيط الدائرة المارة برؤوس

المثلث أ ب حـ يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ π (جـ) $\frac{١}{٢}\pi$ (د) π

---

٣١ مجموعة الحل فى ح للمتباينة : $\sqrt{٩س^٢ - ١٢س + ٤}$ + ٢ | ٤ - ٦س | ≥ ٢٠

هى ....

(أ) ح -]$\frac{-٢}{٣}$ ، ٢[(ب)]-$\frac{٢}{٣}$ ، ٢[

(جـ) ح - [$\frac{-٢}{٣}$ ، ٢] (د) [$\frac{-٢}{٣}$ ، ٢]

---

٣٢ إذا كانت : د(س) = س^٣ + ٣س^٢ + ٣س + ١ فإن : د^{-١}(س) = ...

(أ) (س + ١)^٣ (ب) $\sqrt[٣]{س}$ - ١ (جـ) $\sqrt[٣]{س}$ + ١ (د) س^٣ - ١

١ محافظة القاهرة

أجب عن الأسئلة الآتية :

استخدم الشكل المقابل في الإجابة عن الأسئلة من (١ – ٣) .



١ مدى الدالة هو ....

(أ) ح − {٠}　　(ب) ح −]−٢ ، ٢[

(جـ) ح　　(د) [−٢ ، ٢]

٢ الدالة تكون متزايدة في ....

(أ)]−∞ ، ٠[فقط.　　(ب)]٠ ، ∞[فقط.

(جـ)]−∞ ، ٠[، [٠] ،]٠ ، ∞[　　(د) ح − [−٢ ، ٢]

٣ الدالة تكون ....

(أ) زوجية.　　(ب) فردية.

(جـ) ليست زوجية وليست فردية.　　(د) زوجية وأحادية.

---

٤ مجال الدالة د حيث د : ح$^+$ ⟵ ح ، د (س) = $\frac{\text{س} - ١}{٤ \text{ س}}$ هو ....

(أ) ح　　(ب) ح − {٠}　　(جـ) ح$^+$　　(د) ح − {١}

---

٥ المنحنى د (س) = س^٢ − ٢ هو نفس منحنى د (س) = س^٢ بإزاحة مقدارها ٢ وحدات في اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{\text{و س}}$　　(ب) $\overleftarrow{\text{و ص}}$　　(جـ) $\overrightarrow{\text{و س}}$　　(د) $\overrightarrow{\text{و ص}}$

---

٦ العبارة الخطأ فيما يلي هي ....

(أ) | س ص | = | س | × | ص |　　(ب) | س | = | − س |

(جـ) | س + ص | = | س | + | ص |　　(د) $\sqrt[٢]{\text{س}^٢}$ = | س |

٧ مجموعة حل المعادلة : |س| = − س هي ....

(أ) ∅ (ب) [٠ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ∞[(د)]−∞ ، ٠]

٨ إذا كان الجدول المقابل يمثل بيان كل من الدالتين د ، ر

فإن (ر ∘ د) (١) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

س	١	٢	٣	٤
د (س)	٣	١	٤	٢
ر (س)	٤	٣	٢	١

٩ إذا كانت الدالة د زوجية فى [أ ، ب] ، أ > ٢ ، فإن : ب = ...

(أ) أ (ب) − أ (جـ) ٢ أ (د) أ²

١٠ إذا كانت د دالة حيث د :]−٥ ، ٥[⟵ ح ، د (س) = س² فإن الدالة د (س) تكون ....

(أ) زوجية. (ب) فردية.

(جـ) أحادية. (د) ليست زوجية وليست فردية.

١١ مجال الدالة د : د (س) = $\frac{٥}{\sqrt{س - ٤}}$ هو ....

(أ) [٤ ، ∞[(ب)]٤ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ٤] (د)]−∞ ، ٤[

١٢ نقطة رأس منحنى الدالة د : د (س) = |س + ٣| − ٢ هى ....

(أ) (٣ ، ٢) (ب) (−٣ ، −٢) (جـ) (−٣ ، ٢) (د) (٣ ، −٢)

١٣ إذا كانت : د (س) = ٣^س ، ر (س) = ٩^س

فإن قيمة س التى تحقق د (٢ س − ١) + ر (س + ١) = ٧٥٦ هى ....

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٧

١٤ مجموعة حل المتباينة : |س − ٢| ≥ − ١ هي ....

(أ)]−٢ ، ٦[(ب) [−٢ ، ٦] (جـ) ح (د) ∅

---

١٥ لو $\left(\frac{أ^{٢}}{ب\,جـ}\right)$ = ... حيث ب ، جـ ∈ ح⁺

(أ) ٢ لو أ + لو ب + لو جـ (ب) ٢ لو أ − لو ب + لو جـ

(جـ) ٢ لو أ − لو ب − لو جـ (د) ٢ (لو أ − لو ب − لو جـ)

---

١٦ إذا كان : $٣^{س - ٢} = ٢^{س - ٢}$ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) −٢ (جـ) صفر (د) ٢

---

١٧ إذا كانت د دالة فردية على [− س ، س] فإن : د (− س) + د (س) = ...

(أ) ٢ س (ب) − $س^{٢}$ (جـ) −٢ س (د) صفر

---

١٨ الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) د (س) = س + ١ (ب) د (س) = $س^{٢}$

(جـ) د (س) = |س| (د) د (س) = ٥

---

١٩ مجموعة حل المتباينة : $\frac{١}{|س|} \geq ١$ هى ....

(أ) [−١ ، ١] (ب)]−١ ، ١[

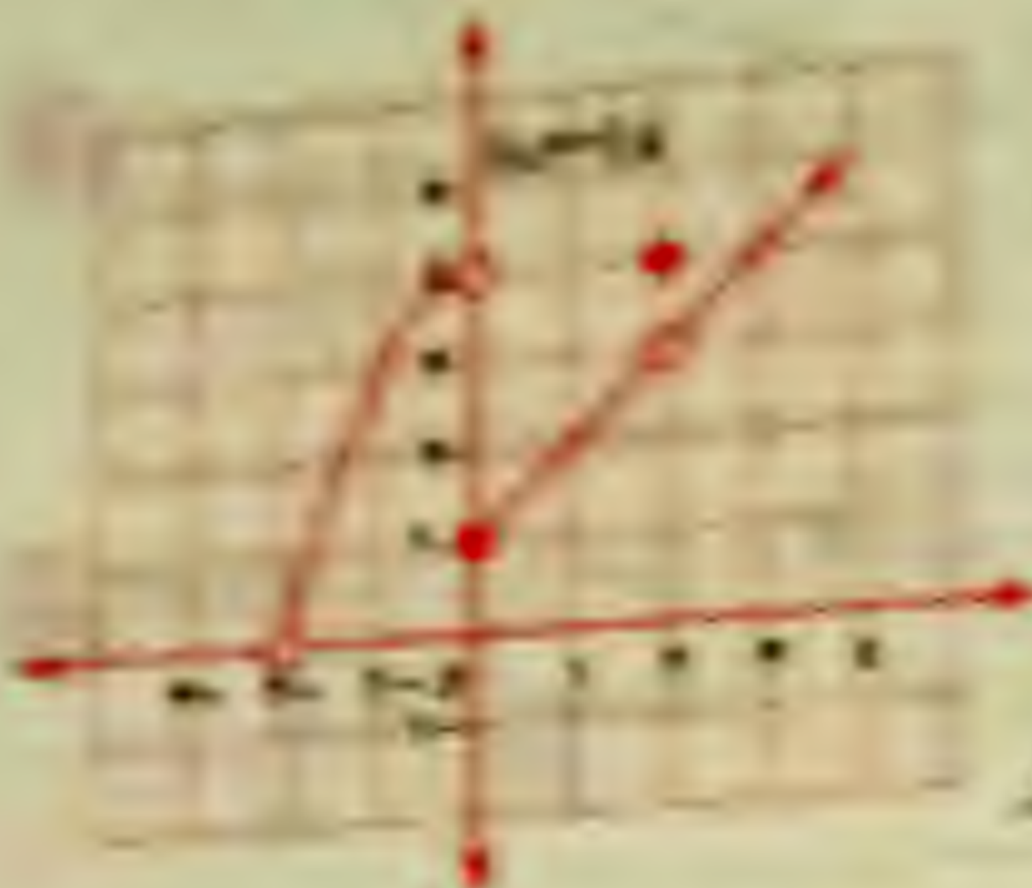
(جـ) [−١ ، ١] − {٠} (د)]−١ ، ١[− {٠}

---

٢٠ إذا كانت : $٣^{د(س)} = ٢ س - ١$ فإن : $د^{-١}(٠)$ = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ٢ (د) ٥

استخدم الشكل المقابل في الإجابة عن الأسئلة من (٢١ - ٢٣) :



نهـا د(س) = ________

(أ) صفر (ب) ٢

(جـ) ١ (د) غير معرفة

نهـا د(س) = ________

(أ) صفر (ب) ٢

(جـ) ١ (د) غير موجودة

د(س) متصلة عند س = ________

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) -٢

$\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$ = ________

(أ) صفر (ب) غير موجودة (جـ) ٤ (د) ٢

$\lim\limits_{س \to ٠} \frac{٢ س}{جا ٣ س}$ = ________

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

$\lim\limits_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س + ١} - ٢}{س - ٣}$ = ________

(أ) ٤ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ٢

$\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٣٦}{س^٣ - ٨}$ = ________

(أ) $\frac{-٣}{٢}$ (ب) $\frac{١٠}{٣}$ (جـ) $\frac{٤}{٣}$ (د) $\frac{٢٥}{٣}$

$\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^٣ + س^٢ - ٢}{س - ١}$ = ________

(أ) ٥ (ب) صفر (جـ) ٨ (د) -٣

٢٩ نهـــــا [illegible] = ...

(أ) ∞ (ب) −∞ (ج) صفر (د) ٧

٣٠ نهـــــا [illegible] = ...

(أ) $\frac{}{}$ [illegible] (ب) [illegible] (ج) صفر (د) ٢

٣١ الدالة د : د(س) = $\sqrt{س - ١}$ متصلة في ...

(أ)]١ ، ∞[(ب)]−١ ، ∞[(ج)]−∞ ، ١[(د)]−∞ ، −١[

٣٢ نهـــــا (س ← صفر) $\frac{س \text{ جا } ٢س}{س^٢}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٤

٣٣ في Δ أ ب حـ إذا كان : $\frac{\text{جا أ}}{٤} = \frac{\text{جا ب}}{٩} = \frac{\text{جا حـ}}{٧}$ فإن أكبر زاوية قياسًا تكون ...

(أ) ∠ أ (ب) ∠ ب (ج) ∠ حـ (د) قائمة.

٣٤ Δ س ص ع فيه : $\frac{س}{\text{جا س}}$ = ٦ فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه = ... وحدة طول.

(أ) ٦ (ب) ١٢ (ج) ٣ (د) ٩

٣٥ إذا كان : ٢ جا أ = ٣ جا ب = ٤ جا حـ

فإن : أ : ب : حـ = ... : .... : ....

(أ) ٢ : ٣ : ٤ (ب) ٤ : ٣ : ٢ (ج) ٦ : ٤ : ٣ (د) ٣ : ٤ : ٦

٣٦ أ ب حـ مثلث فيه : حـ = ٤,٥ سم ، ق(∠ أ) = ١٠٠° ، ق(∠ ب) = ١٥°

فإن أصغر الأضلاع طولًا ≃ .... (لأقرب جزء من عشرة).

(أ) ١ سم (ب) ١,٣ سم (ج) ١,٥ سم (د) ١,٧ سم

٣٧ قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه ٣ سم ، ٥ سم ، ٧ سم يساوى ....

(أ) ١٥٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ٦٠° (د) ٣٠°

٣٨ إذا كان : أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى فإن : حتا أ + حتا حـ = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) −١

٣٩ أ ب حـ مثلث فيه : أ = ٢٧ سم ، ق (∠ب) = ٨٢° ، ق (∠حـ) = ٥٦°

فإن مساحة سطحه لأقرب سم^{٢} = ...

(أ) ٥٤٠ (ب) ٤٤٧ (جـ) ٣٥٠ (د) ٤٠٠

٤٠ أ ب حـ مثلث فيه : بَ = ٤ سم ، أَ + حَ = ١١ سم ، أَ − حَ = ١ سم

فإن : ....

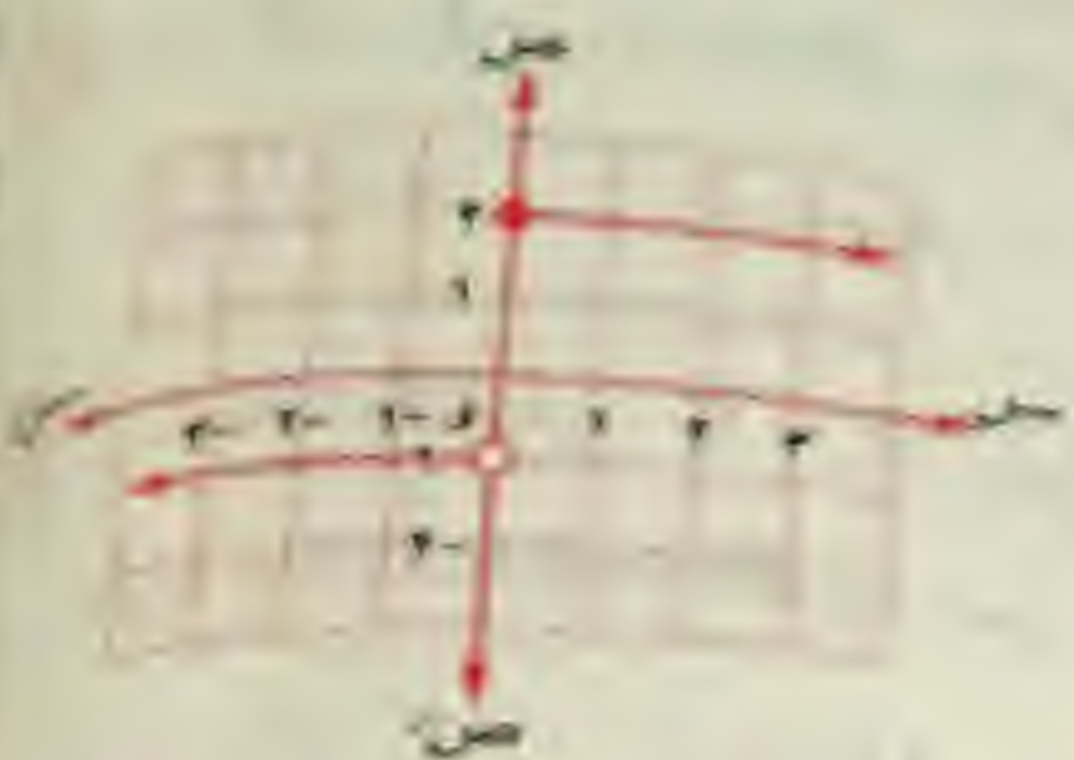
(أ) المثلث منفرج الزاوية. (ب) المثلث قائم الزاوية.

(جـ) ق (∠ب) = ٢ ق (∠أ) (د) ق (∠أ) = ٢ ق (∠ب)

٢ محافظة الجيزة

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ مدى الدالة الممثلة بالشكل المقابل هو ....



(أ) {-١ ، ٢}
(ب) {٢}
(جـ) {-٢ ، ٢}
(د) {-١}

---

٢ إذا كان : لو ٢ س = لو ٤ ٩ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٩ (د) ١٢

---

٣ إذا كانت : د (س) = (٥)^-س فإن : $\frac{\text{د (س − ١)}}{\text{د (س + ١)}}$ = ...

(أ) ٥ (ب) $\frac{١}{٥}$ (جـ) ٢٥ (د) $\frac{١}{٢٥}$

---

٤ نهـا (س ← ٠) $\frac{\sqrt{١ - \text{جتا}^٢ \text{س}}}{\text{س}}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) -١ (د) غير ذلك.

---

٥ الدالة الزوجية المتصلة عند النقطة (أ ، ب) تكون متصلة أيضاً عند النقطة ....

(أ) (-أ ، ب) (ب) (-أ ، -ب) (جـ) (أ ، -ب) (د) غير ذلك.

---

٦ المثلث أ ب جـ الذي فيه : أ ب = ٣ سم ، ب جـ = ٥ سم

، أ جـ = ٧ سم فإن : ق (∠ ب) = ...°

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (جـ) ١٢٠ (د) ١٥٠

٧ نقطة تماثل الدالة د : د (س) = $\frac{س + ١}{س}$ هى ....

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٠ ، ١) (جـ) (٠ ، ٠) (د) (١ ، -١)

---

٨ مجموعة حل المعادلة : لو$_{\sqrt{٢}}$ س + لو$_{\sqrt{٢}}$ (س + ١) = ٢ هى ....

(أ) {١ ، ٢} (ب) {-٢} (جـ) {١ ، -٢} (د) {١}

---

٩ لو$_{س}$ ص $\left(\frac{١}{س}\right)$ + لو$_{س}$ ص $\left(\frac{١}{ص}\right)$ = ...

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) س ص (د) - س ص

---

١٠ نهـا$_{س \leftarrow ١٦}$ $\frac{\sqrt[٤]{س^{٧}} - ١٢٨}{س - ١٦}$ = ...

(أ) ١٢ (ب) ١٤ (جـ) ١٦ (د) ٢٠

---

١١ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{٢ س + جا س}{طا ٢ س + ٤ س} & ، س < ٠ \\ ٥ س + \frac{١}{٢} & ، س > ٠ \end{cases}$

فإن : نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ د (س) = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) غير موجودة.

---

١٢ فى المثلث س ص ع إذا كان : سَ = ٢٠ سم ، عَ = ١٦ سم

، جتا ص = ٠,٤ فإن : صَ = ... سم

(أ) ٢٠ (ب) ١٦ (جـ) ٢٥ (د) ١٥

---

١٣ منحنى الدالة ر : ر (س) = |س + ٣| هو نفسه منحنى د (س) = |س| بإزاحة

مقدارها ٣ وحدات فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{و س}$ (ب) $\overleftarrow{و س}$ (جـ) $\overleftarrow{و ص}$ (د) $\overleftarrow{و ص}$

١٤ إذا كانت : د(س) = ٣^س ، فإن : د^{-١}(س) = ...

(أ) لو_س ٣　(ب) لو_٣ س　(ج) س^{-٣}　(د) ٣س

١٥ الدالة د : د(س) = $\sqrt{س + ٣}$ مجالها هو ....

(أ)]-٣ ، ∞[　(ب)]-∞ ، ٣]　(ج) [٣ ، ∞[　(د) [-٣ ، ∞[

١٦ نهـا (س ← $\frac{\pi}{٤}$) $\frac{طاس}{س}$ = ...

(أ) ١　(ب) $\frac{\pi}{٣}$　(ج) $\frac{\pi}{٤}$　(د) $\frac{٤}{\pi}$

١٧ نهـا (ن ← ∞) $\frac{\sqrt[ن]{٣}}{٩}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$　(ب) ∞　(ج) $\frac{١}{٩}$　(د) صفر

١٨ فى الشكل المقابل إذا كان محيط Δ أ ب حـ = ٢٠ سم

فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه يساوى = ... سم.



(أ) ٢　(ب) ٤　(ج) ٦　(د) ٨

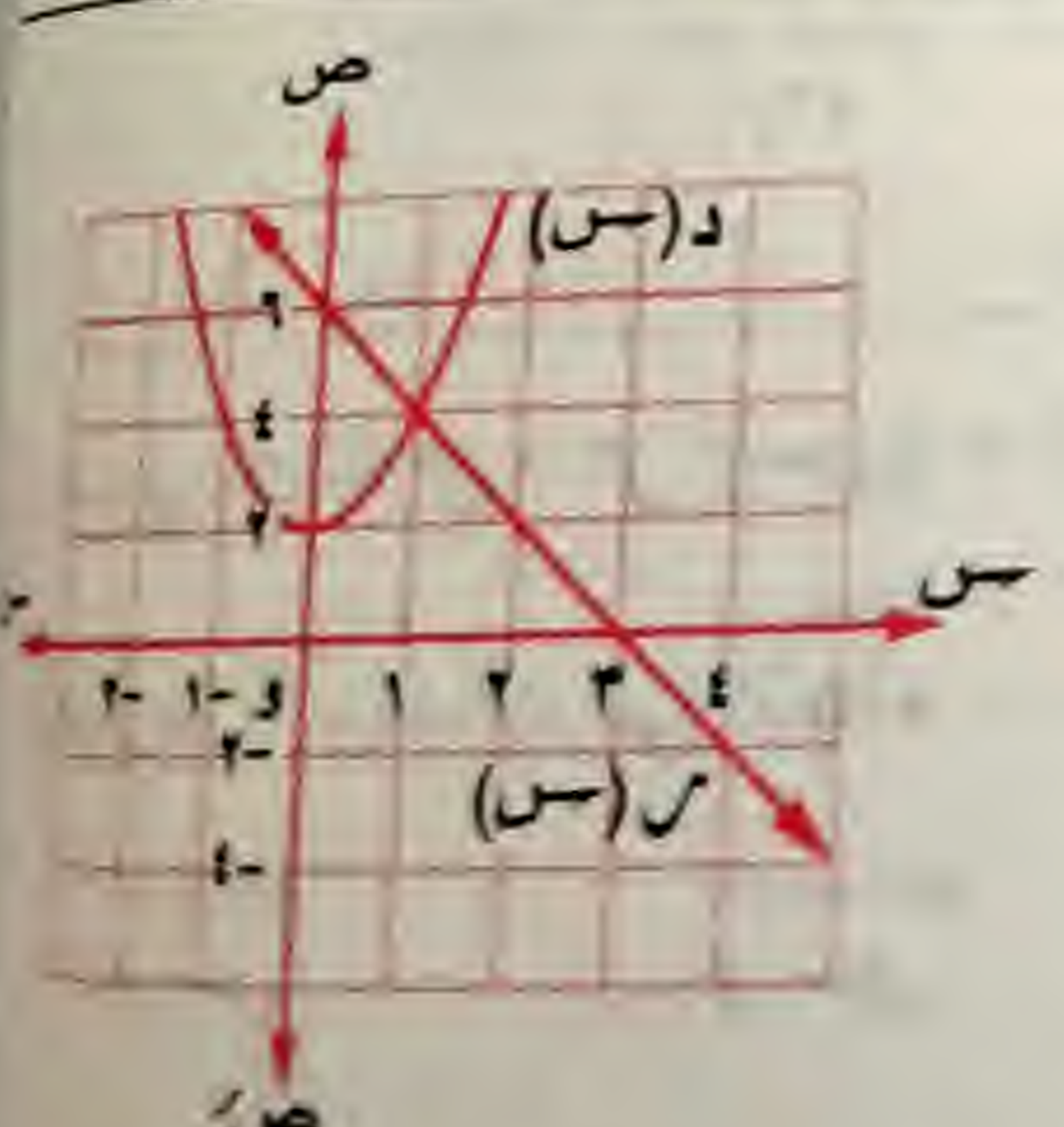
١٩ مجموعة حل المعادلة : لو_س ٣ = -٢ فى ح هى ....

(أ) {$\frac{١}{٩}$}　(ب) {٩}　(ج) {$\sqrt{٣}$}　(د) {$\frac{١}{\sqrt{٣}}$}

٢٠ الشكل المقابل يوضح منحنى

الدالتين د ، ر

فإن : (ر ∘ د) (١) = ...



(أ) ٥　(ب) -٢

(ج) -٤　(د) ٦

إذا كانت: نهـــا $\frac{س^ن - ٣^ن}{س - ٣} = ٢٧$ فإن ن = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٩ (د) ١٢

نهـــا [illegible] = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) [illegible] غير ذلك

في المثلث س ص ع يكون: $جتا^٢ ص + جا^٢ ع - جا^٢ س = ٢ جتا ص جا ع$ ......

(أ) جا س (ب) جا ع (جـ) جتا ع (د) جتا س

الدالة: د(س) = $\frac{س جا س}{|س|}$ من حيث نوعها تكون ......

(أ) فردية (ب) زوجية

(جـ) ليست فردية وليست زوجية (د) غير ذلك

إذا كانت: د(س) = $\sqrt{س^٢}$ + |س| فإن مجموعة حل المعادلة: د(س) = ٢

في ح ......

(أ) {٢، -٢} (ب) {١، -١} (جـ) {٢، ٠} (د) {-١، ٠}

إذا كان: |س| < ٢، ٢ ∈ ح^+ فإن: س ∈ ......

(أ) ح - [-٢، ٢] (ب) [-٢، ٢]

(جـ) ح -]-٢، ٢[(د)]-٢، ٢[

نهـــا$_{س \to ٣}$ $\frac{س^٢ - ١١ س + ٢٤}{٤ س - ١٢}$ = ...

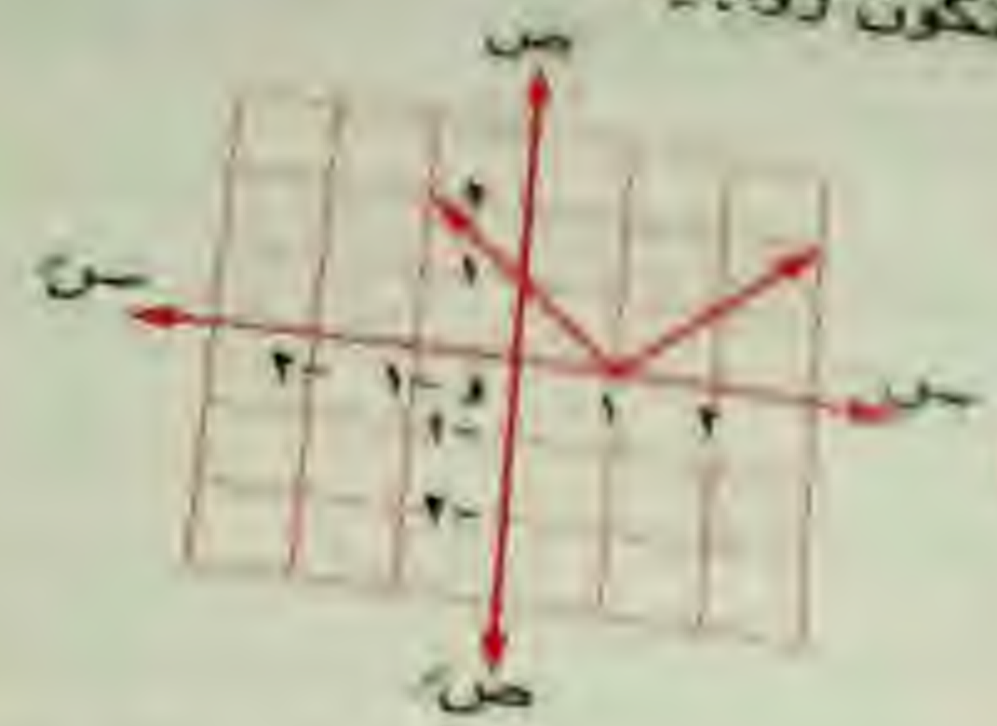
(أ) -٥ (ب) ٤ (جـ) $\frac{-٥}{٤}$ (د) $\frac{١١}{٤}$

٢٨ أى من الدوال الممثلة بيانيا بالأشكال الآتية تكون زوجية ؟

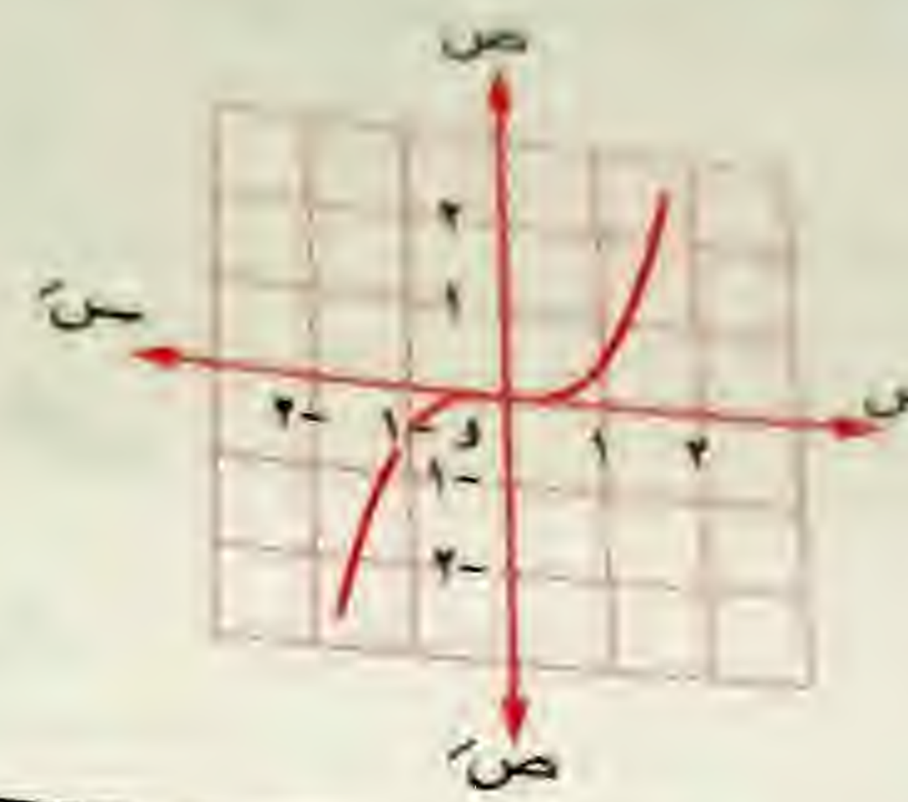
(أ)



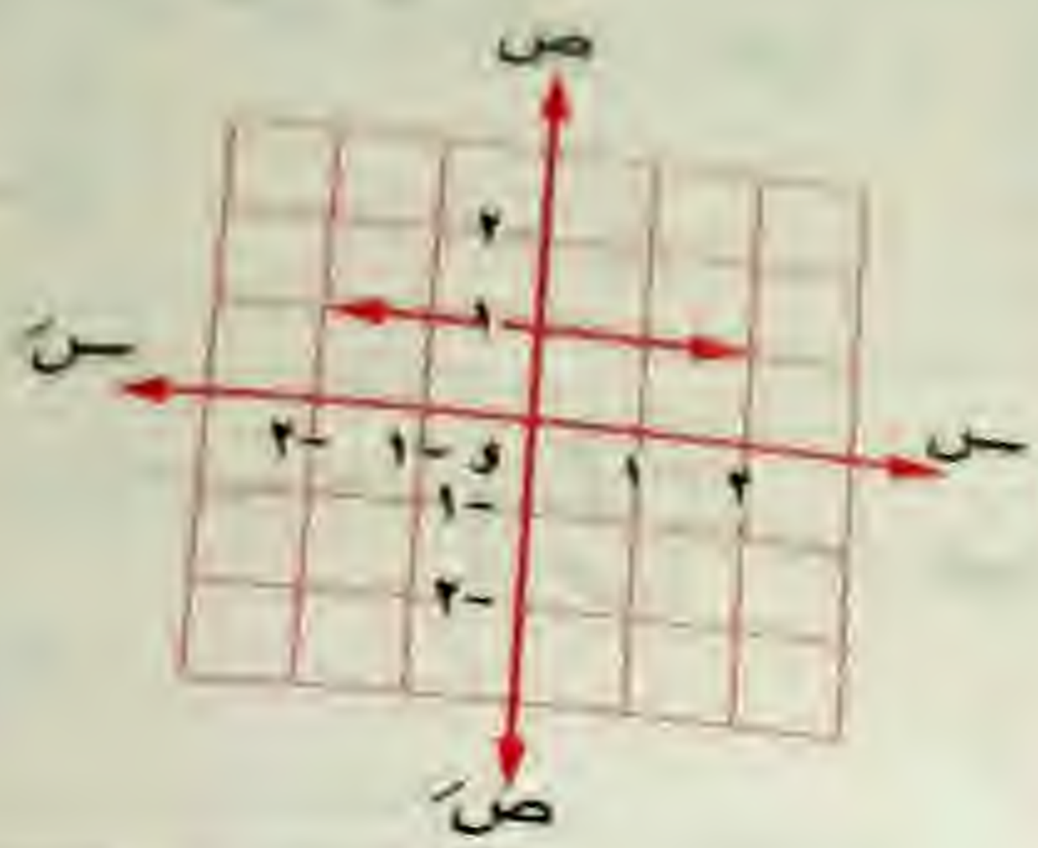
(ب)



(جـ)



(د)



---

٢٩ مجموعة حل المعادلة : $٣^{س+١} + ٣^{س} = ١٢$ فى ح هى ....

(أ) {٠}　　(ب) {٣}　　(جـ) {١}　　(د) {١ ، ٠}

---

٣٠ عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب حـ الذى فيه : أ = ٨ سم ، ب = ١٠ سم

، ق (∠ أ) = ٤٢° هو ....

(أ) ١　　(ب) ٢　　(جـ) عدد لا نهائى.　　(د) لا يوجد.

---

٣١ مجموعة حل المتباينة : $\frac{١}{|س|} \geq ٢$ هى ....

(أ) $[٠ ، \frac{١}{٢}]$　　(ب) $]-\frac{١}{٢} ، ٠[$

(جـ) $[-\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٢}] - \{٠\}$　　(د) $[-\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٢}]$

---

٣٢ الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٣ & ، س > ٠ \\ -٣ & ، س < ٠ \end{cases}$ متماثلة بالنسبة للنقطة ....

(أ) (٠ ، ٠)　　(ب) (٣ ، ٠)　　(جـ) (-٣ ، ٠)　　(د) (-٣ ، ٣)

إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} ا - س^2 & ، س \geq -2 \\ س & ، س < -2 \end{cases}$ متصلة عند س = -2

فإن : ا = ...

(ا) -2 (ب) -4 (جـ) 2 (د) 4

مجموعة حل المعادلة : $\frac{|س|}{س} = 1$ في ح هي ....

(ا) {0} (ب) $ح^+$ (جـ) $ح^-$ (د)]0 ، ∞[

في المثلث ا ب جـ يكون : $\frac{5 جـ}{جا جـ}$ = ... نق

(ا) 5 (ب) 10 (جـ) 15 (د) 20

في المثلث س ص ع إذا كان : $\frac{جا س}{3} = \frac{2 جا ص}{5} = \frac{جا ع}{4}$

فإن : سَ : صَ : عَ = ...

(ا) 3 : 5 : 4 (ب) 3 : 4 : 5 (جـ) 7 : 10 : 8 (د) 6 : 5 : 8

محور تماثل الدالة د : د (س) = $س^2 - 1$ هو المستقيم ....

(ا) س = 1 (ب) س = 0 (جـ) ص = 1 (د) ص = 0

$\lim_{س \to \frac{1}{2}} \frac{8 س^3 - 1}{32 س^5 - 1}$ = ...

(ا) $\frac{3}{5}$ (ب) $\frac{5}{3}$ (جـ) $\frac{3}{20}$ (د) $\frac{1}{4}$

في المثلث ا ب جـ يكون : جتا (ا + ب) = ...

(ا) جتا ا + جتا ب (ب) جا ا + جا ب

(جـ) جتا جـ (د) - جتا جـ

$\lim_{س \to \infty} \frac{ا س^2 - 5 س}{2 س + 3 س^2} = 3$ فإن : ا = ...

(ا) 2 (ب) 6 (جـ) 9 (د) 12

٣ محافظة الإسكندرية

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآله الحاسبة)

١ مجموعة حل المعادلة : |س − ٢| = ٥ في ح هي ....

(أ) {٧} (ب) {−٣} (جـ) {٧ ، −٣} (د) [٧ ، −٣]

٢ $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ - ١}{س - ١}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

٣ المثلث أ ب حـ متساوى الأضلاع طول ضلعه ٨ $\sqrt{٣}$ سم فإن طول قطر الدائرة الخارجة = ... سم

(أ) ٨ (ب) ١٦ $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٦ (د) ٤ $\sqrt{٣}$

٤ الدالة د : د (س) = ٥ مجالها هو ....

(أ) ح (ب) $ح^+$ (جـ) {٥} (د) {٠ ، ٥}

٥ $\lim_{س \to \infty} \frac{٢ س^٢ + ١}{س^٢ + ١}$ = ...

(أ) صفر (ب) غير موجودة. (جـ) ∞ (د) ٢

٦ المثلث أ ب حـ فيه : جا (ب + حـ) : جا أ + جا ب = ...

(أ) ١ (ب) حـ : أ + ب (جـ) أ : ب + حـ (د) أ : أ + ب

٧ إذا كان : $لو_٣ (٢ س + ٣) = ٢$ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ٩ (د) ٤

٨ $\lim_{س \to ٠} \frac{جا ٣ س}{ظا \frac{١}{٣} س}$ = ...

(أ) ٩ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) ٣ (د) ١

إذا كان المثلث أ ب جـ فيه : ق(∠أ) = ١٢٠° ، أ جـ = ٦ سم ، أ ب = ١٠ سم فإن : ب جـ = ... سم

(أ) ١٤ (ب) ٢١ (جـ) ٣٥ (د) ٧

د(س) = (س − ١)² + ٢ تكون متزايدة في الفترة ....

(أ) ح (ب)]١ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ١[(د)]−١ ، ١[

إذا كان : د(س) = س² ، ر(س) = س + ٣ فإن : (د ∘ ر)(س) تكون ....

(أ) أحادية. (ب) فردية. (جـ) زوجية. (د) خطية.

إذا كانت د : د(س) = { (س² − ٩) / (س − ٣) عندما س ≠ ٣ ، ٢ ك عندما س = ٣ } متصلة عند س = ٣

فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) ٣/٢ (جـ) −٣ (د) ٣

قياس أكبر زاوية في المثلث الذي أطوال أضلاعه ٣ سم ، ٥ سم ، ٧ سم = ...°

(أ) ١٢٠ (ب) ١٥٠ (جـ) ١٣٥ (د) ٩٠

نقطة تماثل الدالة د : د(س) = س³ − ٢ هي ....

(أ) (٠ ، ٢) (ب) (٠ ، −٢) (جـ) (٢ ، ٠) (د) (−٢ ، ٠)

نهـا (س ← ٢) (س² + س − ٦) / (س² − ٤) = ...

(أ) ٤/٥ (ب) ٥/٤ (جـ) ٢/٥ (د) −٢/٥

المثلث ل م ن فيه : ل = ٥ سم ، م = ٧ سم ، ق(∠ن) = ٦٠°

فإن : ن = ... سم (لأقرب جزء من عشره).

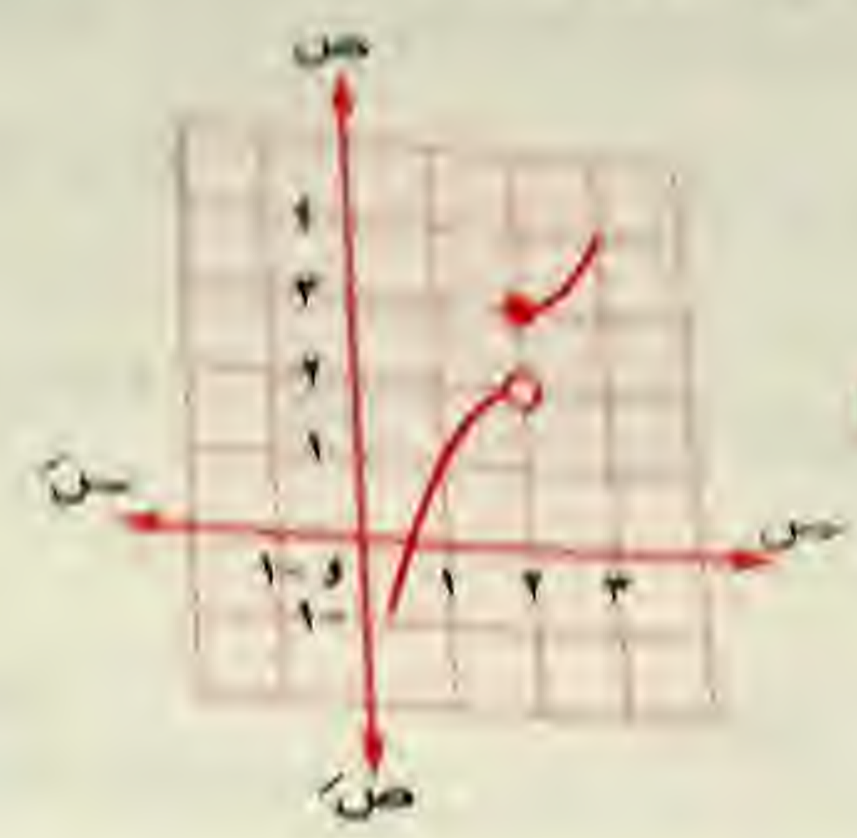
(أ) ٦,٢ (ب) ٥ (جـ) ٤,٣ (د) ٣,٥

١٧ إذا كانت : $س^{\frac{٢}{٣}} = ٤$ ، فإن : س = ...

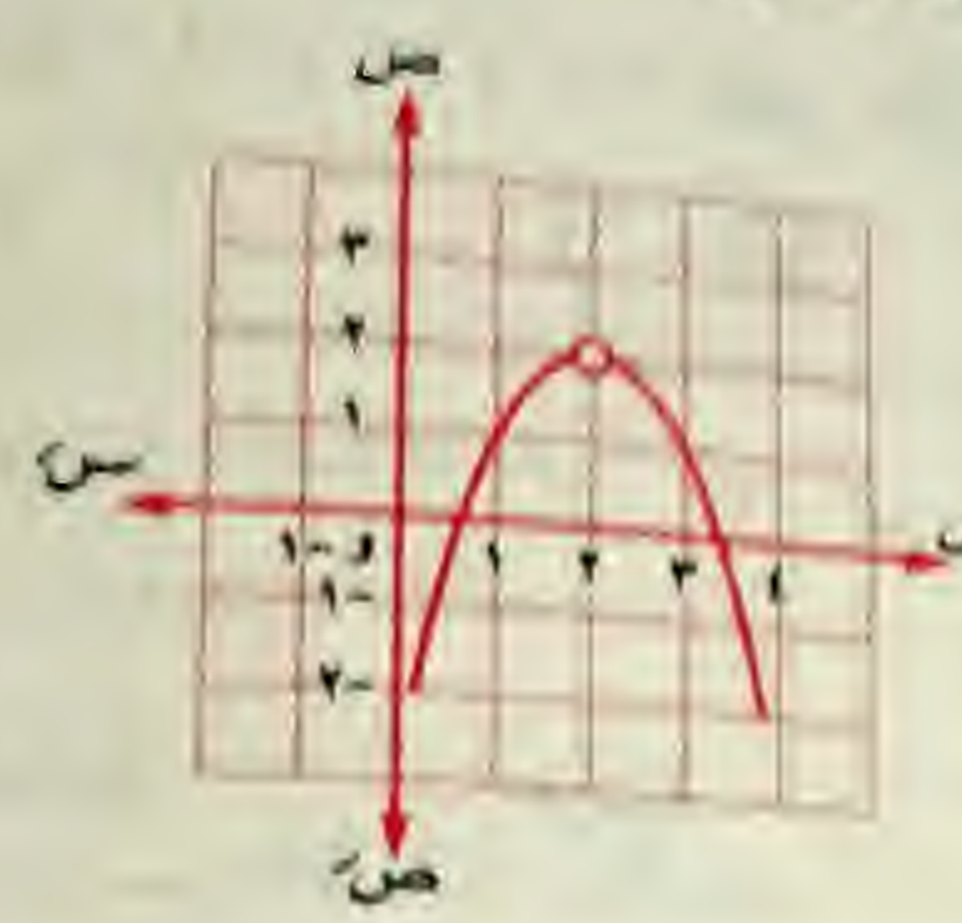
(أ) ٤ (ب) ١٦ (جـ) ± ٤ (د) ± ٣٢

١٨ الشكل الذى يوضح أن الدالة متصلة عند س = ٢ هو ....

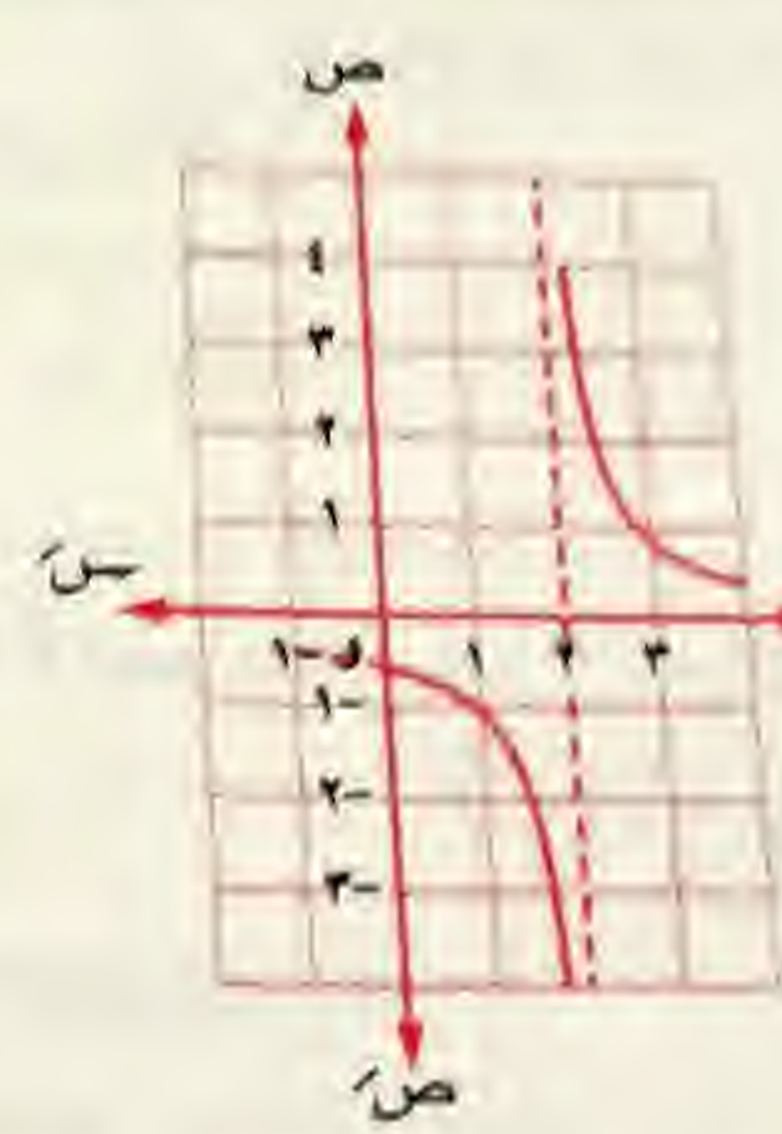
(أ)



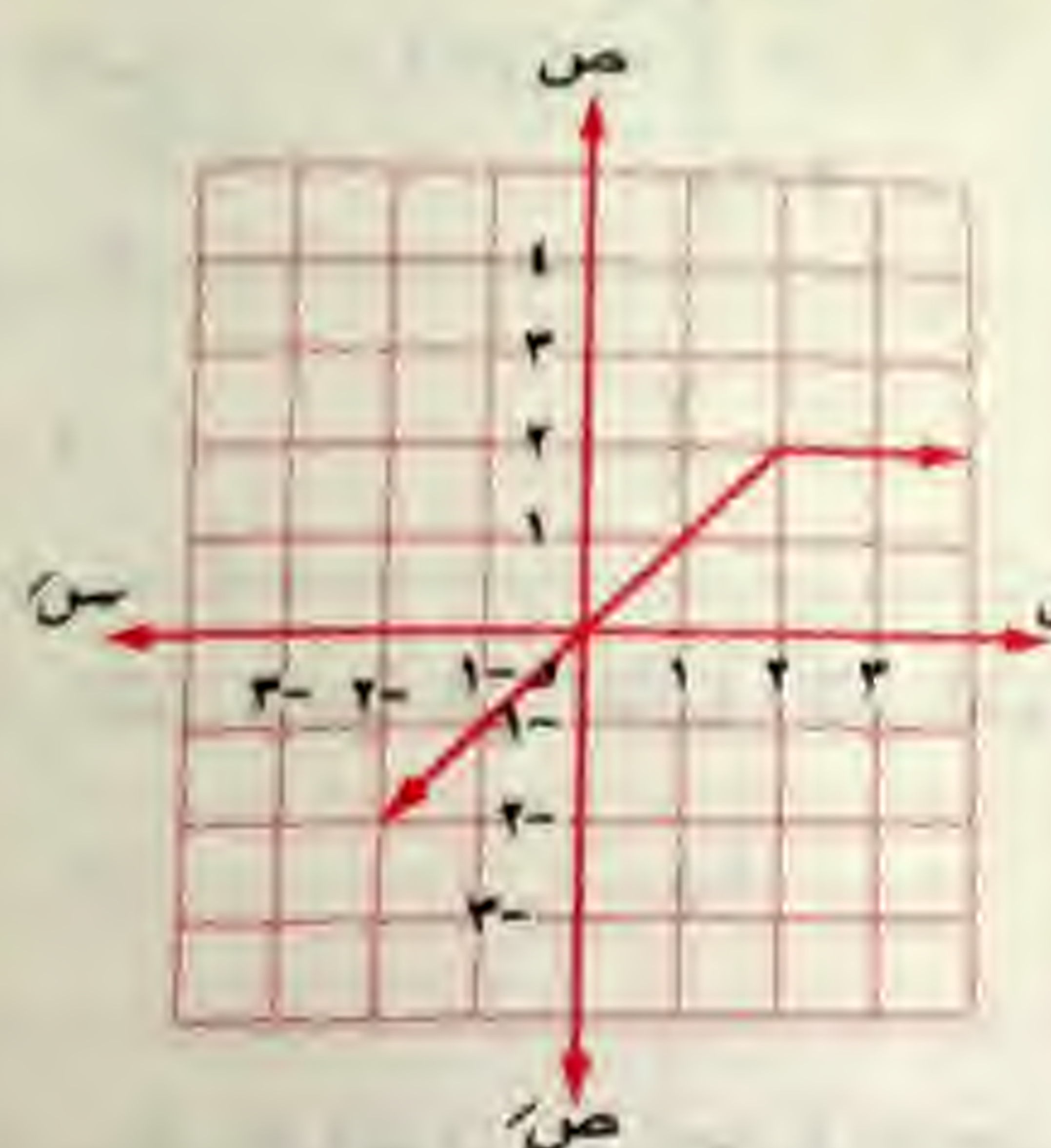
(ب)



(جـ)



(د)



١٩ المثلث أ ب حـ مساحته ٢٤ سم² وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ٥ سم

فإن : جا أ جا ب جا (أ + ب) = ...

(أ) $\frac{٣}{٢٥}$ (ب) $\frac{٩}{٢٥}$ (جـ) $\frac{٦}{٢٥}$ (د) $\frac{١٢}{٢٥}$

٢٠ المثلث أ ب حـ فيه : جتا حـ = $\frac{ب}{٢ أ}$ فإن : أ = ...

(أ) ب (ب) حـ (جـ) $\frac{١}{٢}$ ب (د) $\frac{١}{٢}$ حـ

$\frac{\text{٢ جا س + جا ٢ س}}{\text{٥ س + ظا ٢ س}}$ = ...

(ب) $\frac{٥}{٧}$ (جـ) $\frac{٧}{٥}$ (د) −١

كانت د دالة فردية وكان : س د (س) + س^{٢} د (− س) = ٢

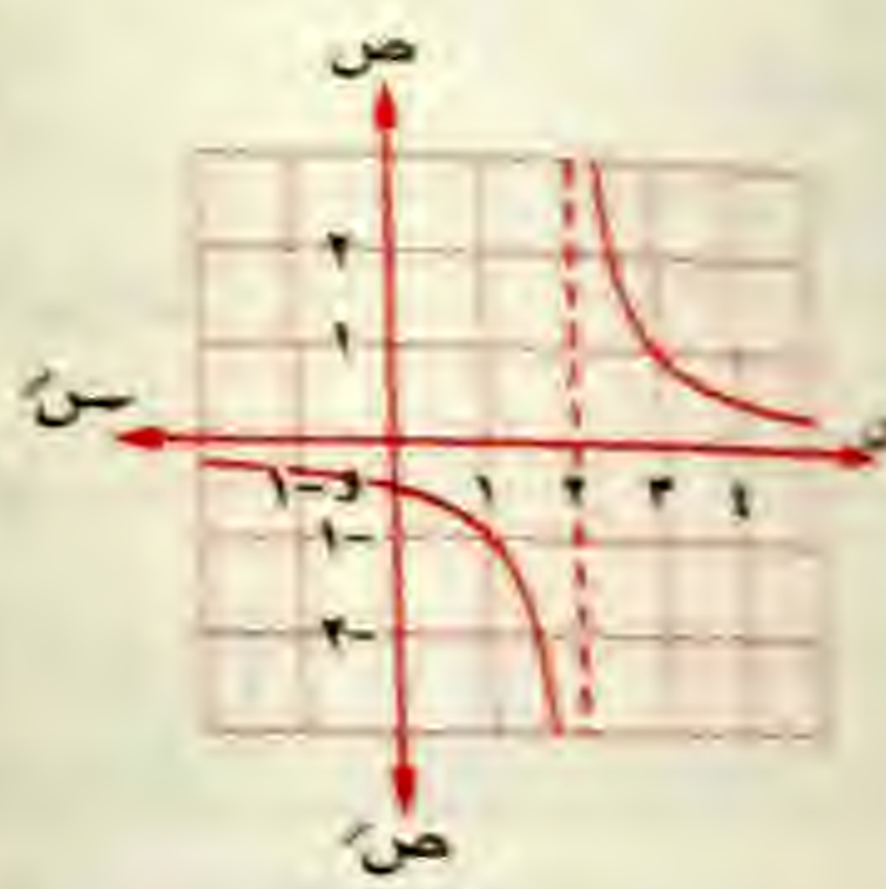
فإن : د (٢) = ...

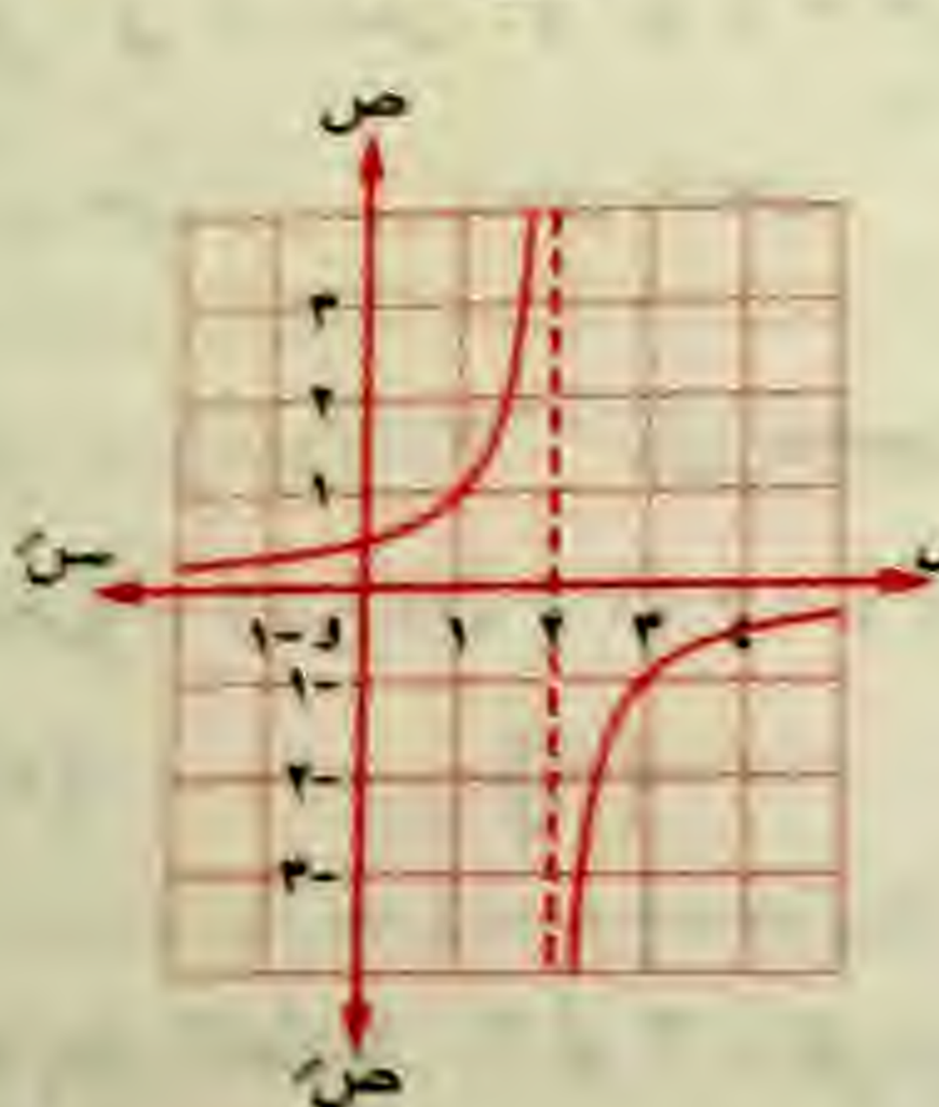
(ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{-١}{٣}$ (د) −٢

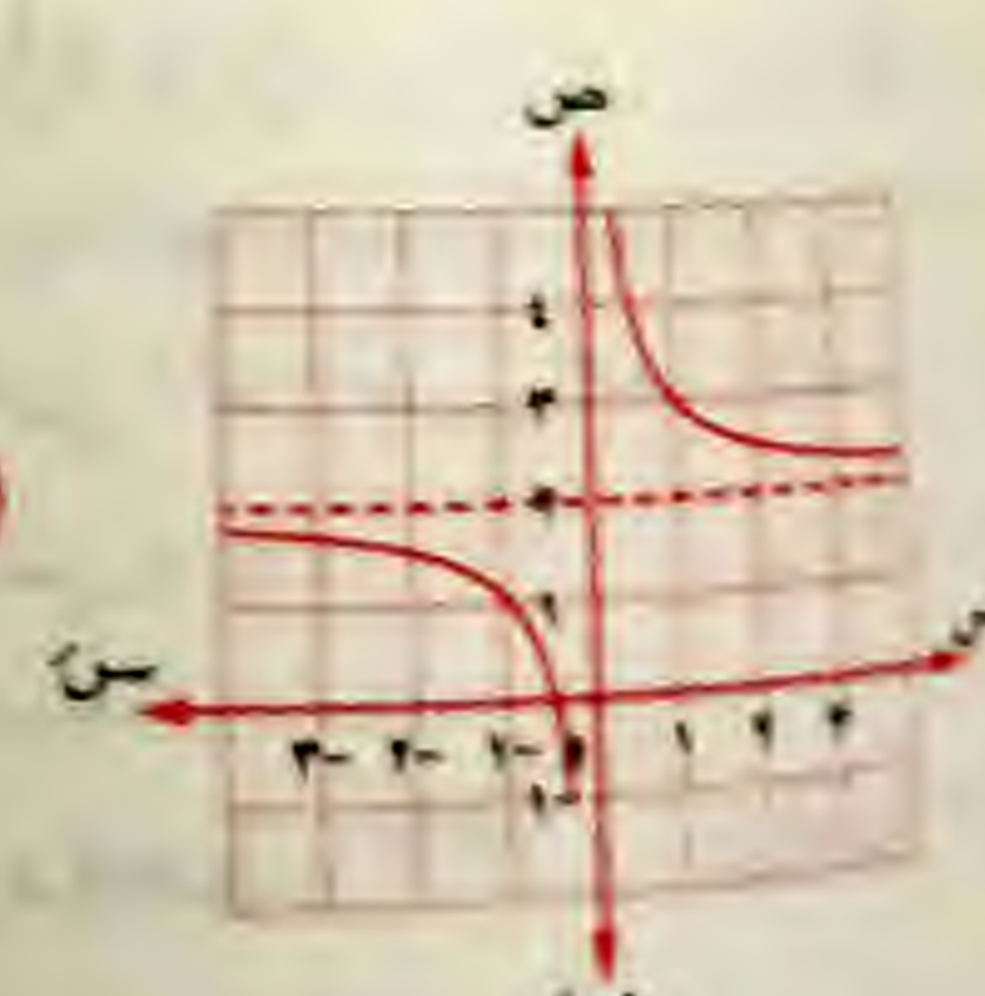
مجموعة حل المعادلة : | ٢ س − ١ | = س + ٢ هى ....

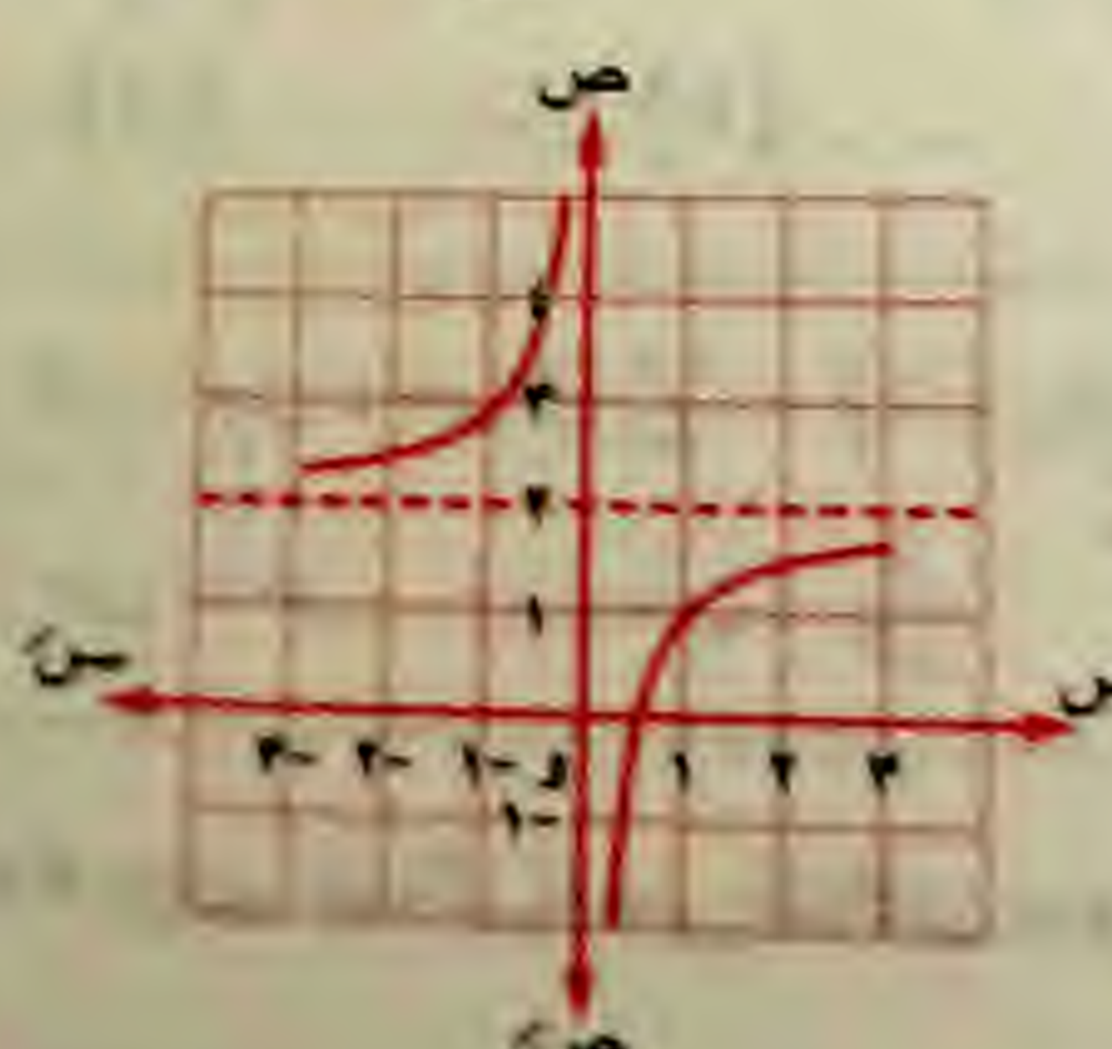
(ب) $\left\{ ٣ ، \frac{١}{٣} \right\}$ (جـ) $\left\{ ٣ ، \frac{-١}{٣} \right\}$ (د) ∅

أي من الأشكال البيانية الآتية يمثل الدالة د : د (س) = $\frac{١}{\text{س − ٢}}$ ؟



(ب) 

(جـ) 

(د) 

٢٥ $\lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{(س + ١)^{٤} - ٨١}{س - ٢}$ = ...

(أ) ١٨ (ب) ٨١ (جـ) −١٠٨ (د) ١٠٨

---

٢٦ $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{أس + ٧}{٥س - ٧} = ١$ فإن : أ = ... حيث أ ≠ صفر

(أ) ٥ (ب) ١ (جـ) −٥ (د) ٢٥

---

٢٧ $\lim\limits_{س \to ١} \dfrac{جا(س - ١)}{س^{٢} - ١}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) −١ (د) صفر

---

٢٨ $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{٢}} \dfrac{٣ جتا س}{\pi - ٢س}$ = ...

(أ) ٣ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{-٣}{٢}$ (د) −٣

---

٢٩ إذا كان : لو ٣ = س ، لو ٥ = ص فإن : لو ١٥ = ...

(أ) س ص (ب) س + ص (جـ) $\frac{س}{ص}$ (د) لو س ص

---

٣٠ إذا كان : د (س) = $٢^{س}$ فإن مجموعة حل المعادلة :

د (٢ س) − ٣ د (س + ١) + د (٣) = ٠ هي ....

(أ) {٢} (ب) {١} (جـ) {١ ، ٢} (د) {٠ ، ٢}

---

٣١ مجموعة حل المعادلة : ٢ لو ٢ − لو س = لو (س + ٣) − لو ٧ هي ....

(أ) {٧} (ب) {٤} (جـ) {٧ ، ٤} (د) ∅

---

٣٢ إذا كان : س ، ص ∈ $ح^{+}$ − {١} وكان : $لو_{ص}$ س = $لو_{س}$ ص فإن : ....

(أ) س = ص (ب) س = $\frac{١}{ص}$ (جـ) س = ± ١ (د) أ ، ب معًا.

---

٣٣ معادلة محور التماثل لمنحنى الدالتين د ، ر : د (س) = $٣^{س}$ ، ر (س) = $\left(\frac{١}{٣}\right)^{س}$

هو ....

(أ) ص = ٠ (ب) س = ٠ (جـ) ص = س (د) ص = −س

الدالة د : د (س) = $\frac{١}{\sqrt{س + ٢}}$ متصلة لكل س ∈ ....

(أ) ع (ب) ع - {-٢} (جـ) [-٢ ، ∞[(د)]-٢ ، ∞[

مثلث مساحته $\frac{أ^٢ \text{ جا ب جا حـ}}{ك \text{ جا أ}}$ فإن : ك = ... ، ك ≠ ٠

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

إذا كانت د : ع - {٢} ⟵ ع - {١} حيث د (س) = $\frac{س + ١}{س - ٢}$

فإن : $د^{-١}$ (٤) = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

إذا كان : د (س + ٢) = $٥^{س}$ فإن : د (س) = ...

(أ) $٥^{س}$ (ب) $٥^{٢ - س}$ (جـ) $٥^{س - ٢}$ (د) $٥^{٢ س}$

مجموعة حل المتباينة : | س | > -١ هى ....

(أ)]٠ ، ∞[(ب) ع (جـ) ∅ (د) ع - {٠}

مجموعة حل المعادلة : $\sqrt[٣]{س^٢}$ - ٣ $\sqrt[٣]{س}$ + ٢ = ٠ هى ....

(أ) {١ ، ٨} (ب) {٩ ، ٣} (جـ) {٨} (د) {١}

مدى الدالة د : د (س) = س | س | هى ....

(أ) $ع^{+}$ (ب) $ع^{-}$ (جـ) ع (د) [٠ ، ∞[

٤ محافظة القليوبية

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ إذا كان : $٥^{س-٣} = ٢$ فإن : $٢٥^{س-٣} = $ ....

(أ) ١٠ (ب) ٦ (جـ) ٥ (د) ٤

---

٢ إذا كان منحنى : ص = $لو_{٤}$ (١ - أس) يمر بالنقطة $\left(\frac{١}{٤} ، -\frac{١}{٢}\right)$

فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٨

---

٣ $\underset{س \to \infty}{نها} \frac{س^{٢} + ٥}{س (٢ س^{٢} + ٣)} = $ ....

(أ) $\frac{٥}{٨}$ (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٥}{٣}$

---

٤ فى Δ أ ب حـ إذا كان : ٤ جا أ = ٣ جا ب = ٦ جا حـ

فإن : ق (∠ حـ) = ... (لأقرب درجة)

(أ) ٨٩° (ب) ٢٩° (جـ) ٥٧° (د) ٨٢°

---

٥ أبسط صورة للمقدار : $لو_{ب} أ^{٢} \times لو_{حـ} ب^{٣} \times لو_{أ} حـ = $ ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ١

---

٦ إذا كان : ص = $\sqrt[٣]{س}$ لكل س ≤ ٠ فإن الدالة العكسية لها هى ص = ...

(أ) $\frac{١}{٣} س^{٣}$ (ب) $س^{٣}$ (جـ) $س^{٣} - ١$ (د) $س^{-\frac{١}{٣}}$

---

٧ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{س^{٢} - ١}{س - ١} & ، س \neq ١ \\ ٢ أ & ، س = ١ \end{cases}$ متصلة عند س = ١

فإن : أ = ...

(أ) ٠ (ب) -٢ (جـ) ٢ (د) ١

في △ أ ب حـ يكون : حتا (أ + ب) = ...

(أ) $\frac{أ^2 + ب^2 - حـ^2}{2 أ ب}$ (ب) $\frac{حـ^2 - أ^2 - ب^2}{2 أ ب}$

(جـ) $\frac{ب^2 + حـ^2 - أ^2}{2 ب حـ}$ (د) $\frac{أ^2 + حـ^2 - ب^2}{2 أ حـ}$

مجموعة حل المعادلة : لو$_2$ س = 1 − لو$_2$ (س − 2) هي ....

(أ) {2} (ب) {−1} (جـ) {4 ، −1} (د) {1}

مدى الدالة د : د (س) = | س − 2 | هو ....

(أ) [0 ، ∞[(ب)]2 ، ∞[(جـ)]0 ، ∞[(د) [2 ، ∞[

$\lim_{س \to 2} \frac{س^5 - 32}{س^2 + 3 س - 10} = ...$

(أ) 80 (ب) $\frac{80}{7}$ (جـ) $\frac{7}{80}$ (د) $\frac{1}{80}$

△ أ ب حـ فيه : أ = 9 سم ، ب = 15 سم

، ق(∠حـ) = 106° فإن محيطه ≃ .... سم

(أ) 44 (ب) 24 (جـ) 34 (د) 28

مجموعة حل المتباينة : | 3 س − 2 | ≤ 7 هي ....

(أ) $[\frac{-5}{3} ، 3]$ (ب) ح − $[\frac{-5}{3} ، 3]$

(جـ) ح − $]\frac{-5}{3} ، 3[$ (د) ∅

إذا كانت د دالة فردية على [− س ، س]

فإن : د (− س) + د (س) = ...

(أ) 2 س (ب) غير معرفة. (جـ) −2 س (د) صفر

$\lim_{س \to 0} \frac{حا 2 س + 5 حا 3 س}{س} = ...$

(أ) 7 (ب) 5 (جـ) 17 (د) 10

١٦ أ ب جـ مثلث فيه : $\frac{جا أ}{٣} = \frac{٢ جا ب}{٤} = \frac{جا جـ}{٤}$ فإن : أ ب : ب جـ : جـ أ = ...

(أ) ٦ : ٥ : ٨   (ب) ٨ : ٥ : ٦   (جـ) ٧ : ٣ : ٤   (د) ٣ : ٤ : ٦

١٧ مجموعة حل المعادلة : |س| + س = ٠ هي ....

(أ) {٠}   (ب) $]-\infty ، ٠]$ (جـ) $]-\infty ، ٠[$ (د) $\varnothing$

١٨ نقطة تماثل الدالة د : د (س) = $\frac{١}{س}$ + ٢ هي ....

(أ) (٠ ، ٢)   (ب) (٢ ، ١)   (جـ) (٢ ، ٠)   (د) (٠ ، ٠)

١٩ $\underset{س \leftarrow ١}{نهــا} \frac{٤ - \sqrt{س + ١٥}}{١ - س^٢} = $ ....

(أ) ٤   (ب) $\frac{١}{٨}$ (جـ) $\frac{١}{١٦}$ (د) -٤

٢٠ إذا كان أ ب جـ مثلث فيه ق (∠ أ) : ق (∠ ب) : ق (∠ جـ) = ٣ : ٥ : ٤

فإن : جـ^٢ : أ^٢ = ...

(أ) $\sqrt{٦}$: ٢   (ب) ٢ : ٣   (جـ) ٤ : ٣   (د) ٣ : ٢

٢١ مجموع جذرى المعادلة : ٢٥^{س} - ١٢ × ٥^{س} + ٢٧ = ٠ يساوى ....

(أ) لو$_{٥}$ ١٢   (ب) ١٢   (جـ) لو$_{٥}$ ٢٧   (د) ٢٧

٢٢ إذا كانت د : ح ⟵ ح حيث د (س) = (أ + ١) س + ب - ٢ وكانت : د (س) تربط كل عدد حقيقى بنفسه فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (٢ ، ١)   (ب) (٣ ، ٠)   (جـ) (٢ ، ٠)   (د) (٠ ، ٠)

٢٣ $\underset{س \leftarrow \infty}{نهــا} \frac{٥ + س^{-٢}}{١ + ٣ س^{-٢}} = $ ....

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٥}{٤}$ (جـ) $\frac{٥}{٣}$ (د) ٥

أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٥ $\sqrt{٣}$ سم فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه يساوى .... سم

(أ) ٥ $\sqrt{٣}$ (ب) ١٠ $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٠ (د) ٥

مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{س + ٣}$ هو ....

(أ)]-٣ ، ∞[(ب) [-٣ ، ∞[(جـ) {-٣} (د) {٠}

المساحة المحصورة بين منحنيى الدالتين د : د (س) = |س + ٣| - ٢ ، ر (س) = صفر هى .... وحدة مربعة.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

متوازى أضلاع أ ب حـ ء فيه : ق (∠أ) = ٥٠° ، ق (∠ء ب حـ) = ٧٠° ، ب ء = ٨ سم فإن محيطه = ... سم

(أ) ٢٨ (ب) ١٩ (جـ) ٨,٥ (د) ٨٦

إذا كان : د (س) = ٤ س - ٥ ، ر (س) = ٣ س

فإن : (د ∘ ر) (٢) = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢٧ (د) ٣١

إذا كان : $٥^{س + ١} = ٧^{س + ١}$ فإن : $٣^{س + ١}$ = ...

(أ) صفر (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١

$\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٧ س + ٦}{٢ س^٢ - ٨ س + ٤}$ = ...

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) $\frac{١}{٢}$

فى أى مثلث Δ س ص ع يكون : $سَ^٢ + صَ^٢ - ٢ سَ صَ جتا ع$ = ...

(أ) ع (ب) $عَ^٢$ (جـ) $صَ^٢$ (د) $سَ^٢$

٣٢ إذا كان $س^{\frac{٣}{٢}} = ٨$ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ٩

٣٣ مجموعة حل المتباينة : $\sqrt{٤س^{٢} - ١٢س + ٩} \geq ٩$ هي ....

(أ) $[-٦ ، ١٢]$ (ب) $[-٣ ، ٦]$ (جـ) ع − $[-٣ ، ٦]$ (د) ع − $]-٣ ، ٦[$

٣٤ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{١}{س} \sqrt{٣ + ٤س^{٢}} =$ ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) −٢ (د) −٣

٣٥ $\lim\limits_{س \to -٢} \frac{(س + ٣)^{٥} - ١}{س^{٢} - ٤} =$ ....

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) $-\frac{٥}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $-\frac{١}{٤}$

٣٦ مدى الدالة د : د(س) $= \frac{١}{|س|}$ هو ....

(أ) ع − {٠} (ب) $]٠ ، \infty[$ (جـ) $[٠ ، \infty[$ (د) {٠}

٣٧ مجموعة حل المعادلة : $لو_{٢} س + لو_{٤} س = ٣$ هي ....

(أ) {٢} (ب) {٤} (جـ) {٢ ، ٤} (د) {٠}

٣٨ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{١ - جتا س + جا ٢س}{١ - جتا س - جا س} =$ ....

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ١ (د) صفر

٣٩ $\lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{(٢ - ٣هـ)^{٧} - ١٢٨}{٤هـ} =$ ....

(أ) ٣٣٦ (ب) −٣٣٦ (جـ) ٤٤٨ (د) −٤٤٨

٤٠ $\lim\limits_{س \to ٠} ٥س \, قتا ٢س =$ ....

(أ) $\frac{٥}{٢}$ (ب) ١٠ (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) صفر

٥ محافظة الشرقية

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ٤٥° وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ٦ سم فإن : أَ = ...

(أ) ١٣ (ب) ٦ √٢ (جـ) ١٢ (د) √٢

---

٢ مجموعة حل المعادلة : لو$_٢$ (٢$^{س - ٤}$) = ٥ − س هى ....

(أ) {٤} (ب) {٥ ، ٤} (جـ) {٥} (د) {٤ ، ٥}

---

٣ الدالة د : د (س) = س جتا س ....

(أ) زوجية. (ب) فردية.

(جـ) ليست زوجية ولا فردية. (د) لا شئ مما سبق.

---

٤ مجموعة حل المتباينة : $\sqrt{س^٢ - ٢س + ١}$ ≤ ٤ هى ....

(أ) [−٣ ، ٥] (ب) ح −]−٣ ، ٥[

(جـ)]−٣ ، ٥[(د) ح − [−٣ ، ٥]

---

٥ أ ب حـ مثلث فيه : ٣ جا أ = ٤ جا ب = ٦ جا حـ فإن أَ : بَ : حـَ = ...

(أ) ٣ : ٤ : ٦ (ب) ٤ : ٣ : ٢ (جـ) ٦ : ٣ : ٤ (د) ٢ : ٣ : ٤

---

٦ فى Δ أ ب حـ إذا كان : أَ = حـَ فإن : جتا حـ = ...

(أ) $\frac{أَ بَ}{حـَ}$ (ب) $\frac{حـَ}{٢ بَ}$ (جـ) $\frac{بَ}{٢ أَ}$ (د) $\frac{حـَ}{٢ أَ}$

---

٧ $\lim_{س \to ٠} \frac{س^٢ - س}{س}$ = ...

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) غير موجودة. (د) ١

٨ إذا كان : د (س) = س^{٢} + ٦ ، ر (س) = ٣ س

فإن : (د ∘ ر) (٣) = ...

(أ) ٧٥ (ب) ٨٧ (جـ) ٩٠ (د) ١٠٠

---

٩ مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{٤ - س}$ هو ....

(أ)]٤ ، ∞[(ب)]−٤ ، ∞[(جـ)]٤ ، ∞[(د)]−∞ ، ٤]

---

١٠ إذا كانت : ٧$^{س + ١}$ = ٣$^{٢ س + ٢}$ فإن : س = ...

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ٣ (د) ٧

---

١١ مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{٩ - س^{٢}}$ هو ....

(أ)]−٣ ، ٣[(ب) ح (جـ) ح −]−٣ ، ٣[(د) [−٣ ، ٣]

---

١٢ الدوال المعرفه بالقواعد الآتية كلها أحادية ما عدا ؟

(أ) د (س) = س^{٣} (ب) ر (س) = ٣ س

(جـ) ق (س) = $\frac{١}{س}$ (د) هـ (س) = |س|

---

١٣ فى △ أ ب حـ يكون المقدار : ٢ نق حا أ = ...

(أ) أ (ب) ب (جـ) حـ (د) مساحة (△ أ ب حـ)

---

١٤ نهـــا$_{س ← ١}$ $\frac{\sqrt{س + ٨} - ٣}{س - ١}$ = ...

(أ) ٦ (ب) $\frac{١}{٦}$ (جـ) −٦ (د) −$\frac{١}{٦}$

---

١٥ د (س) = $\begin{cases} س + ١ & \text{عندما } س > أ \\ ٣ س - ١ & \text{عندما } س < أ \end{cases}$ ، نهـــا$_{س ← أ}$ د (س) موجودة

فإن : أ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

١٦ إذا كانت : د (س) = $٧^{س}$ ، د (س) + د (س - ١) = ٥٦

فإن : قيمة س = ...

(أ) ٦ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

---

١٧ قيمة المقدار : ٢ لو ٢٥ + لو $\frac{٨}{١٥}$ + ٢ لو ٣ - لو ٣٠ = ...

(أ) ٦ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) -١

---

١٨ مجموعة حل المعادلة : | ٢ س - ٧ | = ٥ هى ....

(أ) {-١ ، -٦} (ب) {٦ ، -١} (جـ) {١ ، ٦} (د) {-٦ ، ١}

---

١٩ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتا} س + \text{جا} ٣ س}{١ - \text{جتا} س + \text{طا} ٢ س}$ = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) ١ (د) $\frac{٤}{٣}$

---

٢٠ $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٧} + ١٢٨}{س^{٤} - ١٦}$ = ...

(أ) ١٤ (ب) $\frac{٧}{٤}$ (جـ) -١٤ (د) ٨

---

٢١ $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{٧}{س}$ = ...

(أ) -٧ (ب) ١ (جـ) صفر (د) -١

---

٢٢ طول قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ الذى فيه : أ = ٤ سم ، ق(∠ أ) = ٣٠°

يساوى ....

(أ) ٨ (ب) ٢ (جـ) ٢ $\sqrt{٣}$ (د) ٤

---

٢٣ إذا كان : لو$_{٣}$ س = ٢ فإن : س = ...

(أ) ٩ (ب) ٨ (جـ) ٣ (د) ٥

---

٢٤ نقطة رأس المنحنى : د (س) = $(س - ٢)^{٢}$ + ٣ هى ....

(أ) (٢ ، -٣) (ب) (٢ ، ٣) (جـ) (-٢ ، ٣) (د) (-٢ ، -٣)

٢٥ منحنى الدالة د : د (س) = | س + ٣ | هو نفس منحنى الدالة ى : ى (س) = | س |

بإزاحة مقدارها ٣ وحدات ، تجاه ....

(أ) و س ← (ب) و س → (جـ) و ص ← (د) و ص →

٢٦ نهـا س ← ∞ $\frac{س^٢ + ٣}{س (٢ س^٢ + ٣)}$ = ...

(أ) $\frac{٥}{٨}$ (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٥}{٣}$

٢٧ في Δ أ ب حـ المقدار : $\frac{أ^٢ + ب^٢ - حـ^٢}{٢ أ ب}$ = ...

(أ) حتا أ (ب) حتا حـ (جـ) حتا ب (د) حا أ

٢٨ إذا كانت : د (س) = { س^٢ - ٢ س عندما س ≥ ١ ، ك س - ٣ عندما س < ١ } متصلة عند س = ١

فإن : ك = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٢٩ نهـا س ← ٠ $\frac{١٢ - ١٢ حتا س}{س}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١٢ (جـ) ١ (د) ٢٤

٣٠ $٣^{س + ٥} = \frac{١}{٢٧}$ فإن : س = ...

(أ) -٣ (ب) ٨ (جـ) -٨ (د) ٣

٣١ س ص ع مثلث فيه : سَ = ٤ سم ، صَ = ٥ سم ، ق (∠ ع) = ٦٠°

فإن : عَ = ... سم

(أ) ٣ (ب) $\sqrt{٢١}$ (جـ) ٤,٥ (د) ٢ $\sqrt{٥}$

٣٢ نهـا س ← ٣ $\frac{س^٢ - ٩}{س^٢ + س - ١٢}$ = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{٧}{٦}$ (جـ) $\frac{٦}{٧}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

٣٣ نهــا (س ← ∞) $\left(\frac{٣}{س^{٢}} - ٢\right)$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) −٣ (د) −٢

---

٣٤ نهــا (س ← ٠) $\frac{جا ٣ س}{٥ س^{٢} - ٤ س}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{-٣}{٤}$ (جـ) ٣ (د) $\frac{٣}{٥}$

---

٣٥ مجموعة حل المتباينة : |س + ٢| ≤ ٢ هي ....

(أ) [−٤ ، ٠] (ب) [−٤ ، ٠[(جـ) [٠ ، ٤] (د) ح − [−٤ ، ٠]

---

٣٦ إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = $لو_{م}$ س يمر بالنقطة (٨ ، ٣)

فإن : د (٤) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) −٢ (د) ٤

---

٣٧ مجموعة حل المعادلة : لو (س + ٨) − لو (س − ١) = ١ هي ....

(أ) {١} (ب) {٢} (جـ) {−١} (د) {٣}

---

٣٨ مجموعة حل المعادلة : $٣^{س} + ٣^{٢ - س} = ١٢$

(أ) {١ ، ٢} (ب) {٠ ، ٣} (جـ) {٣ ، ٤} (د) {−١ ، −٢}

---

٣٩ مجموعة حل المعادلة : |س + ٧| = |س − ٥|

(أ) {٥ ، −٧} (ب) ∅ (جـ) {−١} (د) {١}

---

٤٠ أ ب جـ مثلث فيه : أ = ٧ سم ، جـ = ٩ سم ، ق (∠جـ) = ٦٠°

فإن عدد حلول Δ أ ب جـ هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) ٣

٦ محافظة الغربية

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ $\lim_{ص \to ٢} \frac{ص^٥ - ٣٢}{ص - ٢} = \dots\dots$

(أ) ٣٦ $ص^٤$ (ب) ٣٢ × ١٢ (جـ) ٦٤

---

٢ إذا كانت : د (س) = ٤ س − ٥ ، ر (س) = $٣^س$

فإن : (د ∘ ر) (٢) = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢٧ (د) ٣١

---

٣ في △ أ ب جـ إذا كان نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث = ٤ سم

فإن : $\frac{أ + ب + جـ}{\text{جا أ} + \text{جا ب} + \text{جا جـ}} = \dots\dots$

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ٨ (د) ١٦

---

٤ إذا كان : د (س) = $٢^س$ فإن : $لو_٢$ د (س) = ...

(أ) ١ (ب) س (جـ) د (س) (د) ٢

---

٥ إذا كان : $لو_ب$ س + $لو_ب$ ٣ = $لو_ب$ ٢٧ − ١ فإن قيمة س بدلالة ب = ...

(أ) س = ٩ ب (ب) س = $\frac{١}{٩}$ ب (جـ) $\frac{٩}{ب}$ (د) $\frac{١}{٩ ب}$

---

٦ $\lim_{س \to ٠} \frac{٢ س + ٢ س^{-١}}{س + ٤ س^{-١}} = \dots\dots$

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٤}$

---

٧ إذا كان : د (س) = $س^٣$ + ٧ فإن : $د^{-١}$ (−١) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) −٢ (د) ٨

---

٨ مجموعة حل المعادلة : | ٢ س − ٤ | = | س + ١ | = ...

(أ) {١ ، ٥} (ب) {٥ ، −١} (جـ) {١ ، −٥} (د) {−٥ ، −١}

٩ كل الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ليست أحادية ما عدا ....

(أ) د (س) = س^{٢} (ب) د (س) = ٥

(جـ) د (س) = س + ٢ (د) د (س) = |س|

١٠ عدد حلول Δ أ ب حـ الذى فيه : ق (∠ حـ) = ١١٥° ، حـ = ١٢ سم ، أ = ٩ سم

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) صفر

١١ نهـــا$_{س \to \infty}$ (١ + ٢ س^{٢} − س^{٣}) = ...

(أ) ∞ (ب) − ∞ (جـ) صفر (د) −١

١٢ Δ س ص ع فيه : س = ٥ سم ، ص = ٣ سم

، ق (∠ ع) = $\frac{٢}{٣}$ π فإن : ع = ...

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ٤

١٣ $\frac{\text{لو } ٢٥}{\text{لو } ٥}$ = ...

(أ) ٢ (ب) لو ٥ (جـ) لو ٢ (د) لو ٢٠

١٤ مجال الدالة د : د (س) = $\frac{١}{|س| + ٢}$ هو ....

(أ) ح (ب) {٢ ، −٢} (جـ) ح − {٢ ، −٢} (د) ح − {٢}

١٥ نقطة رأس المنحنى : د (س) = (س + ٢)^{٢} − ٢ هى ....

(أ) (−٢ ، ٢) (ب) (٢ ، −٢) (جـ) (٢ ، ٢) (د) (−٢ ، −٢)

١٦ لو حا (θ) + لو قا (θ) = ... حيث θ ∈]٠ ، $\frac{π}{٢}$[

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) −١

١٧ نهـــا$_{هـ \to \text{صفر}}$ $\frac{(س + هـ)^{٧} - س^{٧}}{هـ}$ = ...

(أ) س^{٧} (ب) ٧ س^{٦} (جـ) صفر (د) ١

١٧ مجموعة حل المتباينة : |٢١ - ٣ س| ≤ ٧ فى ح هى ....

(أ) $]-\frac{4}{3} ، 2[$ (ب) $[-\frac{4}{3} ، 2]$

(ج) ح - $]-\frac{4}{3} ، 2[$ (د) ح - $[-\frac{4}{3} ، 2]$

---

١٨ إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = لو٢ (١ - أ س) يمر بالنقطة $(\frac{1}{8} ، -\frac{1}{2})$

فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (ج) ٤ (د) ٨

---

٢٠ إذا كانت : د (س) = $3^{س}$ فإن قيمة س التى تحقق المعادلة :

د (س + ١) - د (س - ١) = ٢٤ هى ....

(أ) ٢ (ب) صفر (ج) ٣ (د) ٨

---

٢١ محور تماثل الدالة د : د (س) = $س^2$ هو المستقيم ....

(أ) ص = صفر (ب) ص = س (ج) ص = - س (د) س = صفر

---

٢٢ فى جميع العلاقات التالية تكون ص دالة ماعدا ....

(أ) ص = جتا س (ب) ص = ٢

(ج) ص = $س^2$ - ١ (د) $ص^2$ = $س^2$ + ١

---

٢٣ كل الكميات الآتية غير معينة ماعدا ....

(أ) صفر ÷ صفر (ب) ∞ - ∞ (ج) ∞ + ∞ (د) ∞ ÷ ∞

---

٢٤ إذا كان Δ أ ب حـ قائم الزاوية ومتساوى الساقين ، نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه فإن مساحة Δ أ ب حـ = ...

(أ) نق (ب) ٢ نق (ج) $نق^2$ (د) π $نق^2$

... (٥ + س^١ − ٢ س^٢) = ...

(ب) ٥ (جـ) −٢ (د) ٤

الدوال الآتية زوجية ماعدا ....

(أ) د (س) = ما س (ب) د (س) = مَا س

(جـ) د (س) = س^٢ − ١ (د) د (س) = |س|

في Δ أ ب حـ إذا كان : حـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ + أ ب فإن : ق (∠ حـ) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ١٢٠°

إذا كان : ٢^س = ٥ فإن : س = ...

(أ) لو ٥ (ب) لو ٢ (جـ) لو$_٢$ ٥ (د) لو$_٥$ ٢

مجموعة حل المتباينة : |س − ١| < ٥ في ح هي ....

(أ) ح (ب) ح^+ (جـ)]−٤ ، ٦[(د) [−٤ ، ٦]

إذا كانت : د (س − ١) = ٢^(س + ١) فإن : د (س) = ...

(أ) ٢^س (ب) ٢^(س − ١) (جـ) ٢^(س + ٢) (د) ٢^(س − ٢)

نهـــا (س ← ∞) $\left(\frac{٣ س^٢ + ٢ س + ١}{س^٢ − ٣ س + ٢}\right)^٤$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢٧ (د) ٨١

نهـــا (س ← ٢) $\frac{جا (س − ٢)}{س^٢ − ٤}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) صفر (د) ٢

الدوال الآتية متصلة على ح ماعدا ....

(أ) د (س) = جا س (ب) د (س) = س^٢ − ٢

(جـ) د (س) = ظا س (د) د (س) = $\frac{٥ س + ٣}{س^٢ + ٤}$

٣٤ نهـــا [illegible] = ...

(أ) −٣ (ب) ٦ (جـ) صفر (د) ٩

---

٣٥ في Δ أ ب حـ إذا كان: جتا ب = $\frac{حـ}{٢ أ}$ فإن: Δ أ ب حـ فيه ......

(أ) حـ = أ (ب) حـ = ب (جـ) أ = ٢ ب (د) أ = ب

---

٣٦ نهـــا$_{س \to ٠}$ $\frac{ظا س}{س}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{٤}{\pi}$ (جـ) ٤ π (د) صفر

---

٣٧ في Δ أ ب حـ إذا كان أ : جا أ = ٦ : ١ فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٦

---

٣٨ إذا كانت: د (س) = { ٣ س² + أ س − ٢ عند س > ٣ ، ٢ س + ب عند س < ٣ }

وكانت: نهـــا$_{س \to ٢}$ د (س) = ١٦ فإن: أ + ب = ...

(أ) ٤ (ب) −١ (جـ) ١٣ (د) ٧

---

٣٩ في Δ أ ب حـ يكون: حـ (أ جتا ب + ب جتا أ) = ...

(أ) ٢ حـ² (ب) حـ² (جـ) أ² (د) ب²

---

٤٠ في Δ أ ب حـ: جتا (أ + ب) = ...

(أ) جتا حـ (ب) − جتا حـ (جـ) جا حـ (د) − جا حـ

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ إذا كان : د (س) = ٣س + ٢ فإن : د (-٢) = ...

(أ) ٢ (ب) صفر (جـ) -١ (د) ١

---

٢ مجال الدالة د حيث د (س) = $\sqrt{٤ - س}$ هو ....

(أ) [٤ ، ∞[(ب)]-∞ ، ٤] (جـ)]٤ ، ∞[(د)]-∞ ، ٤[

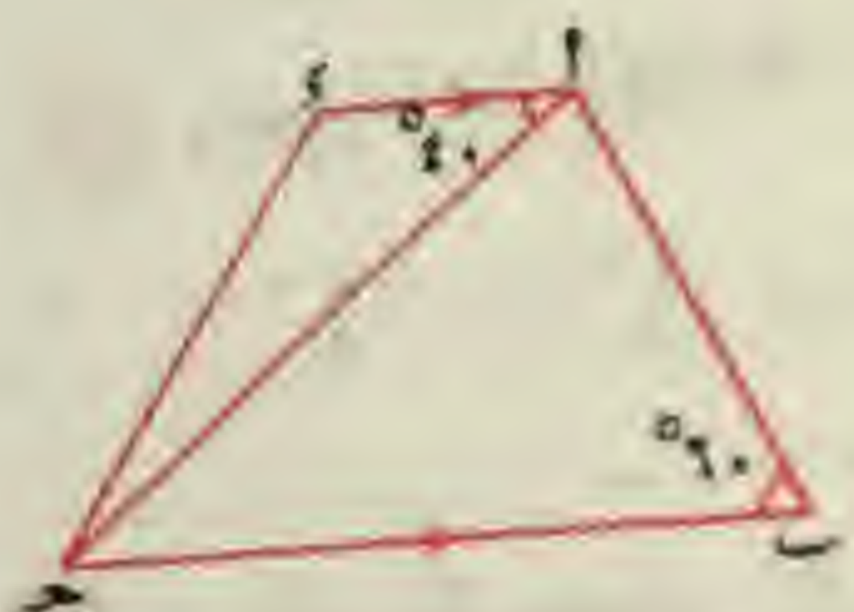
---

٣ في الشكل المقابل :

أ د // ب جـ ، أ ب = ٤ سم

، ق(∠د أ جـ) = ٤٠° ، ق (∠ب) = ٦٠°

فإن : طول أ جـ = ... سم

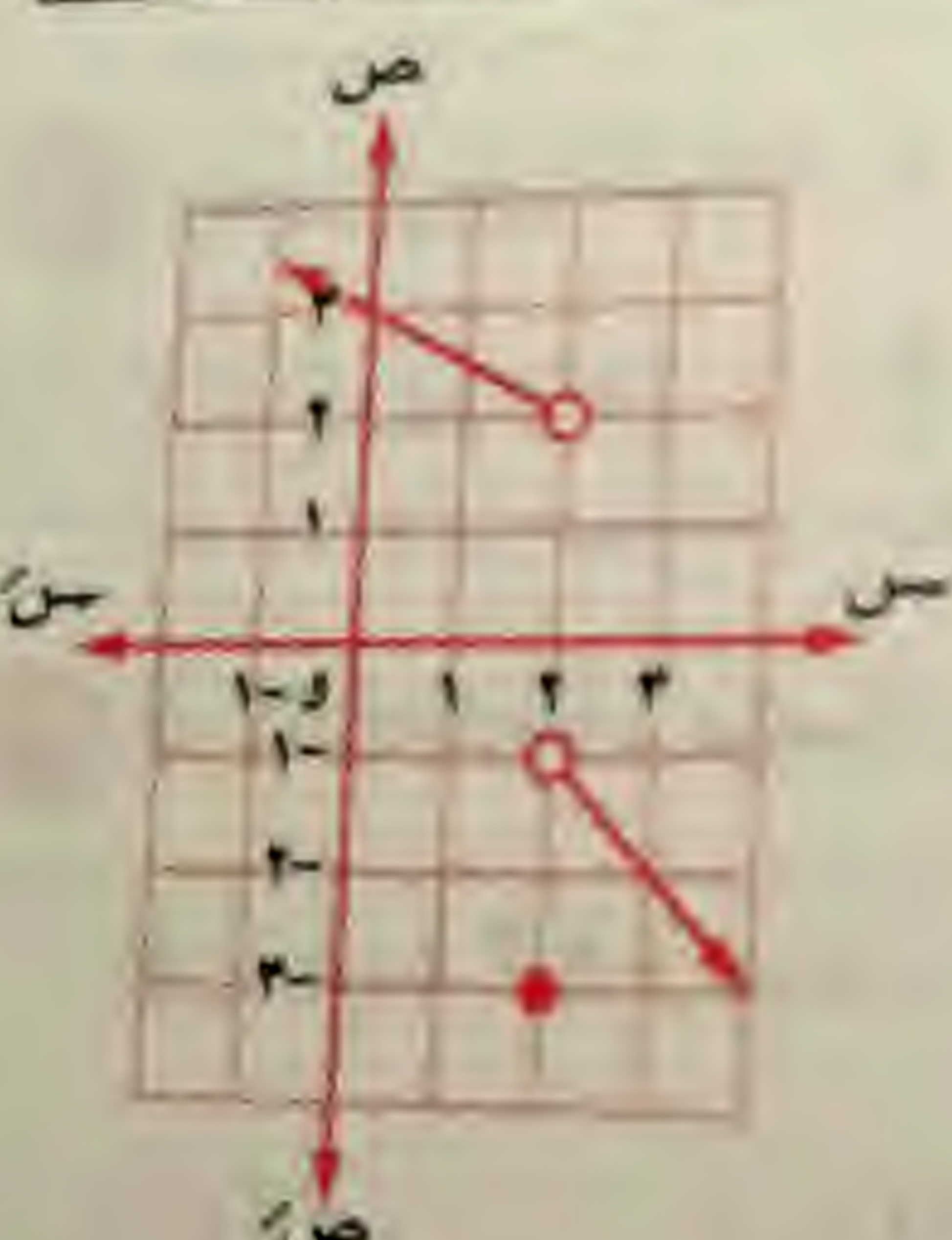


(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ٤

---

٤ في الشكل المقابل :

نهـا د (س) = ...
س ← ٢



(أ) -٣

(ب) ٢

(جـ) -١

(د) غير موجودة.

---

٥ مجموعة حل المعادلة : لو$_{٢}$ (س - ٥) = ٣ هي ....

(أ) {١١} (ب) {٥} (جـ) {١٣} (د) {٨}

٦ إذا كانت د (س) = $\sqrt{س + ٥}$ ، ر (س) = $س^٢$

فإن : (د ∘ ر) (٢) = ...

(أ) ٧ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٩

---

٧ $\displaystyle \lim_{س \to ٠}$ د (س) = ٤ فإن : $\displaystyle \lim_{س \to ٠}$ [د (س) − ٤] = ...

(أ) ٤ (ب) صفر (جـ) ٥ (د) ٨

---

٨ طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث المتساوى الأضلاع الذى طول ضلعه ٦ $\sqrt{٣}$ سم يساوى ....

(أ) ١٢ (ب) ٢٤ (جـ) ١٨ (د) ٦

---

٩ مجموعة حل المعادلة : | ٢ س + ٥ | = ٧ فى ح هى ....

(أ) {١ ، −٦} (ب) {٦} (جـ) {١} (د) {−١}

---

١٠ نقطة تماثل منحنى الدالة د : د (س) = ٣ − $(س + ٢)^٢$ هو ....

(أ) (٣ ، ٢) (ب) (٢ ، ٣) (جـ) (−٢ ، ٣) (د) (−٢ ، −٣)

---

١١ مجموعة حل المتباينة : | ٢ س − ٥ | ≥ ٩ فى ح هى ....

(أ)]−∞ ، ٧] (ب) [−٢ ، ٧] (جـ) ح −]−٢ ، ٧[(د) ح − [−٢ ، ٧]

---

١٢ إذا كانت الدالة د متصلة عند س = ٢ حيث : د (س) = $\begin{cases} أ س^٢ + ٥ & \text{عندما } س \leq ٢ \\ ٩ − ب س & \text{عندما } س > ٢ \end{cases}$

فإن : قيمة ٢ أ + ب = ...

(أ) ٧ (ب) ١٤ (جـ) ٢ (د) −٢

---

١٣ مدى الدالة د حيث د (س) = $(س − ٣)^٢$ + ٤ هو ....

(أ)]−∞ ، ٣] (ب) [−٣ ، ٤] (جـ) [٤ ، ∞[(د)]−∞ ، ٤]

[illegible] د(س) = [illegible] تكون [illegible] في ح إذا كانت [illegible] ....

(أ) [illegible]   (ب) [illegible]   (جـ) [illegible]   (د) [illegible]

إذا كان محيط المثلث أ ب جـ يساوي ١٠ سم ، ق(∠ أ) = ٣٢°

، ق(∠ ب) = ٧٤° فإن طول $\overline{أ ب}$ = ... لأقرب سم

(أ) [illegible]   (ب) ٧   (جـ) [illegible]   (د) ٨

$\lim\limits_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س + ١} - ٢}{س - ٣}$ = ...

(أ) ١   (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) ٦   (د) $\frac{١}{٦}$

لو$_ب$ أ × لو$_{هـ}$ جـ × لو$_{جـ}$ ب × لو$_أ$ هـ = ...

(أ) صفر   (ب) ٤   (جـ) ١   (د) أ ب جـ هـ

$\lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{(٣ هـ - ١)^٥ + ١}{هـ}$ = ...

(أ) ٣   (ب) $\frac{٣}{٥}$ (جـ) ٣   (د) ٥

إذا كان س$^{\frac{٥}{٢}}$ = ٢ ص$^{\frac{٤}{٣}}$ = ٣٢ فإن : س + ص = ...

(أ) ١٦   (ب) صفر   (جـ) ١٦ ، −١٦   (د) صفر ، ١٦

أ ب جـ مثلث فيه : أ^٢ + ب^٢ − جـ^٢ + $\sqrt{٣}$ أ ب = ٠ فإن : ق(∠ جـ) = ...°

(أ) ٣٠   (ب) ١٥٠   (جـ) ٦٠   (د) ١٢٠

$\lim\limits_{س \to ٤} \frac{جا (س - ٤)}{س^٢ - ١٦}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٨}$ (ب) $\frac{١}{١٦}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) ٨

مجموعة حل المعادلة : لو$_٢$ س − ٢ لو$_س$ ٢ = ١ في ح هي ....

(أ) {٨ ، ٢}   (ب) {٨ ، $\frac{١}{٢}$}   (جـ) {٩ ، $\frac{١}{٣}$}   (د) {٨}

٢٣ إذا كانت الدالتين د ، ى حيث : د (س) = ٤ س − ١٢ ، ى (س) = أ س + ٣

كل منها عكسية للأخرى فإن : قيمة أ = ...

(أ) −٤ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) ٤ (د) ٣

---

٢٤ إذا كانت : نهـا (س ← ∞) $\frac{أ س + ٥}{٢ س − ٧}$ = ٣ فإن : قيمة أ = ... حيث أ ∈ ع

(أ) $\frac{٥}{٧}$ (ب) $\frac{١}{٦}$ (جـ) ٨ (د) ٦

---

٢٥ إذا كان منحنى الدالة : ص = لو$_{٨}$ (١ − أ س) يمر بالنقطة ($\frac{١}{٤}$ ، − $\frac{١}{٣}$)

فإن : قيمة أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٨ (جـ) ٣ (د) ٤

---

٢٦ مجال الدالة د حيث د (س) = لو$_{س}$ (٥ − س) هو ....

(أ)]٠ ، ٥[− {١} (ب) [٠ ، ٥]

(جـ)]٠ ، ٥[(د)]−∞ ، ٥[

---

٢٧ إذا كانت : د (س) = ٣^{س} فإن قيمة س التى تحقق العلاقة :

د (٢ س) − ٨ د (س) − د (٢) = ٠ هى ....

(أ) ٢ ، $\frac{١}{٣}$ (ب) ٢ ، صفر (جـ) ٢ (د) ٢ ، −١

---

٢٨ قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه ٣ سم ، ٥ سم ، ٧ سم

تساوى ....°

(أ) ١١٠ (ب) ١٥٠ (جـ) ١٠٠ (د) ١٢٠

---

٢٩ إذا كانت : نهـا (س ← ٠) $\frac{حا^{٢} أ س − ظا ٢ أ س^{٢}}{س^{٢}}$ = −١ فإن : قيمة أ = ...

(أ) −١ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) ٤

٣٠ مجموعة حل المتباينة : $\sqrt{س^٢ + ٤س + ٤} \leq ٧$ في ح هي ....

(أ)]-٩ ، ٥[(ب) ح - [-٩ ، ٥]

(ج) ح -]-٩ ، ٥[(د) [-٩ ، ٥]

---

٣١ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{\sqrt[3]{٨س^٣ + ٥س}}{س + ٦}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٨ (ج) ٤ (د) $\frac{١}{٢}$

---

٣٢ المساحة المحصورة بين منحنى الدالة د : د (س) = | س + ٢ | − ٢ ، محور السينات تساوى .... وحدة مربعة.

(أ) ٣ (ب) ٢ (ج) ٥ (د) ٤

---

٣٣ عدد حلول المثلث س ص ع الذى فيه : $\overline{سص}$ = ٥ سم ، $\overline{صع}$ = ٦ سم ، ق(∠س) = ٧٠° يساوى ....

(أ) صفر (ب) ٢ (ج) ١ (د) ٣

---

٣٤ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{س - س جا س}{س^٢}$ = ...

(أ) صفر (ب) غير موجودة. (ج) ١ (د) ٢

---

٣٥ كل الدوال المعرفة بالقواعد التالية أحادية ما عدا الدالة التى قاعدتها ....

(أ) د (س) = | س | حيث س > ٠ (ب) د (س) = س + ٦

(ج) د (س) = س^٣ (د) د (س) = (س − ٢)^٢

---

٣٦ مثلث أ ب جـ فيه ق (∠أ) : ق (∠ب) : ق (∠جـ) = ٢ : ٣ : ٤ ، أ ب = ١٢ سم فإن : طول $\overline{أجـ}$ ≈ .... سم

(أ) ١٠ (ب) ١١ (ج) ١٦ (د) ١٨

٣٧ إذا كانت د دالة فردية فإن : $\frac{٢ د (س) + ٨ د (-س)}{٣ د (س)}$ = ...

(أ) صفر　(ب) -٢　(جـ) -٤　(د) ٤

٣٨ إذا كانت الدالة د نهايتها موجودة عندما س ← -٣ حيث

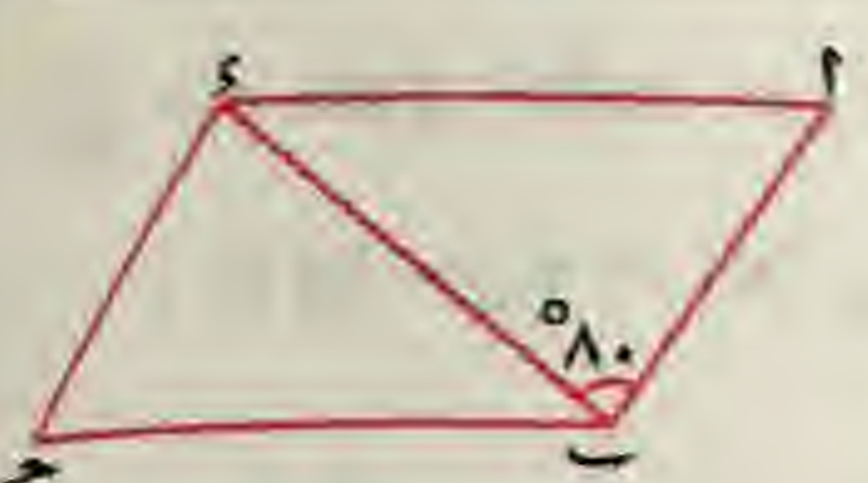
د (س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ + ٢ س - ٣}{س + ٣} & \text{عندما } س < -٣ \\ س + أ & \text{عندما } س > -٣ \end{cases}$　فإن : قيمة أ = ...

(أ) ٣　(ب) ٤　(جـ) ٢　(د) -١

٣٩ نهـــا (س ← -٢) $\frac{س^٧ + ١٢٨}{س^٤ - ١٦}$ = ...

(أ) ٩　(ب) -٩　(جـ) -١٤　(د) ١٤

٤٠ في الشكل المقابل :



أ ب جـ ء متوازى أضلاع فيه : ق (∠ أ ب ء) = ٨٠°

، ب ء = ٧ سم ، أ ب = ٥ سم

فإن محيط متوازى الأضلاع = ... لأقرب سم

(أ) ٢٥　(ب) ٢٦　(جـ) ٢٩　(د) ٣٠

اجب عن الأسئلة الآتية :

1 نقطة رأس منحنى الدالة د : د (س) = (٢ − س)^{2} + ٣ هي ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٢ ، −٣) (جـ) (−٢ ، ٣) (د) (−٢ ، −٣)

2 مجال الدالة د : د (س) = $\frac{\sqrt{س - ٢}}{س - ٢}$ هو ....

(أ) ح (ب) {٢} (جـ) [٢ ، ∞[(د) [٢ ، ∞[− {٢}

3 أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٥ $\sqrt{٣}$ سم فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه يساوى .... سم

(أ) ٥ $\sqrt{٣}$ (ب) ١٠ $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٠ (د) ٥

4 إذا كانت : نهـــا$_{س \to \infty}$ $\frac{أ س + ٦}{٢ س + ٧}$ = ٤ حيث أ ∈ ح فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

5 نوع الدالة د : د (س) = $\frac{جا س}{س}$ هى ....

(أ) زوجية. (ب) فردية. (جـ) لا زوجية ولا فردية. (د) أحادية.

6 المنحنى ر (س) = س^{2} + ٤ هو نفس المنحنى د (س) = س^{2} بإزاحة مقدارها ٤ وحدات فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{و س}$ (ب) $\overleftarrow{و ص}$ (جـ) $\overrightarrow{و س}$ (د) $\overrightarrow{و ص}$

7 قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه ٣ سم ، ٥ سم ، ٧ سم يساوى ....

(أ) ١٥٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ٦٠° (د) ٣٠°

8) [illegible]

(أ) ٤ (ب) [illegible] (جـ) صفر (د) $٦\frac{٢}{٣}$

---

9) إذا كان : د (س) = ٤ س − ٥ ، ر (س) = $٣^{س}$

فإن : (د ∘ ر) (٢) = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢٧ (د) ٣١

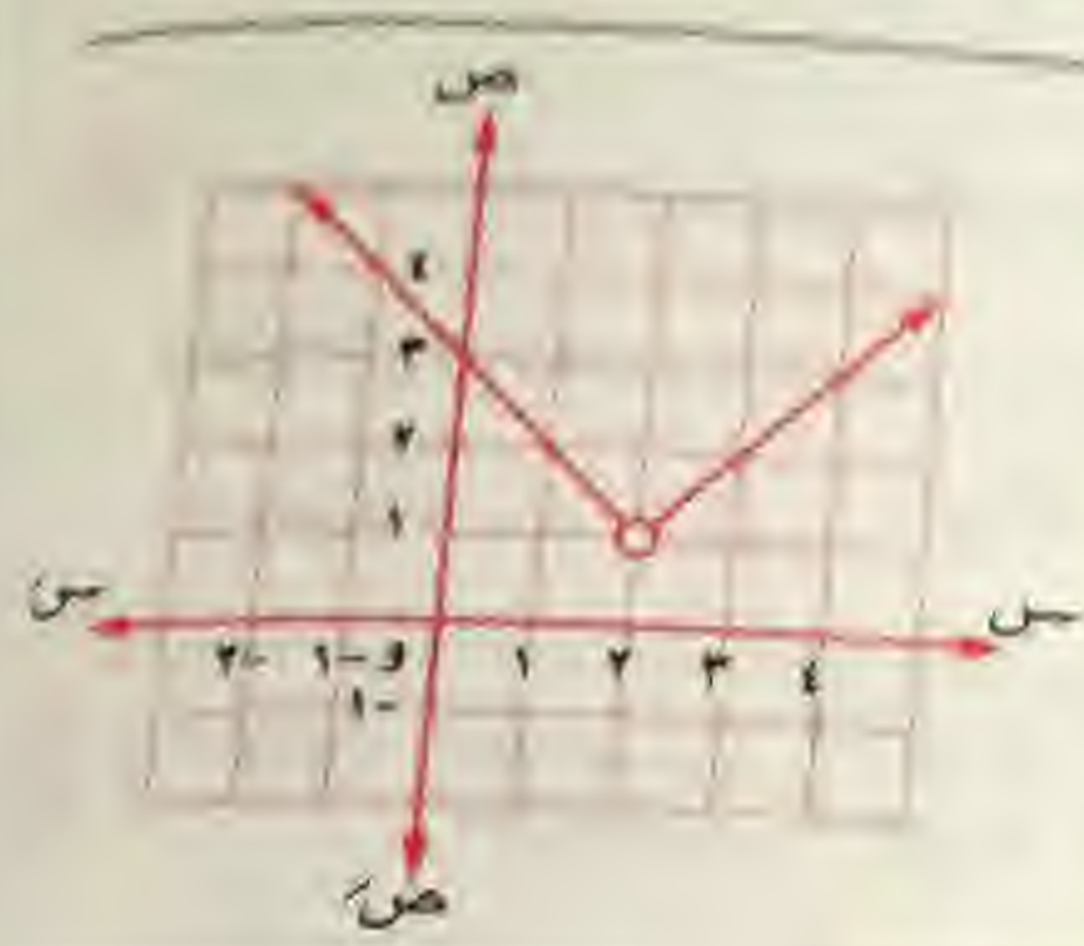
---

10) إذا كانت د دالة حيث : د (س) = ٧ س فإن : $د^{-١}$ (س) = ...

(أ) ٧ س (ب) $\frac{س}{٧}$ (جـ) $\frac{٧}{س}$ (د) ٧ − س

---

11) في الشكل المقابل :



$\lim_{س \to ٢}$ د (س) = ...

(أ) ١ (ب) −١

(جـ) غير موجودة. (د) ٢

---

12) إذا كانت د دالة فردية ، أ ∈ مجال الدالة فإن : د (أ) + د (− أ) = ...

(أ) ٢ د (أ) (ب) ٢ د (− أ) (جـ) صفر (د) د (أ)

---

13) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - ٧ س + ١٢}{س - ٣}$ = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ٧ (د) −٢

---

14) مجموعة حل المتباينة : $\sqrt{س^{٢} - ٤ س + ٤} > ٠$ في ح هي ....

(أ) ح − {٢} (ب) ح − {−٢} (جـ) ح (د) ∅

---

15) عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب جـ حيث : ق (∠ أ) = ٦٠° ، ب = ٣ سم ، أ = ٥ سم هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) لا يوجد مثلث. (د) عدد لا نهائي.

١٦ نهـا (س ← ٠) $\frac{\sqrt{س + ١} - ١}{س}$ = ...

(أ) صفر (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ليس لها وجود.

١٧ منحنى الدالة الزوجية يكون متماثلًا حول المستقيم ....

(أ) ص = س (ب) $\overleftrightarrow{ص ص}$ (جـ) $\overleftrightarrow{س س}$ (د) ص = − س

١٨ إذا كان : $س^{\frac{٢}{٣}}$ = ٨ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ٩

١٩ في Δ ء هـ و إذا كان : ق (∠ ء) = ٣٠° ، هـَ = ١٥ $\sqrt{٣}$

، ق (∠ هـ) = ٦٠° فإن : ءَ = ... سم

(أ) ٣٠ سم (ب) ٤٥ سم (جـ) ١٥ سم (د) ٦٠ سم

٢٠ نهـا (س ← ٠) $\frac{(س + ٢)^{٥} - ٣٢}{س}$ = ...

(أ) ٢٥ (ب) ٦٤ (جـ) ٨٠ (د) ١٠٠

٢١ إذا كانت : $لو_{٢}$ ص = س فإن الصورة الأسية لها هى ....

(أ) ص = $س^{٢}$ (ب) س = $ص^{٢}$ (جـ) س = $٣^{ص}$ (د) ص = $٣^{س}$

٢٢ إذا كان : د (س) = $٤^{س - ١}$ فإن : د (س + ١) = ...

(أ) $٤^{س}$ (ب) $٤^{س + ١}$ (جـ) $٤^{س + ٢}$ (د) $٢^{س}$

٢٣ أ ب جـ مثلث فيه : بَ = ٢ سم ، جَ = ٢,٥ سم ، جا أ = $\frac{٢}{٥}$

فإن : Δ أ ب جـ يكون ....

(أ) قائم الزاوية. (ب) متساوى الساقين.

(جـ) متساوى الأضلاع. (د) مختلف الأضلاع.

(٢٤) $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{2}}{\text{نهـــا}}$ (٢ س - ظا س) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) π (د) $\frac{\pi}{2}$

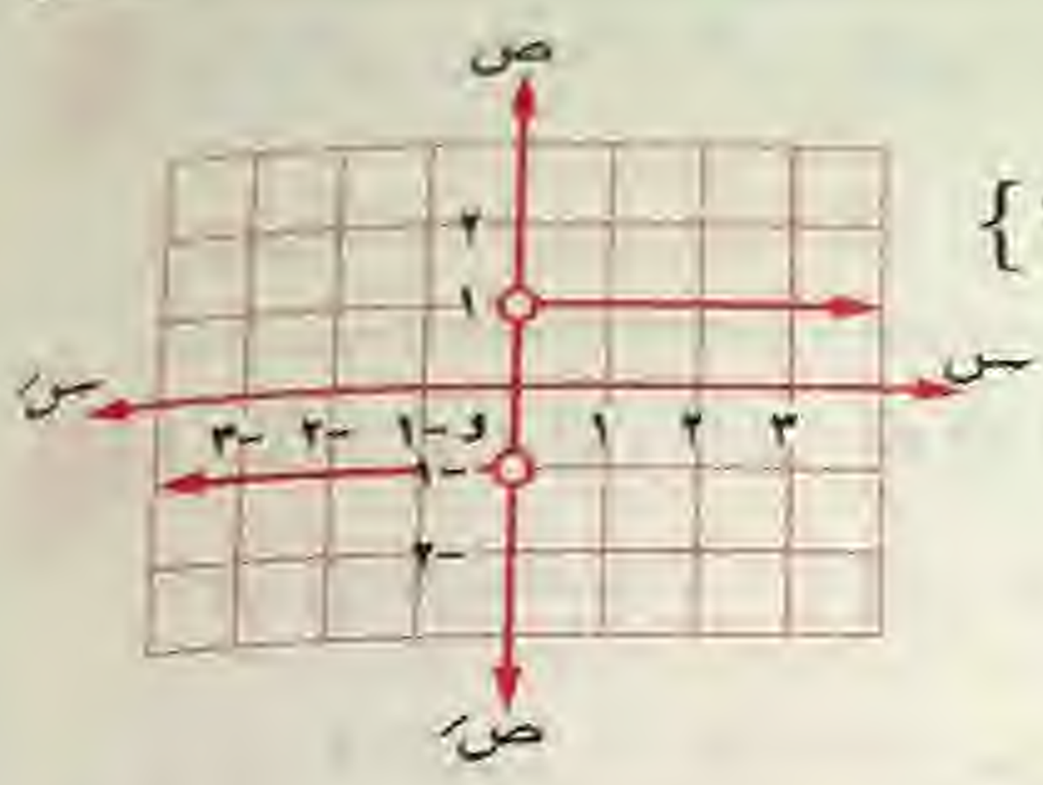
---

(٢٥) إذا كانت : $لو_س$ (س + ٦) = ٢ فإن : س ∈ ....

(أ) {٣ ، -٢} (ب) {٣} (جـ) {٣ ، ١} (د) {٦ ، ١}

---

(٢٦) مدى الدالة الممثلة بالشكل المقابل هو ....



(أ) {١} (ب) {١ ، -١}

(جـ) {-١} (د) ح

---

(٢٧) في المثلث س ص ع يكون : $\frac{٢ س}{حا س}$ = ... نق

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٨

---

(٢٨) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{حا^{٢}\ ٢ س}{س^{٢}} & ، \ س < ٠ \\ ٢ أ + ٣ جتا س & ، \ س > ٠ \end{cases}$

وكانت : $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}$ د (س) موجودة فإن : أ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) $-\frac{١}{٢}$

---

(٢٩) مجال الدالة د : د (س) = $لو_{١ - س}$ س هو ....

(أ) س > ٠ (ب) س < ١ (جـ) ٠ < س < ١ (د) ٠ ≤ س ≤ ١

---

(٣٠) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}$ ٥ س قتا ٢ س = ...

(أ) $\frac{٥}{٢}$ (ب) ١٠ (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) صفر

٣١ يقصد بحل المثلث ....

(أ) إيجاد أطوال أضلاعه.

(ب) إيجاد قياسات زواياه.

(جـ) إيجاد العلاقة بين أطوال أضلاعه وقياسات زواياه.

(د) إيجاد أطوال أضلاعه وقياسات زواياه.

---

٣٢ القيمة العددية للمقدار : $\frac{\text{لو } ٦٤}{\text{لو } ٨}$ تساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٨ (جـ) ٨٠ (د) ٧٢

---

٣٣ تكون الدالة الأسية التى أساسها أ تزايدية إذا كانت ....

(أ) أ > ٠ (ب) أ > ١ (جـ) ٠ < أ < ١ (د) أ = ١

---

٣٤ Δ ل م ن فيه : ق(∠ ل) = ٣٠° ، م ن = ٧ سم فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث تساوى ....

(أ) ١٤ (ب) ٧ (جـ) ٣,٥ (د) $\frac{١٤}{\sqrt{٣}}$

---

٣٥ إذا كانت : د(س) = $\begin{cases} \frac{\text{س}^٢ - ٩}{\text{س} - ٣} & \text{، س} \neq ٣ \\ ٢\text{أ} & \text{، س} = ٣ \end{cases}$ متصلة عند س = ٣

فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) −٣ (د) ٣

---

٣٦ إذا كان : لو س + لو ٥ = ٢ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٨ (جـ) ١٧ (د) ٢٠

---

٣٧ إذا كانت : $\lim_{\text{س} \to -١} \frac{\text{س}^٢ + \text{ك س} + \text{م}}{\text{س}^٢ - ١} = ٣$ فإن : ك + م = ...

(أ) −٤ (ب) −٥ (جـ) −٨ (د) −٩

? [illegible]

٨ الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هي ....

(أ) د(س) = جتا س　　(ب) د(س) = $س^٣$

(ج) د(س) = $س^٢$　　(د) د(س) = $س^٣ + س^٢$

---

٩ جملة مبلغ ٥٠٠٠ جنيه موضوع في بنك يعطي فائدة مركبة سنوية قدرها ٥٪ لمدة ٧ سنوات = ... جنيه.

(أ) ٦٧٥٠　　(ب) ٥٣٥٠　　(ج) ٧٠٣٥٫٥　　(د) ٨٥٠٠

---

١٠ إذا كانت: $\lim_{س \to ٢^+}$ د(س) = ل ، $\lim_{س \to ٢^-}$ د(س) = م

وكانت الدالة متصلة عند س = ٢ فإن: $ل^٢ + م^٢ - ٢ ل م$ = ...

(أ) صفر　　(ب) ١　　(ج) −١　　(د) ٢

٩ محافظة كفر الشيخ

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) د (س) = ٣ − $س^٢$ (ب) د (س) = $س^٢$ + ٣

(جـ) د (س) = $س^٤$ + $س^٢$ (د) د (س) = $س^٣$ + س

٢ مجال الدالة (د ∘ ر) حيث : د (س) = $\sqrt{س - ٢}$ ، ر (س) = $\sqrt{٦ - س}$

هو ....

(أ) ح (ب) [٢ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ٢] (د)]−∞ ، ٢[

٣ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٤ + س^٢ - ٢٠}{س - ٢}$ = ...

(أ) −٣٦ (ب) ٣٦ (جـ) ٣٠ (د) −٣٠

٤ $\lim_{س \to -٤} \frac{٣س^٢ - ٤٨}{س + ٤}$ = ...

(أ) ٣٢ (ب) −٣٢ (جـ) ٢٤ (د) −٢٤

٥ فى Δ س ص ع إذا كان : س ص = نق حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه فإن : ق (∠ ع) = ...°

(أ) ٣٠ (ب) ٣٠ أو ١٢٠ (جـ) ١٥٠ (د) ٣٠ أو ١٥٠

٦ إذا كانت : د (س) = $٣^{س - ٢}$ فإن مجموعة حل المعادلة : د (س − ١) = ٨١

هى ....

(أ) {٧} (ب) {٤} (جـ) {٣} (د) {٥}

٧ الدالة د حيث د (س) = $\frac{٢س - ١}{س - ١}$ تناقصية فى الفترة ....

(أ)]−∞ ، ١[(ب)]−∞ ، ١[،]١ ، ∞[

(جـ)]١ ، ∞[(د)]−∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[

٨ أ ب جـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = ٢٢ سم ، ب جـ = ٣٥ سم

، ء جـ = ١٨ سم ، ق(∠ أ ء ب) = ٦٥° ، ق(∠ ء ب أ) = ٥٠°

فإن : ق(∠ جـ ب ء) = ...

(أ) ٧٥َ ٨٠° (ب) ١٩ ٤٩َ ٤٢° (جـ) ٩ ٢٨َ ٤٤° (د) ٤٠ ٨٥°

---

٩ $\underset{س \leftarrow ٢}{نهــا} \dfrac{س^٢ - ٤}{س^٥ - ٣٢} =$ ....

(أ) ٢٠ (ب) ‎-٢٠ (جـ) $\dfrac{١}{٢٠}$ (د) $\dfrac{-١}{٢٠}$

---

١٠ $\underset{س \leftarrow ١}{نهــا} \dfrac{٢ - \sqrt{س^٢ + ٣}}{١ - س} =$ ....

(أ) $\dfrac{١}{٢}$ (ب) $\dfrac{-١}{٢}$ (جـ) ٢ (د) ‎-٢

---

١١ منحنى الدالة ر حيث : ر (س) = |س| - ٢ هو نفس منحنى الدالة

د : د (س) = |س| بإزاحة مقدارها وحدتان فى اتجاه ....

(أ) $\overrightarrow{وس}$ (ب) $\overleftarrow{وس}$ (جـ) $\overleftarrow{وص}$ (د) $\overleftarrow{وص}$

---

١٢ نقطة رأس منحنى الدالة د حيث : د (س) = (١ + س)^٢ - ٣ هى ....

(أ) (١ ، ٣) (ب) (١ ، -٣) (جـ) (-١ ، ٣) (د) (-١ ، -٣)

---

١٣ إذا كانت الدالة د حيث : د (س) = $\begin{cases} \dfrac{(س + ٢)^٦ - ٦٤}{٢ س} & س \neq ٠ \\ ك & س = ٠ \end{cases}$

متصلة عند س = ٠ فإن : ك = ...

(أ) ٩٦ (ب) ١٩٢ (جـ) ٣٨٤ (د) ٩٢

---

١٤ $\underset{س \leftarrow \infty}{نهــا} \dfrac{س^٧ - ٢ س^٢}{٢ س^٤ - ٣ س^٢ - ١} =$ ....

(أ) صفر (ب) ٣ (جـ) ∞ (د) ١

● س ص ع مثلث فيه : ق (∠ س) = ٨٠° ، ق (∠ ص) = ٦٠° ، ع = ١٠ سم فإن : س = ... لأقرب سم.

(أ) ١٢ (ب) ١٣ (جـ) ١٤ (د) ١٥

● في المثلث س ص ع : ٢ س ص جتا (س + ص) = ...

(أ) $س^2 + ص^2 - ع^2$ (ب) $ص^2 + ع^2 - س^2$

(جـ) $س^2 - ع^2 + ص^2$ (د) $ع^2 - س^2 - ص^2$

● نهـا (س ← ١) (٢ س - $\sqrt{س}$) = ...

(أ) ٢ (ب) -٢ (جـ) -١ (د) ١

● نهـا (س ← ٠) $\frac{جا س - جا س جتا س}{س^2}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

● مجموعة حل المعادلة : $\sqrt{س^2 - ٣ س} = ٨$ هي ....

(أ) ∅ (ب) {-٢ ، -٤} (جـ) {-٤} (د) {-٢}

● إذا كان : $٢^{س - ١} = ٤٤$ فإن : $٢^{س - ٢}$ = ...

(أ) ١٨ (ب) ٢٢ (جـ) ١٠ (د) ١٦

● مجموعة حل المعادلة : $٧^{س^2} = ٤٩^{س + ٤}$ هو ....

(أ) {-٢} (ب) {-٢ ، ٤} (جـ) {-٢ ، ٣} (د) {٢ ، -٤}

● الدالة د حيث : د (س) = { ٢ ، س > ٠ ؛ -٢ ، س < ٠ } متماثلة بالنسبة للنقطة ....

(أ) (٢ ، -٢) (ب) (٢ ، ٠) (جـ) (-٢ ، ٠) (د) (٠ ، ٠)

٢٣ Δ أ ب حـ فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، ق (∠ ب) = ٣٠°

فإن : مساحته = ... سم²

(أ) ٣٦ (ب) ٩ (جـ) ١٨ (د) ٢٧

---

٢٤ إذا كانت : $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س^2 - ٧ س + م}{س^2 - ١} = \frac{-٥}{٢}$ فإن : م = ...

(أ) -٦ (ب) ٦ (جـ) ٣ (د) -٣

---

٢٥ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٦٤ س^2 + ٧ س - ٢}}{٣ س + ٢}$ = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

---

٢٦ $\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{٢ س^3 + ٣ س^2 + ٤}{س^3 + ٨}$ = ...

(أ) ٢ (ب) -٢ (جـ) ١ (د) -١

---

٢٧ $\frac{أ}{حـ} \times \frac{\text{جا} حـ}{\text{جا} أ}$ = ...

(أ) ٢ نق (ب) ٢ نق² (جـ) ١ (د) ٢

---

٢٨ الدالة د حيث د (س) = ٥ س متماثلة حول ....

(أ) النقطة (٢ ، ١) (ب) المستقيم ص = ١

(جـ) النقطة (٥ ، ٠) (د) (٠ ، ٠)

---

٢٩ إذا كانت الدالة د : د (س) = ٢ س + ب هى داله عكسية للدالة

ر : ر (س) = حـ س + ٣ فإن : ب × حـ = ...

(أ) ٣ (ب) -٣ (جـ) ٦ (د) -٦

---

٣٠ منحنى الدالة د حيث : د (س) = لو$_ب$ س يمر بالنقطة (٣٢ ، ٥)

فإن : قيمة ب = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

مجموعة حل المتباينة : |٢ س − ١| ≤ ٣ هو ....

(أ) [−١ ، ٢] (ب) [−٢ ، ٤] (جـ) [−١ ، ٢] (د)]−١ ، ٢[

المثلث س ص ع فيه : ق (∠ س) = ١٠٠° ، س َ = ٣ سم

، ص = ٤ سم هذه الشروط ....

(أ) تحقق وجود مثلث وحيد. (ب) تحقق وجود مثلثين.

(جـ) تحقق وجود ثلاثة حلول. (د) لا تحقق وجود أى مثلث.

نهـا س ← ٣ (س² − ٧ س + ١٢) / (س − ٣) = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ٧ (د) −٢

إذا كان المنحنى ص = د (س) يمثل دالة حقيقية فإن صورته بإزاحة قدرها

٥ وحدات رأسيا لأسفل هو المنحنى ر (س) = ...

(أ) د (س − ٥) (ب) د (س + ٥) (جـ) د (س) + ٥ (د) د (س) − ٥

إذا كان : ٥^س = ١٧ فإن : س = ...

(أ) ٥ (ب) لو ١٧ ٥ (جـ) لو ٥ ١٧ (د) ١٧

مجموعة حل المعادلة : لو س² − (لو س)² = ٠ هى ....

(أ) {١} (ب) {١ ، ١٠} (جـ) {١ ، ١٠٠} (د) {١٠٠}

المثلث أ ب حـ فيه : أ = ٨ سم ، ب = ٥ سم ، ق (∠ حـ) = ٦٠°

فإن : ق (∠ أ) = ...

(أ) ٨٣° ٤٢َ ١٢ً (ب) ٨١° ٤٧َ ١٢ً

(جـ) ٣٨° ١١َ (د) ٦٠° ٢٣َ ١٠ً

٣٨ المستقيم ص = ٩ يقطع منحنى الدالة د حيث د (س) = $٣^{س}$

في النقطة ....

(أ) (٠ ، ١) (ب) (٢ ، ٠) (جـ) (٩ ، -٢) (د) (-٢ ، ٩)

٣٩ مدى الدالة د حيث : د (س) = - | $س^{٢}$ | هي ....

(أ) ح (ب)]٠ ، ∞[(جـ)]-∞ ، ٠] (د) ح - {٠}

٤٠ مجموعة حل المعادلة : $(لو_{٢} س)^{٢}$ - ٢ $لو_{٢}$ س = ٣ هو ....

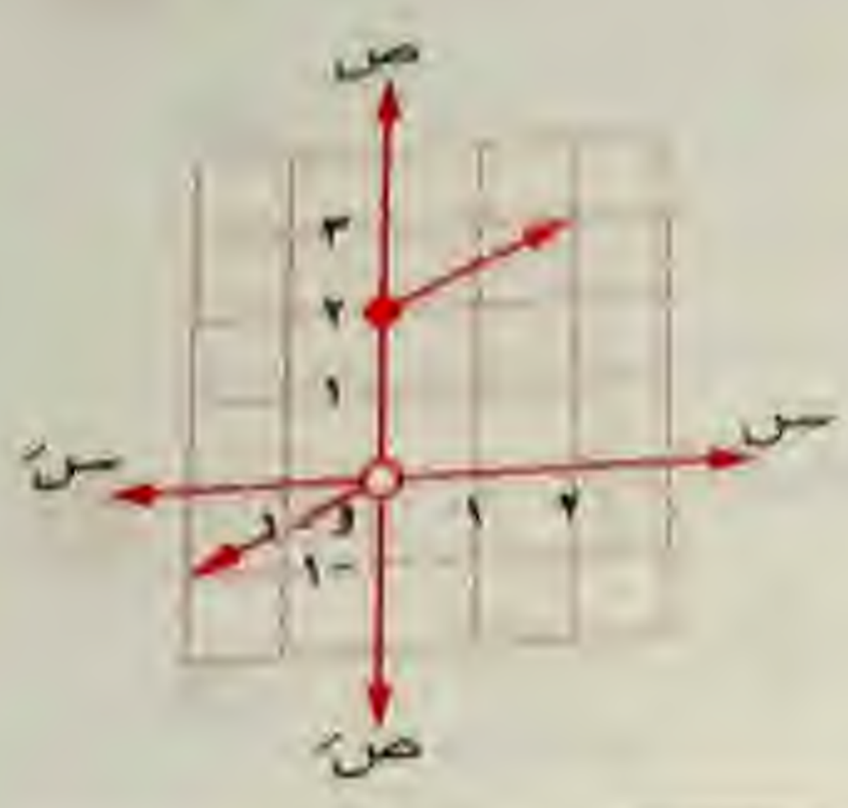
(أ) {١٦} (ب) {٨} (جـ) {٠.٥ ، ١٦} (د) {٠.٥ ، ٨}

١٠ محافظة المنيا

مديرية التربية والتعليم

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ الشكل المقابل يمثل دالة فى س مداها ....



(أ) ح − [٠ ، ٢]

(ب) ح − {٠}

(ج) ح −]٠ ، ٢]

(د) ح −]٠ ، ٢[

---

٢ إذا كانت : د (س) = ٧ فإن مدى الدالة د هو ....

(أ) ح　　(ب) ح+　　(ج) {٧}　　(د) ح − {٧}

---

٣ إذا كان مجال الدالة د : د (س) = $\frac{\text{س}}{|\text{س}| + \text{أ}}$ هو ح − {−٢ ، ٢}

فإن : أ = ...

(أ) ٢　　(ب) −٢　　(ج) ± ٢　　(د) صفر

---

٤ إذا تقاطع منحنى الدالة د مع منحنى الدالة د^{-1} فى النقطة (ك ، ٢ ك − ٣)

فإن : ك = ...

(أ) ٢　　(ب) ٣　　(ج) ٤　　(د) ٥

---

٥ إذا كان : $٣^{\text{س}} = ٥$ فإن : س = ...

(أ) ٢　　(ب) لو$_{٣}$ ٥　　(ج) لو$_{٥}$ ٣　　(د) $\frac{٥}{٣}$

---

٦ $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س}^{٢} + ٥}{٦}$ = ...

(أ) صفر　　(ب) $\frac{٥}{٦}$　　(ج) ١　　(د) ∞

٧ [illegible] = ...

(أ) [illegible] (ب) [illegible] (ج) −١ (د) −٥

٨ إذا كانت د [illegible] عند س ≠ ٣ ، د (٣) = ٢٠٠ متصلة عند س = ٣

فإن ٢ = ...

(أ) ٥ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (ج) ١٢٥ (د) $\frac{١}{٥}$

٩ إذا كان نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث س ص ع

فإن $\frac{\text{ص ع}}{\text{٢ جا س}}$ = ...

(أ) نق (ب) ٢ نق (ج) $\frac{١}{٢}$ نق (د) ٤ نق

١٠ المثلث أ ب حـ فيه : ٦ أ = ٤ ب = ٣ حـ فإن قياس أصغر زوايا المثلث = ... لأقرب دقيقة.

(أ) °٢٨ َ٥٧ (ب) °٤١ َ١٢ (ج) °٢٨ َ٥٧ (د) °٣٦ َ٥٢

١١ إذا كانت : د (س) = $\sqrt{\text{س}}$ ، ر (س) = س^{٢} فإن : (د ∘ ر) (س) = ...

(أ) س (ب) س^{٢} (ج) $\sqrt{\text{س}}$ (د) |س|

١٢ مدى الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٠ & : \text{س} \leq ٠ \\ ١ & : \text{س} > ٠ \end{cases}$ هو ....

(أ) {١} (ب) {٠} (ج) ح (د) {٠ ، ١}

١٣ إذا كانت : د : ح$^{+}$ ⟵ ح حيث د (س) = س − ٥ ، ر : [−١ ، ٥] ⟵ ح

حيث ر (س) = س − ٢ فإن مجال $\left(\frac{\text{د}}{\text{ر}}\right)$ (س) هو ....

(أ)]٠ ، ٥] (ب)]٠ ، ٥] − {٢} (ج)]١ ، ∞[(د) ح

نقطة رأس المنحنى للدالة د : د (س) = $(٢ - س)^{٢} + ٣$ هي ....

(أ) (٢ ، ٣)　(ب) (٢ ، -٣)　(جـ) (-٢ ، ٣)　(د) (-٢ ، -٣)

في الدالة الأسية د : د (س) = $أ^{س}$ ، أ > ١ تكون د (س) > ١ عندما س ∈ ....

(أ) ح　(ب) $ح^{+}$　(جـ) $ح^{-}$　(د) ص

إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{طا س}}{\pi - ٢\,\text{س}} & : ٠ < \text{س} < \dfrac{\pi}{٢} \\ \text{حا}(\pi - \text{س}) & : \text{س} > \dfrac{\pi}{٢} \end{cases}$

فإن : $\lim_{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}}$ د (س) = ...

(أ) ٢　(ب) $\frac{\pi}{٢}$　(جـ) π　(د) غير موجودة.

$\lim_{\text{س} \to \frac{\pi}{٤}} \dfrac{\text{طا س}}{\text{س}}$ = ...

(أ) صفر　(ب) ١　(جـ) $\frac{٤}{\pi}$　(د) ليس لها وجود.

$\lim_{\text{س} \to \infty} \dfrac{٥ + \text{س}^{-٢}}{٣\,\text{س}^{-٢} + ١}$ = ...

(أ) $\frac{٥}{٤}$　(ب) $\frac{٥}{٣}$　(جـ) ٥　(د) $\frac{١}{٣}$

س ص ع مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه $١٠\sqrt{٣}$ سم فإن طول قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث يساوى .... سم

(أ) ٥　(ب) ١٠　(جـ) ١٥　(د) ٢٠

أ ب حـ مثلث فيه : $\dfrac{\text{حا أ}}{٣} = \dfrac{٢\,\text{حا ب}}{٥} = \dfrac{\text{حا حـ}}{٤}$　فإن : أَ : بَ : حَ = ...

(أ) ٦ : ٥ : ٨　(ب) ٨ : ٥ : ٦　(جـ) ٧ : ٢ : ٤　(د) ٣ : ٥ : ٤

٢١ الشكل المقابل يمثل دالة في س مجالها ....



(أ) ح

(ب) ح −]−٢ ، ٢[

(جـ) ح − [−٢ ، ٢]

(د) ح − {٠}

---

٢٢ إذا كانت د دالة فردية ، ٢ ∈ مجال د فإن : د (٢) + د (−٢) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ د (٢) (جـ) ٢ ٢ (د) د (٢)

---

٢٣ $\underset{س \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{جا ٢س \; ظا ٣س}{٤ س^{٢}} = ...$

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) ٦

---

٢٤ إذا كان : $\sqrt{٢} \times \sqrt[٣]{٣} = \sqrt[٦]{س}$ فإن : س = ...

(أ) ٢٧ (ب) ٤٨ (جـ) ٧٢ (د) ١٠٨

---

٢٥ إذا كان : لو (س + ١١) = ٢ فإن : س = ...

(أ) −٩ (ب) ٢٢ (جـ) ٨٩ (د) ٩١

---

٢٦ $\underset{س \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{٢ س}{جا ٣ س} = ...$

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) ٦ (د) ليس لها وجود

---

٢٧ $\underset{س \leftarrow ١}{نهــا} \frac{١ - \sqrt[ن]{س}}{١ - \sqrt[م]{س}} = ...$

(أ) ١ (ب) $\frac{ن}{م}$ (جـ) −١ (د) $\frac{م}{ن}$

... إذا كانت : د (س) = { ٣ س − ١ ، س ≠ ٢ ؛ ٦ ، س = ٢ }

نهـا د (س) = ...

(ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ليس لها وجود.

... س ص ع المقدار : $\frac{س^2 + ص^2 - ع^2}{٢ س ص}$ = ...

(أ) جتا س (ب) جتا ص (جـ) جتا ع (د) جا ع

... الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = ٨ سم

ب جـ = ٦ سم ، ق (∠ ب) = ٩٠°

ء جـ = ٥ سم ، ق (∠ أ جـ ء) = ٦٠°

فإن مساحة الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ء جـ = ... سم²



(أ) ٩ π (ب) ١٦ π (جـ) ٢٥ π (د) ٤٩ π

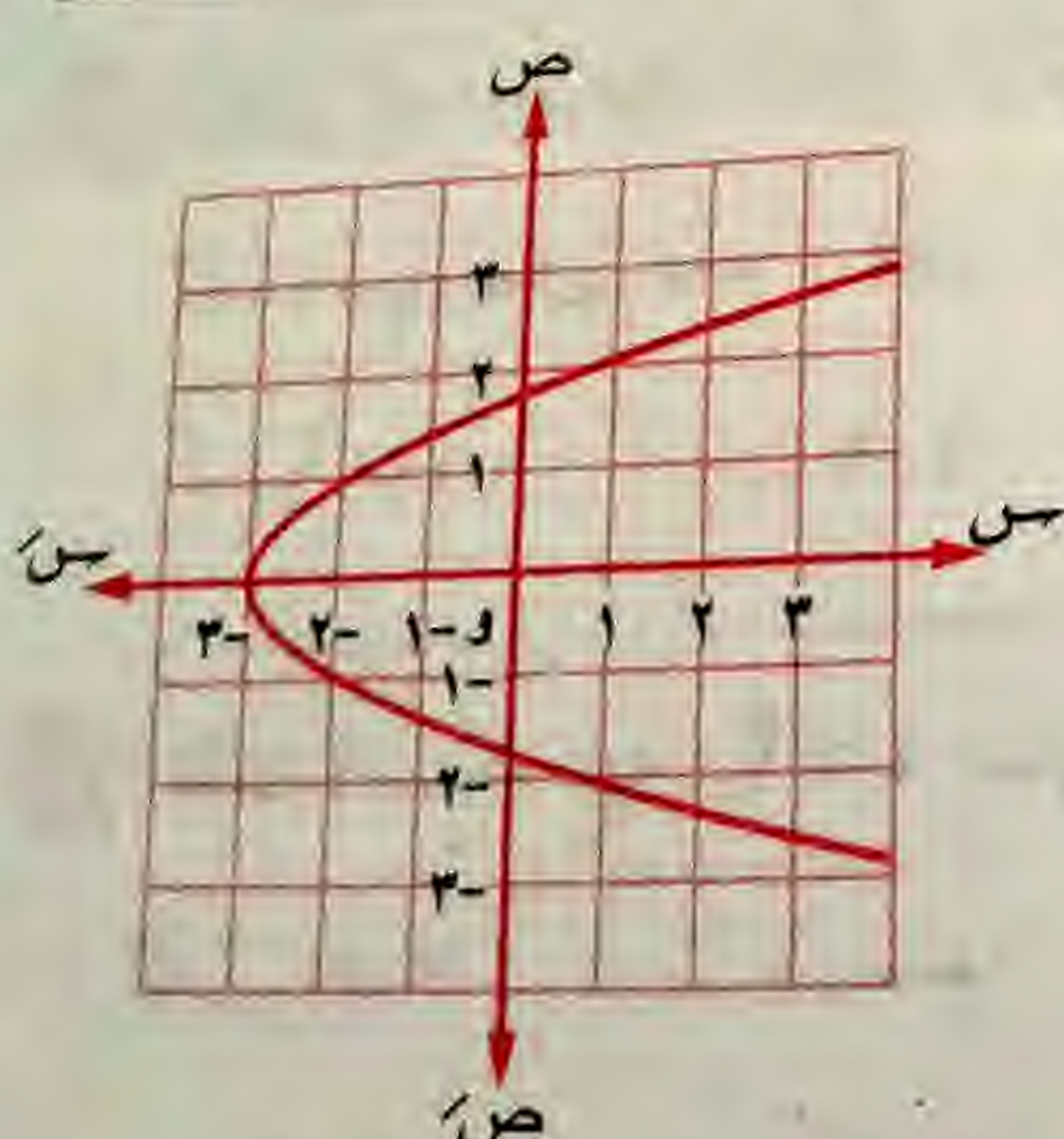
منحنى الدالة ر : ر (س) = س² + ٤ هو نفس منحنى الدالة د : د (س) = س²

بإزاحة مقدارها ٤ وحدات فى اتجاه ....

(أ) و س (ب) و س´ (جـ) و ص (د) و ص´

المنحنى الموضح بالشكل المقابل متماثل حول المستقيم

الذى معادلته ....



(أ) س = صفر

(ب) ص = صفر

(جـ) ص = −٢

(د) س = ٢

٣٣ إذا كانت : س ∈ [-١ ، ١] فإن : |٢ س - ٣| ≥ ....

(أ) ٣ (ب) ١ (ج) ٥ (د) -٥

---

٣٤ المقدار : $\frac{٣ \text{ لو } ٢}{\text{لو } ٤ + \text{لو } ٢}$ يكافئ المقدار ....

(أ) لو$_٢$ ٢ (ب) لو$_٨$ ٢ (ج) لو$_{١٠}$ ٨ (د) لو$_٢$ ٨

---

٣٥ تكون الدالة الأسية التي أساسها أ تناقصية إذا كانت ....

(أ) أ > ٠ (ب) أ < ٠ (ج) ٠ < أ < ١ (د) -١ < أ < ٠

---

٣٦ إذا كان : لو$_٢$ (٤ + لو$_٢$ س) = ٢ فإن : س = ...

(أ) ١٦ (ب) ٣٢ (ج) ٦٤ (د) ١٢٨

---

٣٧ $\lim_{س \to ١} \frac{س^{أ} - س^{ح}}{س^{أ} - س^{ء}}$ = ...

(أ) $\frac{أ + ح}{أ + ء}$ (ب) أ س$^{ح - ء}$ (ج) $\frac{أ - ح}{أ - ء}$ (د) $\frac{ح}{ء}$

---

٣٨ إذا كانت د : د (س) = $\frac{س^٢ - ٢٥}{س - ٥}$ حيث س ≠ ٥ فإن قيمة د (٥) التي تجعل الدالة متصلة عند هذا الموضع = ...

(أ) ١٠ (ب) صفر (ج) ٢٥ (د) غير معرفة.

---

٣٩ المثلث أ ب ح فيه : ق (∠ أ) = ٤٠° ، ق (∠ ح) = ٣٥° ، طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه ٦ سم فإن : أ = ... سم

(أ) ١١,٦ (ب) ٦,٩ (ج) ٧,٧ (د) ٩,٦

---

٤٠ المثلث أ ب ح فيه : أ = ٥ سم ، ب = ٧ سم ، ق (∠ ح) = ٦٥°

فإن : ح = ... سم

(أ) ٦,٧ (ب) ٧,٦ (ج) ٥,٧ (د) ٧,٥

إرشادات نماذج اختبارات الكتاب المدرسى فى التفاضل وحساب المثلثات

الاختبار الأول

١

① (جـ) ② (ب) ③ (د) ④ (جـ)

٢

(أ) ① $\frac{٨٠}{٧}$ ② ١٧

(ب) ق (∠أ) ≃ ٣٥ ٤٨° ، ق (∠ب) ≃ ١٤ ٦٣°

، ق (∠حـ) = ١١ ٦٨° ، حـ = ٢٦ سم

٣

(أ) ① صفر ② ١ ③ غير موجودة

(ب) محيط متوازى الأضلاع ≃ ٢٨ سم

٤

(أ) ق (∠ب) = ٩ ٦٤° أ ، ٥١ ١١٥°

(ب) ٢ = $-\frac{١}{٢}$

٥

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{١٦}$

الاختبار الثانى

١

① (د) ② (د) ③ (أ) ④ (جـ)

٢

(أ) ٢ = -١

(ب) ق (∠حـ) = ٩٠° ، مساحة Δ أب حـ = ٢٤ سم²

٣

(أ) $\frac{٣}{٢}$

(ب) حـ ≃ ١٩,٥٠٤ سم ، ق (∠أ) = ٢٠ ٢٦°

، ق (∠ب) = ٤٠ ٤٧°

٤

(أ) $-\frac{٥}{٤}$

(ب) أثبت بنفسك ، مساحة الشكل أب حـ ء ≃ ١٢٤ سم²

٥

(أ) ① $\frac{١}{٤}$ ② ٢

(ب) ٦١,٩ سم²

إرشادات نماذج الامتحانات النهائية

النموذج الأول

١ (ب) **٢** (جـ) **٣** (ب) **٤** (ب)

٥

∵ حـ² = أ² + ب² - ٢ أ ب جتا حـ

= ٤٩ + ٨١ - ٢ × ٧ × ٩ جتا ٢٣ ٩٦°

∴ حـ = ١٢ سم

، مساحة Δ أب حـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب جا حـ

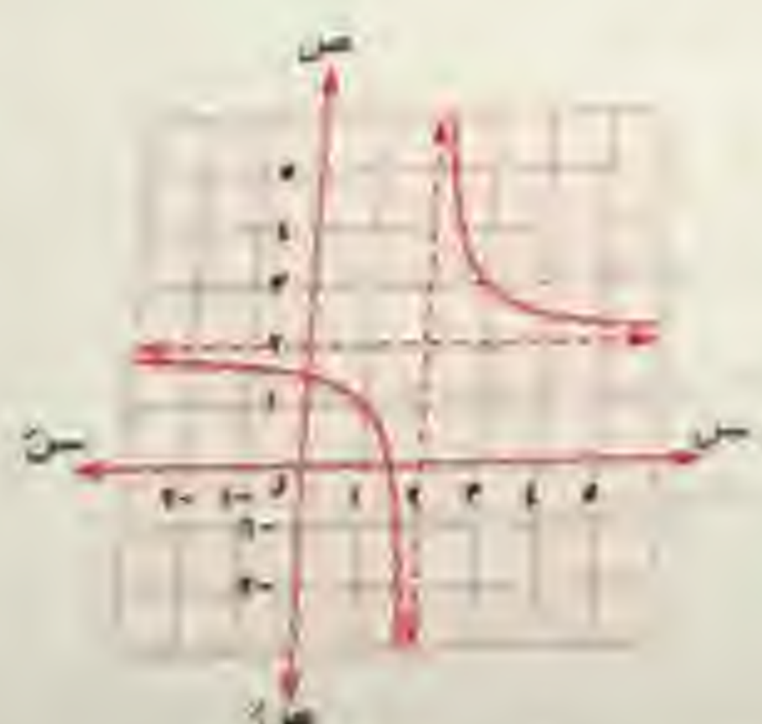
= $\frac{١}{٢}$ × ٧ × ٩ جا ٢٣ ٩٦°

= ٣١ سم²

٦ (ب) **٧** (أ)

٨

ر (س) = $\frac{١}{س - ٢}$ + ٢



مدى الدالة ر هو ح - {٢}

، ر تناقصية فى كل من]- ∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[

٩ (جـ) **١٠** (أ) **١١** (ب)

١٢ (جـ) **١٣** (أ) **١٤** (جـ)

١٥

بوضع ٢ - س ≤ ٠ ∴ س ≥ ٢

∴ مجال د هو]- ∞ ، ٢] ، مدى د هو [٢ ، ∞[

، ∵ ص = ٢ + $\sqrt{٢ - س}$ وبتبديل المتغيرين

∴ س = ٢ + $\sqrt{٢ - ص}$

∴ $\sqrt{٢ - ص}$ = س - ٢

∴ ٢ - ص = س² - ٤ س + ٤

∴ ص = - س² + ٤ س - ٢

∴ د⁻¹ (س) = - س² + ٤ س - ٢

، مجال د⁻¹ = مدى د = [٢ ، ∞[

، مدى د⁻¹ = مجال د =]- ∞ ، ٢]

١٦ (جـ) **١٧** (ب) **١٨** (أ)

١٩ (د) **٢٠** (د)

٢١

د (٢⁺) = نهــا (س ← ٢⁺) (٥ س - ٤) = ٦

، د (٢⁻) = نهــا (س ← ٢⁻) (س² - س + ٤) = ٦

∴ د (٢⁺) = د (٢⁻) = ٦

∴ نهــا (س ← ٢) د (س) = ٦

، ∵ د (٢) = ك

∴ ك = ٦ حتى تصبح د متصلة عند س = ٢

٢٢ (أ) **٢٣** (د) **٢٤** (ب)

٢٥ (أ) **٢٦** (جـ) **٢٧** (جـ)

٢٨ (ب) **٢٩** (جـ) **٣٠** (أ)

٣١ (أ) **٣٢** (ب)

النموذج الثانى

١ (جـ) **٢** (أ)

إرشادات نماذج اختبارات الكتاب المدرسى فى التفاضل وحساب المثلثات

الاختبار الأول

1

① (جـ) ② (ب) ③ (د) ④ (جـ)

2

(أ) ① $\frac{8}{7}$ ② ١٧

(ب) ق(∠أ) = ٢٥° ٤٨َ ، ق(∠ب) = ٦٤° ٦٣َ

، ق(∠جـ) = ٦٨° ١١َ ، جـ = ٢٦ سم

3

(أ) ① صفر ② ١ ③ غير موجودة

(ب) محيط متوازى الأضلاع = ٣٨ سم

4

(أ) ق(∠ب) = ٦٤° ٩َ ، أو ١١٥° ٥١َ

(ب) أ = $-\frac{1}{2}$

5

(أ) ٢ (ب) $\frac{1}{16}$

الاختبار الثانى

1

① (د) ② (د) ③ (أ) ④ (جـ)

2

(أ) أ = -١

(ب) ق(∠جـ) = ٩٠° ، مساحة △ أ ب جـ = ٢٤ سم²

3

(أ) $\frac{3}{2}$

(ب) جـ = ١٩.٥٠٤ سم ، ق(∠أ) = ٢٦° ٢٠َ

، ق(∠ب) = ٤٧° ٤٠َ

4

(أ) $-\frac{5}{4}$

(ب) أثبت بنفسك ، مساحة الشكل أ ب جـ ء = ١٢٤ سم²

5

(أ) ① $\frac{1}{4}$ ② ٢

(ب) ٦١.٩ سم²

إرشادات نماذج الامتحانات النهائية

النموذج الأول

1 (ب) **2** (جـ) **3** (ب) **4** (ب)

5

∵ جـ² = أ² + ب² - ٢ أ ب جتا جـ

= ٤٩ + ٨١ - ٢ × ٧ × ٩ جتا ٩٦° ٣٢َ

∴ جـ = ١٢ سم

، مساحة △ أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ أ ب جا جـ

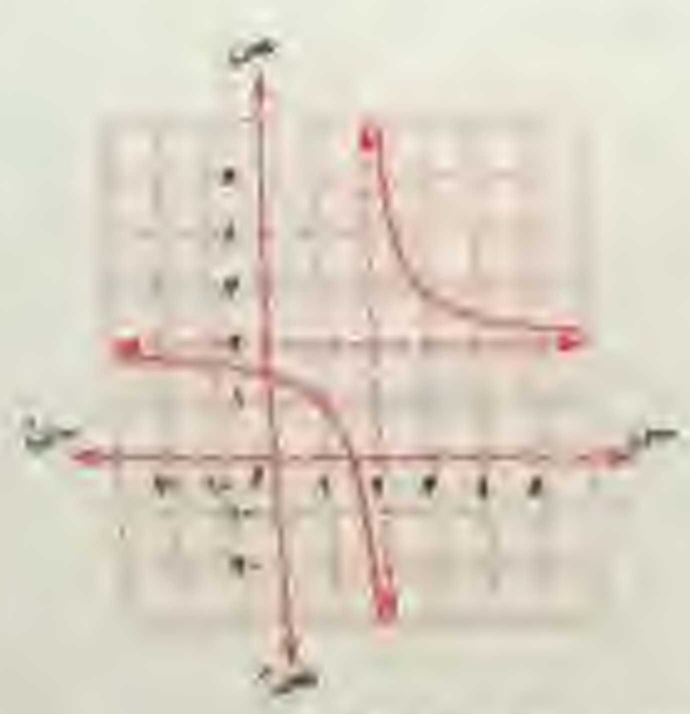
= $\frac{1}{2}$ × ٧ × ٩ جا ٩٦° ٣٢َ

= ٣١ سم²

6 (ب) **7** (أ)

8

ر(س) = $\frac{1}{س - 2}$ + ٢



مدى الدالة ر هو ح - {٢}

، ر تناقصية فى كل من]-∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[

9 (جـ) **10** (أ) **11** (ب)

12 (جـ) **13** (أ) **14** (جـ)

15

بوضع ٢ - س ≤ ٠ ∴ س ≥ ٢

∴ مجال د هو]-∞ ، ٢] ، مدى د هو [٢ ، ∞[

∵ ص = ٢ + $\sqrt{2 - س}$ وبتبديل المتغيرين

∴ س = ٢ + $\sqrt{2 - ص}$

∴ $\sqrt{2 - ص}$ = س - ٢

∴ ٢ - ص = س² - ٤ س + ٤

∴ ص = - س² + ٤ س - ٢

∴ د⁻¹(س) = - س² + ٤ س - ٢

، مجال د⁻¹ = مدى د = [٢ ، ∞[

، مدى د⁻¹ = مجال د =]-∞ ، ٢]

16 (جـ) **17** (ب) **18** (أ)

19 (د) **20** (د)

21

د(٢⁺) = نهـا (س ← ٢⁺) (٥ س - ٤) = ٦

، د(٢⁻) = نهـا (س ← ٢⁻) (س² - س + ٤) = ٦

∴ د(٢⁺) = د(٢⁻) = ٦

∴ نهـا (س ← ٢) د(س) = ٦

، ∵ د(٢) = ك

∴ ك = ٦ حتى تصبح د متصلة عند س = ٢

22 (أ) **23** (د) **24** (ب)

25 (أ) **26** (جـ) **27** (جـ)

28 (ب) **29** (جـ) **30** (أ)

31 (أ) **32** (ب)

النموذج الثانى

1 (جـ) **2** [illegible]

٣



$(أب)^٢ = (أ ء)^٢ + (ب ء)^٢$

$- ٢ × أ ء × ب ء$ جتا θ (١)

، $(أ حـ)^٢ = (أ ء)^٢ + (حـ ء)^٢$

$- ٢ × أ ء × حـ ء$ جتا $(١٨٠° - θ)$

، ∵ ب ء = حـ ء ، جتا $(١٨٠° - θ)$ = − جتا θ

∴ $(أ حـ)^٢ = (أ ء)^٢ + (ب ء)^٢ + ٢ × أ ء × ب ء$ جتا θ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ $(أب)^٢ + (أ حـ)^٢ = ٢ (أ ء)^٢ + ٢ (ب ء)^٢$

∴ $(٥)^٢ + (٨)^٢ = ٢ (أ ء)^٢ + ٢ (٦)^٢$

أ ء = $\frac{\sqrt{٣٤}}{٢}$ = ٢,٩ سم

٤ (د)   **٥** (ب)   **٦** (جـ)

٧

$\frac{١}{س} = \frac{١}{٥ + ٢\sqrt{٦}} × \frac{٥ - ٢\sqrt{٦}}{٥ - ٢\sqrt{٦}} = \frac{٥ - ٢\sqrt{٦}}{٢٥ - ٢٤}$

$= ٥ - ٢\sqrt{٦}$

∴ س + $\frac{١}{س}$ = ٥ + ٢$\sqrt{٦}$ + ٥ − ٢$\sqrt{٦}$ = ١٠

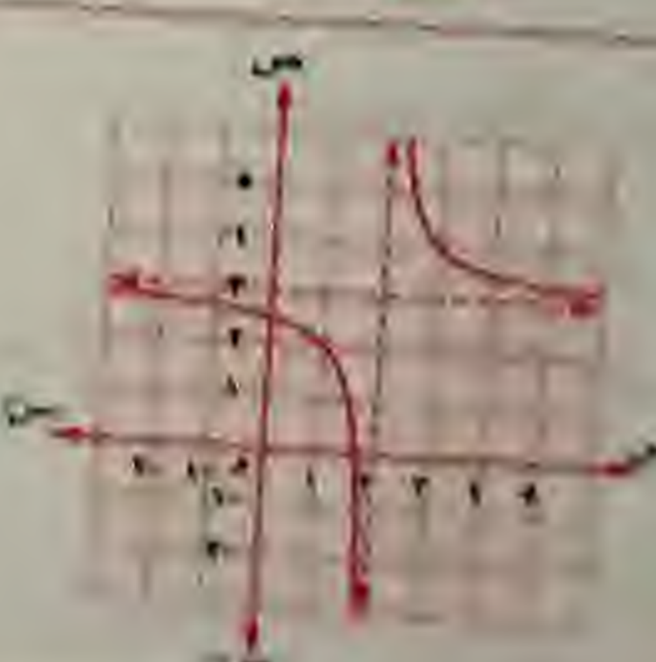
∴ لو $(س + \frac{١}{س})$ = لو ١٠ = ١

٨ (جـ)   **٩** (جـ)   **١٠** (جـ)

١١ (جـ)   **١٢** (ب)   **١٣** (د)

١٤ (د)   **١٥** (أ)

١٦



مجال ν = ح − {٢} ، المدى = ح − {٣}

، ν تناقصية فى كل من]− ∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[

، ν ليست زوجية وليست فردية ، ν أحادية

١٧ (د)   **١٨** (جـ)   **١٩** (جـ)   **٢٠** (جـ)

٢١

د (٣^-) = نهـــا $_{س ← ٣^-}$ (٣ س + ١) = ١٠

، د (٣^+) = نهـــا $_{س ← ٣^+}$ $(س^٢ + ١)$ = ١٠

، ∵ د (٣^+) = د (٣^-) = ١٠

∴ نهـــا $_{س ← ٣}$ د (س) موجودة وتساوى ١٠

٢٢ (جـ)   **٢٣** (د)   **٢٤** (د)   **٢٥** (ب)

٢٦ (ب)   **٢٧** (ب)   **٢٨** (د)   **٢٩** (أ)

٣٠ (أ)   **٣١** (أ)   **٣٢** (أ)

النموذج الثالث

١

∵ د (٢ س − ١) + د (س − ٢) = ٥٠

∴ $٧^{٢ س - ١ + ١} + ٧^{س - ٢ + ١} = ٥٠$

∴ $٧^{٢ س} + ٧^{س - ١} = ٥٠$

∴ $٧ × ٧^{٢ س} + ٧^{س} - ٣٥٠ = ٠$

∴ $(٧^{س} - ٧) × (٧ × ٧^{س} + ٥٠) = ٠$

∴ $٧^{س} = ٧$ ∴ س = ١

، $٧^{س + ١} = -٥٠$ (مرفوض)

٢ (جـ)   **٣** (د)   **٤** (ب)   **٥** (ب)

٦ (د)   **٧** (ب)   **٨** (أ)

٩



ق (د أ ء ب) = ٧٠°

، ق (د أ ب ء) = ١٨٠° − (٥٠° + ٧٠°) = ٦٠°

∴ $\frac{٨}{جا ٥٠°} = \frac{أب}{جا ٧٠°} = \frac{أ ء}{جا ٦٠°}$

∴ أب = ٩,٨ سم ، أ ء = ٩ سم

محيط متوازى الأضلاع = ٣٨ سم

١٠ (أ)   **١١** (ب)   **١٢** (أ)   **١٣** (جـ)

١٤ (د)   **١٥** (د)   **١٦** (د)   **١٧** (ب)

١٨ (أ)   **١٩** (أ)   **٢٠** (جـ)   **٢١** (ب)

٢٢

د (س) = { − س ، س ≤ ٠ ؛ $س^٢$ ، س > ٠ }



• مدى الدالة = [٠ ، ∞[

• الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ٠[، تزايدية فى]٠ ، ∞[

٢٣ (د)   **٢٤** (ب)   **٢٥** (ب)

٢٦ (جـ)   **٢٧** (جـ)

٢٨

∵ د متصلة عند س = صفر

∴ د (٠) = نهـــا $_{س ← ٠}$ د (س)

∴ ك = نهـــا $_{س ← ٠}$ $\frac{(س + ٣)^٥ - ٣^٥}{س}$

∴ ك = ٥ × $٣^٤$ = ٤٠٥

٢٩ (د)   **٣٠** (جـ)   **٣١** (د)   **٣٢** (ب)

النموذج الرابع

١ (أ)   **٢** (أ)   **٣** (جـ)   **٤** (د)

٥ (ب)   **٦** (د)   **٧** (د)

٨

حـ = ٢١ − (٨ + ٧) = ٦ سم

∴ حـ هو طول أصغر ضلع

∴ ق (د حـ) هو قياس أصغر زاوية

∴ جتا حـ = $\frac{٦٤ + ٤٩ - ٣٦}{٢ × ٨ × ٧}$

∴ ق (د حـ) = ٤٦ َ ٣٤ ً ٤٦°

٩

نوجد الدالة العكسية للدالة د

بوضع ص = ٢ س + ١ وبتبديل المتغيرين

∴ س = ٢ ص + ١   ∴ ٢ ص = س − ١

∴ ص = $\frac{١}{٢}$ س − $\frac{١}{٢}$

∴ $د^{-١}$ (س) = $\frac{١}{٢}$ س − $\frac{١}{٢}$

، ∵ ν هى الدالة العكسية للدالة د

∴ ν (س) = $د^{-١}$ (س)

∴ ب س + ٢ = $\frac{١}{٢}$ س − $\frac{١}{٢}$

وبمقارنة المعاملات : ∴ ب = $\frac{١}{٢}$ ، ٢ = −٦

١٠ (أ)   **١١** (جـ)   **١٢** (جـ)

١٣

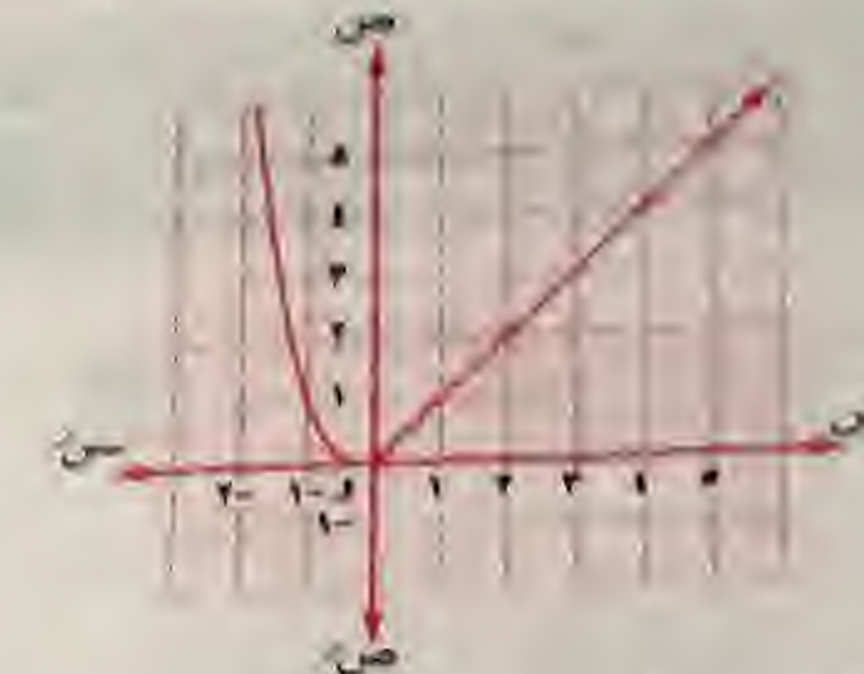
∵ د (١^-) = د (١^+)

∴ أ − ٣ = ٣ − ٢

∴ أ = ٢

١٤ (د)   **١٥** (جـ)

١٦



• المدى = [٠ ، ∞[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية

• الدالة تزايدية في]٠ ، ∞[وتناقصية في]-∞ ، ٠[

١٧ (جـ) **١٨** (أ) **١٩** (ب) **٢٠** (د)

٢١ (د) **٢٢** (أ) **٢٣** (جـ) **٢٤** (ب)

٢٥ (ب) **٢٦** (ب) **٢٧** (ب) **٢٨** (ب)

٢٩ (ب) **٣٠** (د) **٣١** (د) **٣٢** (ب)

النموذج الخامس

١ (جـ) **٢** (د) **٣** (أ) **٤** (ب)

٥ (د) **٦** (د) **٧** (جـ)

٨

∵ $٣^{٢س - ١} - ٤ \times ٣^{س} + ٩ = ٠$ وبالضرب × ٣

∴ $٣^{٢س} - ١٢ \times ٣^{س} + ٢٧ = ٠$

∴ $(٣^{س} - ٣)(٣^{س} - ٩) = ٠$

∴ $٣^{س} = ٣$ ∴ س = ١

أو $٣^{س} = ٩ = ٣^{٢}$ ∴ س = ٢

∴ مجموعة الحل = {١ ، ٢}

٩ (جـ) **١٠** (د) **١١** (جـ) **١٢** (جـ)

١٦

من Δ أ ب ء :

ق(∠ أ) = ١٨٠° - (٥٠° - ٦٥°)

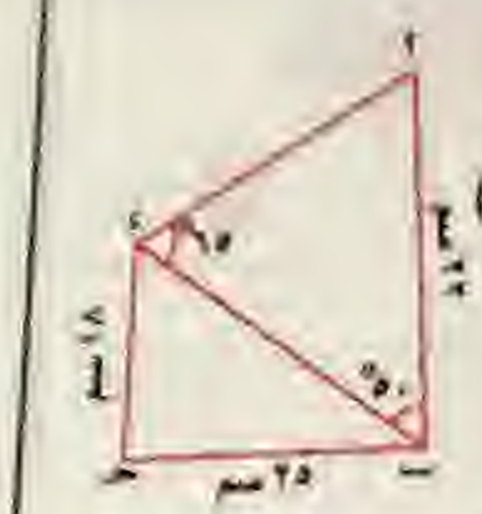
= ٦٥°

∴ ب ء = أ ب = ٢٢ سم

، من Δ ب ء حـ :

$جتا(∠ حـ ب ء) = \frac{(٢٢)^{٢} + (٢٥)^{٢} - (١٨)^{٢}}{٢ \times ٢٢ \times ٢٥}$

∴ ق(∠ حـ ب ء) = ٤٤° ٢٨ َ ٩ ً



١٧ (د) **١٨** (د) **١٩** (أ) **٢٠** (ب)

٢١

• $د(س) = |س| + ١$ ، $ر(س) = \frac{١}{س - ١}$

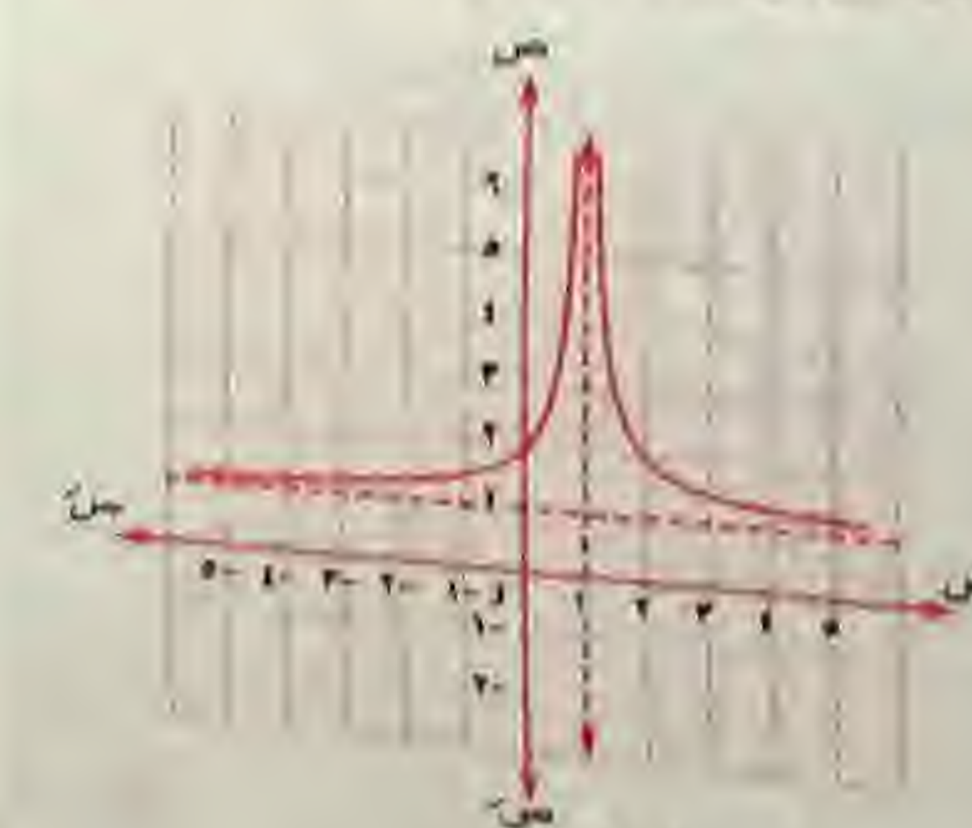
∴ $(د \circ ر)(س) = د[ر(س)] = د\left(\frac{١}{س - ١}\right)$

$= \left|\frac{١}{س - ١}\right| + ١$

، م₁ = مجال ر = ح - {١} ، م₂ = ح

∴ مجال (د ∘ ر) = ح - {١}

• التمثيل البياني للدالة (د ∘ ر) :



* المجال = ح - {١}
* الدالة ليست زوجية وليست فردية
* المنحنى متماثل بالنسبة للمستقيم س = ١
* الدالة ليست أحادية

٢٢ (ب) **٢٣** (ب) **٢٤** (ب)

٢٥ (ب) **٢٦** (جـ) **٢٧** (جـ)

٢٨

$د(٠^{-}) = \lim_{س \to ٠^{-}} \frac{س + جاس}{٢س - جا٢س}$

$= \lim_{س \to ٠^{-}} \frac{س\left(١ + \frac{جاس}{س}\right)}{س\left(٣ - \frac{جا٢س}{س}\right)} = \frac{١ + ١}{٣ - ٢} = ٢$

، $د(٠^{+}) = \lim_{س \to ٠^{+}} (٣س - ١) = -١$

، ∵ $د(٠^{-}) \ne د(٠^{+})$

∴ د غير متصلة عند س = ٠

٢٩ (د) **٣٠** (ب) **٣١** (ب) **٣٢** (جـ)

النموذج السادس

١ (أ) **٢** (جـ) **٣** (ب)

٤

① $د_{١}(-س) = (-س)\ جتا(-س)$

$= -س\ جتاس = -د_{١}(س)$

∴ د₁ دالة فردية

② $د_{٢}(-س) = \begin{cases} (-س)^{٢} & ، -س \ge ٠ \\ |-س| & ، -س < ٠ \end{cases}$

$= \begin{cases} س^{٢} & ، س \le ٠ \\ |س| & ، س > ٠ \end{cases} \ne \pm د_{٢}(س)$

∴ د₂ ليست زوجية وليست فردية.

٥ (جـ) **٦** (د) **٧** (جـ) **٨** (جـ)

٩ (ب) **١٠** (د) **١١** (ب) **١٢** (أ)

١٣

نضع ص = $\frac{١}{س^{٢} + ١}$ حيث س ∈ ح⁺

، ص ∈]٠ ، ١[(بحسب التعبير)

∴ س = $\frac{١}{ص^{٢} + ١}$ حيث ص ∈ ح⁺ ، س ∈]٠ ، ١[

∴ ص² + ١ = $\frac{١}{س}$

∴ ص² = $\frac{١}{س}$ - ١ ∴ ص = $\sqrt{\frac{١}{س} - ١}$

∴ د⁻¹(س) = $\sqrt{\frac{١}{س} - ١}$ ، مجال د⁻¹ =]٠ ، ١[

، مدى د⁻¹ = مجال د = ح⁺

١٤ (ب) **١٥** (ب) **١٦** (جـ) **١٧** (ب)

١٨ (جـ) **١٩** (ب) **٢٠** (د) **٢١** (أ)

٢٢ (ب) **٢٣** (ب)

٢٤

ق(∠ حـ) = ١٨٠° - (٤٠° + ٣٠°) = ١١٠°

∵ $\frac{أ}{جاأ} = \frac{ب}{جاب} = \frac{حـ}{جاحـ}$

∴ $\frac{أ}{جا٤٠°} = \frac{١٠}{جا٣٠°} = \frac{حـ}{جا١١٠°}$

∴ أ = ١٢٫٩ ، حـ = ١٨٫٨ سم

٢٥ (أ) **٢٦** (أ) **٢٧** (ب)

٢٨

∵ د متصلة عند س = -٣

∴ $\lim_{س \to -٣} \frac{س^{٢} + ٢س - ٣}{س + ٣}$ = -٣ + ١

∴ $\lim_{س \to -٣} \frac{(س + ٣)(س - ١)}{س + ٣}$ = -٣ + ١

∴ ل = -٣ + ١ ∴ ١ = [illegible]

٢٩ (ب) **٣٠** (ب) **٣١** (جـ) **٣٢** (ب)

النموذج السابع

∴ مجموعة الحل = {−١ ، ١ ، −٢٧ ، ٢٧}

النموذج الثامن

$ع^2 = ٢٥ + ٤٩ − ٢ × ٥ × ٧ جتا ٦٥°$

∴ ع ≈ ٦٫٧ سم

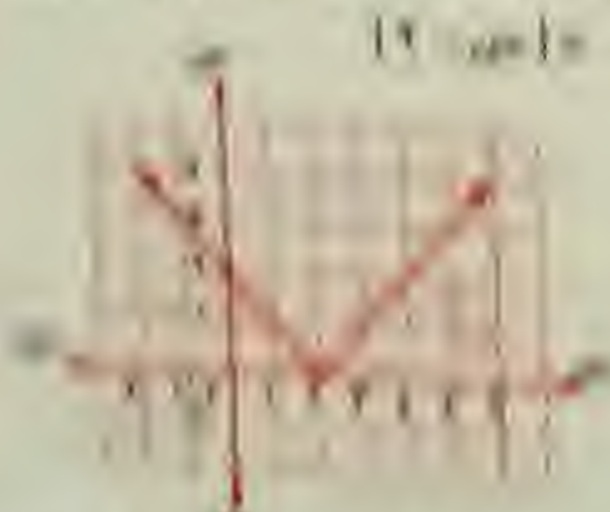
∴ محيط Δ س ص ع = ١٨٫٧ سم

∴ مساحة Δ = $\frac{1}{2}$ × ١٨ × ١٩ × جا ١١٢°

= ١٥٩ سم²



النموذج التاسع



(ب) **17** (ب) **18** (ب) **19** (أ) **20**

21

$\because \frac{٢١}{جا ٢} = \frac{٣٠}{جا س} = \frac{حـ}{جا حـ} = ٢ نق$

$\therefore$ جا ٢ $= \frac{٣}{٥}$

$\because$ المثلث حاد الزوايا

$\therefore$ ق (د ٢) = ٥٠ َ ٥٢ ° ٤٨ ، جا س $= \frac{٢٤}{٢٥}$

$\because$ المثلث حاد الزوايا

$\therefore$ ق (د س) = ٤ َ ١٤ ° ٦٣

$\therefore$ ق (د حـ) = ٢١ َ ٦٠ ° ٦٨

$\therefore$ حـ = ٢٨ جا ٢١ َ ٦٠ ° ٦٨ = ٢٦ سم

(أ) **22** (د) **23** (د) **24** (ج) **25**

(ج) **26** (د) **27** (ب) **28** (ج) **29**

(ج) **30** (ب) **31** (د) **32**

النموذج العاشر

(أ) **1** (د) **2** (ب) **3** (ج) **4**

(د) **5** (ج) **6** (ب) **7**

8

$\because$ د متصلة عند س = ٢

$\therefore$ د (٢) ...

9

$\because$ ٣٦ = ب + حـ + ...

$\therefore$ ب + حـ = ٤٤

$\therefore$ ب = ٤٤ − حـ

$\because$ ٢٢ = ب٢ + حـ٢ − ٢ ب حـ جا ٢

$\therefore$ (٢٦)٢ = (٤٤ − حـ)٢ + حـ٢

$-$ ٢ (٤٤ − حـ) حـ جتا ٦٠ °

$\therefore$ ٦٧٦ = ١٩٣٦ − ٨٨ حـ + حـ٢ + حـ٢ − ٤٤ حـ + حـ٢

$\therefore$ ٣ حـ٢ − ١٣٢ حـ + ١٢٦٠ = ٠

$\therefore$ حـ٢ − ٤٤ حـ + ٤٢٠ = ٠

$\therefore$ (حـ − ٣٠) (حـ − ١٤) = ٠

$\therefore$ حـ = ٣٠ سم ومنها ب = ١٤ سم

أو حـ = ١٤ سم ومنها ب = ٣٠ سم

$\therefore$ ب حـ = ١٤ × ٣٠ = ٤٢٠

$\therefore$ مساحة Δ ٢ ب حـ $= \frac{١}{٢}$ ب حـ جا ٢

$= \frac{١}{٢} \times ٤٢٠ \times$ جا ٦٠ °

$= ١٠٥ \sqrt{٣}$ سم٢

(د) **10** (د) **11** (ج) **12** (د) **13**

(أ) **14** (أ) **15** (ب) **16** (د) **17**

(ب) **18** (د) **19** (ج) **20**

21

$\because$ (س − ٣) ...

$\therefore$ ...

إرشادات امتحانات الإدارات

١ محافظة القاهرة

١ (ب) **٢** (جـ) **٣** (ب)

٤ (جـ) **٥** (د) **٦** (جـ)

٧ (د)

الحل :

∵ $|\text{س}| = \begin{cases} \text{س} & \text{، س} \geq 0 \\ -\text{س} & \text{، س} < 0 \end{cases} = \begin{cases} \text{س} & \text{، س} > 0 \\ -\text{س} & \text{، س} \leq 0 \end{cases}$

∴ مجموعة حل المعادلة $|\text{س}| = -\text{س}$ هى $]-\infty , 0]$

٨ (ب)

الحل :

$(\text{م} \circ \text{د})(1) = \text{م}(\text{د}(1)) = \text{م}(3) = 2$

٩ (ب)

١٠ (د)

الحل :

∵ ٥ ∈ مجال الدالة د ، −٥ ∉ مجال الدالة د

∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

١١ (ب)

الحل :

بوضع $\text{س} - 4 > 0$ ∴ $\text{س} > 4$

∴ مجال الدالة د $=]4 , \infty[$

١٢ (ب)

١٣ (أ)

الحل :

$3^{2\text{س} - 1} + 9^{\text{س} + 1} = 756$

∴ $3^{2\text{س} - 1} + 3^{2\text{س} + 2} = 756$

∴ $3^{2\text{س}}(3^{-1} + 3^{2}) = 756$

∴ $3^{2\text{س}} \times \frac{28}{3} = 756$

∴ $3^{2\text{س}} = 756 \times \frac{3}{28}$ ∴ $3^{2\text{س}} = 81 = 3^{4}$

∴ $2\text{س} = 4$ ∴ $\text{س} = 2$

١٤ (د)

١٥ (جـ)

الحل :

$\text{لو}\left(\frac{\text{أ}^2}{\text{ب جـ}}\right) = \text{لو أ}^2 - \text{لو ب جـ} = 2\ \text{لو أ} - \text{لو ب} - \text{لو جـ}$

١٦ (د)

الحل :

$\text{س} - 2 = 0$ ∴ $\text{س} = 2$

١٧ (د)

الحل :

∵ د دالة فردية ∴ $\text{د}(-\text{س}) = -\text{د}(\text{س})$

∴ $\text{د}(-\text{س}) + \text{د}(\text{س}) = -\text{د}(\text{س}) + \text{د}(\text{س})$

= صفر

١٨ (أ)

١٩ (جـ)

الحل :

∵ $\frac{1}{|\text{س}|} \geq 1$ ∴ $|\text{س}| \leq 1$ ، $\text{س} \neq 0$

∴ $-1 \leq \text{س} \leq 1$ ، $\text{س} \neq 0$

∴ مجموعة الحل $= [-1 , 1] - \{0\}$

٢٠ (أ)

الحل :

$3^{\text{ص}} = 2\text{س} - 1$ بتبديل المتغيرات

∴ $3^{\text{س}} = 2\text{ص} - 1$ ∴ $\text{ص} = \frac{3^{\text{س}} + 1}{2}$

∴ $\text{د}^{-1}(\text{س}) = \frac{3^{\text{س}} + 1}{2}$ ∴ $\text{د}^{-1}(0) = \frac{3^{0} + 1}{2} = 1$

٢١ (جـ) **٢٢** (ب) **٢٣** (أ)

٢٤ (د)

الحل :

$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{س}^2 - 4}{\text{س} - 2} = \frac{(0)^2 - 4}{0 - 2} = 2$

٢٥ (جـ)

الحل :

$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{2\text{س}}{\text{جا}\, 2\text{س}} = \lim_{\text{س} \to 0} \frac{2}{\frac{\text{جا}\, 2\text{س}}{\text{س}}} = \frac{2}{2}$

٢٦ (ب)

الحل :

$\lim_{\text{س} \to 3} \frac{\sqrt{\text{س} + 1} - 2}{\text{س} - 3} = \lim_{\text{س} \to 3} \frac{\sqrt{\text{س} + 1} - 2}{\text{س} - 3} \times \frac{\sqrt{\text{س} + 1} + 2}{\sqrt{\text{س} + 1} + 2}$

$= \lim_{\text{س} \to 3} \frac{\text{س} + 1 - 4}{(\text{س} - 3)(\sqrt{\text{س} + 1} + 2)} = \frac{1}{4}$

٢٧ (أ)

الحل :

$\lim_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س}^5 - 32}{\text{س}^3 - 8} = \lim_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س}^5 - 2^5}{\text{س}^3 - 2^3} = \frac{5}{3} \times 2^{2} = \frac{20}{3}$

٢٨ (أ)

الحل :

$\lim_{\text{س} \to 1} \frac{\text{س}^3 + \text{س}^2 - 2}{\text{س} - 1} = \lim_{\text{س} \to 1} \frac{\text{س}^3 - 1}{\text{س} - 1} + \lim_{\text{س} \to 1} \frac{\text{س}^2 - 1}{\text{س} - 1}$

[illegible]

$= (3 \times 1) + (2 \times 1) = 5$

٢٩ (ب)

الحل :

[illegible]

٣٠ (أ)

الحل :

[illegible]

٣١ (أ)

الحل :

بوضع $\text{س} - 1 \geq 0$ ∴ $\text{س} \geq 1$

∴ مجال د $= [1 , \infty[$

الدالة د : $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س} - 1}$ متصلة على مجالها $[1 , \infty[$

٣٢ (جـ)

الحل :

[illegible]

٣٣ (ب)

الحل :

∵ [illegible]

∴ [illegible] أكبر الأضلاع طولاً

∴ [illegible] أكبر الزوايا قياساً

٣٦ (أ)

الحل :

$\because \frac{حـ}{حا س} = ٦ = ٢ نق$

∴ طول قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث = ٦ وحدات طول.

٣٧ (جـ)

الحل :

∵ ٢ حا أ = ٣ حا ب = ٤ حا حـ بالقسمة على ١٢

$\therefore \frac{٢ حا أ}{١٢} = \frac{٣ حا ب}{١٢} = \frac{٤ حا حـ}{١٢}$

$\therefore \frac{حا أ}{٦} = \frac{حا ب}{٤} = \frac{حا حـ}{٣}$

∴ أ : ب : حـ = ٦ : ٤ : ٣

٣٨ (ب)

الحل :

∵ أ ب حـ ء شكل رباعي دائري

∴ ق (∠ أ) + ق (∠ حـ) = ١٨٠°

∴ حتا أ + حتا حـ = حتا أ + حتا (١٨٠° − أ)

= حتا أ − حتا أ = صفر

٣٩ (ب)

الحل :

ق (∠ أ) = ١٨٠° − (٨٢° + ٥٦°) = ٤٢°

$\because \frac{أ}{حا أ} = \frac{ب}{حا ب} \quad \therefore \frac{٢٧}{حا ٤٢°} = \frac{ب}{حا ٨٢°}$

$\therefore ب = \frac{٢٧ \times حا ٨٢°}{حا ٤٢°}$

∴ مساحة سطح Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب حا حـ

$= \frac{١}{٢} \times ٢٧ \times \frac{٢٧ \times حا ٨٢°}{حا ٤٢°}$

× حا ٥٦° = ٤٤٧ سم^٢

٤٠ (د)

الحل :

∵ أ + حـ = ١١ (١)

، أ − حـ = ١ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) :

∴ أ = ٦ سم ، حـ = ٥ سم

$\because حتا أ = \frac{ب^٢ + حـ^٢ - أ^٢}{٢ ب حـ} = \frac{١٦ + ٢٥ - ٣٦}{٢ (٤) (٥)} = \frac{١}{٨}$

∴ ق (∠ أ) = ٨٢° ٤٩ ٩

$، حتا ب = \frac{أ^٢ + حـ^٢ - ب^٢}{٢ (أ) (حـ)} = \frac{٣٦ + ٢٥ - ١٦}{٢ (٦) (٥)} = \frac{٣}{٤}$

∴ ق (∠ ب) = ٤١° ٢٤ ٣٥

∴ ق (∠ أ) = ٢ ق (∠ ب)

٤١ (ب)

الحل :

ق (∠ حـ) = ١٨٠° − (١٠٠° + ١٥°) = ٦٥°

∵ ∠ ب أصغر الزوايا قياسًا

∴ ب أصغر الأضلاع طولًا

$\because \frac{ب}{حا ب} = \frac{حـ}{حا حـ} \quad \therefore \frac{ب}{حا ١٥°} = \frac{٤,٥}{حا ٦٥°}$

$\therefore ب = \frac{٤,٥ \times حا ١٥°}{حا ٦٥°} = ١,٣$ سم.

٤٢ (ب)

الحل :

بفرض أن : أ = ٣ سم ، ب = ٥ سم ، حـ = ٧ سم

في Δ أ ب حـ

∵ حـ أكبر الأضلاع طولًا

∴ ∠ حـ أكبر الزوايا قياسًا

$حتا حـ = \frac{أ^٢ + ب^٢ - حـ^٢}{٢ أ ب} = \frac{٩ + ٢٥ - ٤٩}{٢ (٣) (٥)} = -\frac{١}{٢}$

∴ ق (∠ حـ) = ١٢٠°

٢ محافظة الجيزة

١ (أ)

٢ (أ)

الحل :

$\because لو_٣ س = لو_٤ ٩ \quad \therefore \frac{لو س}{لو ٣} = \frac{لو ٩}{لو ٤}$

$\therefore لو س = \frac{٢ لو ٣ \times لو ٣}{٢ لو ٢}$

∴ لو س = لو ٣ ∴ س = ٣

٣ (جـ)

الحل :

$\frac{د (س - ١)}{د (س + ١)} = \frac{٥^{-(س-١)}}{٥^{-(س+١)}} = ٥^{-س+١+س+١}$

$= ٥^٢ = ٢٥$

٤ (د)

الحل :

$د (س) = \frac{\sqrt{١ - حتا^٢ س}}{س} = \frac{\sqrt{حا^٢ س}}{س} = \frac{|حا س|}{س}$

∴ د (٠⁺) = نهـــا (س ← ٠⁺) $\frac{حا س}{س}$ = ١

∴ د (٠⁻) = نهـــا (س ← ٠⁻) $\frac{- حا س}{س}$ = −١

∴ د (٠⁺) ≠ د (٠⁻)

∴ نهـــا (س ← ٠) د (س) غير موجودة.

٥ (أ)

الحل :

∵ الدالة زوجية والنقطة (٢ ، ب) ∈ للدالة

∴ النقطة (−٢ ، ب) ∈ للدالة

∴ الدالة متصلة عند النقطة (−٢ ، ب) أيضًا

٦ (جـ)

الحل :

[illegible]

∴ ق (∠ س) = ١٢٠°

٧ (ب)

الحل :

$د (س) = \frac{س + ١}{س} = ١ + \frac{١}{س} = ...$

∴ نقطة تماثل الدالة (٠ ، ١)

٨ (د)

الحل :

$\because لو_{\frac{١}{٢}} س + لو_{\frac{١}{٢}} (س + ١) = ٢$

$\therefore لو_{\frac{١}{٢}} س (س + ١) = ٢$

$\therefore س^٢ + س = (\frac{١}{\sqrt{٢}})^{...} = ٢$

∴ س^٢ + س − ٢ = ٠

∴ (س + ٢) (س − ١) = ٠

∴ س = −٢ (مرفوضة) أو س = ١

∴ م.ح = {١}

٩ (ب)

الحل :

[illegible]

١٠ (ب)

الحل :

[illegible]

(د)

(جـ)

(أ)

الحل

∴ ق (د هـ) = ١٢٠°

(جـ)

الحل :

د (٠⁺) = نهـــا (٢ س + جا س) / (ظا ٢ س + ٤ س)

= نهـــا (٢ + جا س / س) / (ظا ٢ س / س + ٤) = (٢ + ١) / (٢ + ٤) = ١/٢

، د (٠⁻) = نهـــا (٥ س + ١/٢) = ٥ (٠) + ١/٢ = ١/٢

∴ د (٠⁺) = د (٠⁻) = ١/٢

∴ نهـــا د (س) = ١/٢

١٢ (أ)

الحل :

ص٢ = س٢ + ع٢ − ٢ س ع جتا ص

= (٢٠)٢ + (١٦)٢ − ٢ × ٢٠ × ١٦ × ٠.٤

∴ ص٢ = ٤٠٠

∴ ص = ٢٠ سم

١٣ (ب)

١٤ (ب)

الحل :

ص = ٣^س بتبديل المتغيرات

∴ س = ٣^ص ∴ ص = لو٣ س

∴ د⁻¹ (س) = لو٣ س

١٥ (د)

الحل :

بوضع س + ٢ ≥ ٠ ∴ س ≥ −٢

∴ مجال الدالة = [−٢ ، ∞[

١٦ (د)

الحل :

نهـــا ظا س / س = ظا (π/٤) / (π/٤) = ١ / (π/٤) = ٤/π

١٧ (جـ)

الحل :

نهـــا ∛٢ / ٩ = ١/٩ نهـــا ٢^(١/ن) = ١/٩ × ١ = ١/٩

١٨ (د)

الحل :

محيط Δ أ ب جـ / (جا أ + جا ب + جا جـ) = ٢ نق

∴ ٢٠ / (جا ٨٠° + جا ٦٠° + جا ٤٠°) = ٢ نق

∴ ٢ نق = ٨ سم

∴ طول قطر الدائرة = ٨ سم

١٩ (د)

الحل :

∵ لو س ٣ = −٢ ∴ س^(−٢) = ٣

∴ س٢ = ١/٣

∴ س = ١/√٣ والحل السالب مرفوض.

٢٠ (ب)

الحل :

(د ∘ ر) (١) = د (ر (١)) = ر (١) = −٢

٢١ (ب)

الحل :

عند ن = ٤ تكون نهـــا (س^ن − ٢^ن) / (س − ٢) = ٤ × ٢^٣ = ٣٢

(أ)

الحل :

نهـــا [illegible] = ١/٢ نهـــا [illegible]

= ١/٢ × ٠ = ٠

٢٣ (أ)

٢٤ (ب)

الحل :

د (− س) = (− س) ظا (− س) / |− س| = (− س)(− ظا س) / |س|

= س ظا س / |س| = د (س)

٢٥ (ب)

الحل :

د (س) = √(س٢) + |س| = |س| + |س|

= ٢ |س|

∴ ٢ |س| = ٢ ∴ |س| = ١

∴ س = ± ١ ∴ م.ح = {−١ ، ١}

٢٦ (د)

الحل :

∵ |س| < ٢ ∴ −٢ < س < ٢

∴ س ∈]−٢ ، ٢[

٢٧ (جـ)

الحل :

نهـــا [illegible]

(جـ)

الحل :

[illegible]

(ب)

الحل :



[illegible]

(جـ)

الحل :

[illegible]

٣٤ (ب)

الحل :

$\frac{|\text{س}|}{\text{س}} = \begin{cases} \frac{\text{س}}{\text{س}} & \text{س} > 0 \\ \frac{-\text{س}}{\text{س}} & \text{س} < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{س} > 0 \\ -1 & \text{س} < 0 \end{cases}$

∴ $\frac{|\text{س}|}{\text{س}} = 1$ لكل س ∈]٠ ، ∞[

∴ م.ح =]٠ ، ∞[= ح$^+$

٣٥ (ب)

الحل :

$\frac{\text{جـ}}{\text{جا جـ}} = 2$ نق

∴ $\frac{5\,\text{جـ}}{\text{جا جـ}} = 5 \times 2$ نق = ١٠ نق

٣٦ (د)

الحل :

$\frac{\text{جا س}}{3} = \frac{\text{جا ص}}{\frac{5}{2}} = \frac{\text{جا ع}}{4}$

∴ س : ص : ع = ٣ : $\frac{5}{2}$: ٤ = ٦ : ٥ : ٨

٣٧ (ب)

٣٨ (أ)

الحل :

نهـا (س ← $\frac{1}{2}$) $\frac{8\,\text{س}^3 - 1}{32\,\text{س}^5 - 1}$ = نهـا (س ← $\frac{1}{2}$) $\frac{8\left(\text{س}^3 - \frac{1}{8}\right)}{32\left(\text{س}^5 - \frac{1}{32}\right)}$

$= \frac{1}{4}$ نهـا (س ← $\frac{1}{2}$) $\frac{\text{س}^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3}{\text{س}^5 - \left(\frac{1}{2}\right)^5}$

$= \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{3}{5}$

٣٩ (د)

الحل :

∵ أ ب جـ مثلث ∴ أ + ب + جـ = ١٨٠°

∴ أ + ب = ١٨٠° − جـ

∴ جتا (أ + ب) = جتا (١٨٠° − جـ) = − جتا جـ

٤٠ (جـ)

الحل :

نهـا (س ← ∞) $\frac{\text{أ س}^2 - 5\,\text{س}}{2\,\text{س} + 3\,\text{س}^2}$ = نهـا (س ← ∞) $\frac{\text{أ} - \frac{5}{\text{س}}}{\frac{2}{\text{س}} + 3}$

$= \frac{\text{أ} - 0}{0 + 3} = \frac{\text{أ}}{3}$

∴ $\frac{\text{أ}}{3} = 3$ ∴ أ = ٩

٣ محافظة الإسكندرية

١ (جـ)

الحل :

∵ |س − ٢| = ٥

∴ س − ٢ = ٥ ∴ س = ٧

أو س − ٢ = −٥ ∴ س = −٣

∴ م.ح = {٧ ، −٣}

٢ (ب)

الحل :

نهـا (س ← ١) $\frac{\text{س}^2 - 1}{\text{س} - 1}$ = نهـا (س ← ١) $\frac{(\text{س} - 1)(\text{س} + 1)}{(\text{س} - 1)} = 2$

٣ (جـ)

الحل :

$\frac{8\sqrt{3}}{\text{جا } 60°} = 2$ نق ∴ طول القطر = ١٦ سم

٤ (أ)

٥ (د)

الحل :

نهـا (س ← ∞) $\frac{2\,\text{س}^2 + 1}{\text{س}^2 + 1}$ = نهـا (س ← ∞) $\frac{2 + \frac{1}{\text{س}^2}}{1 + \frac{1}{\text{س}^2}} = 2$

٦ (د)

الحل :

∵ أ ب جـ مثلث

∴ جا (ب + جـ) = جا (١٨٠° − أ) = جا أ

، ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جا جـ}}$

∴ $\frac{\text{أ} + \text{ب}}{\text{جا أ} + \text{جا ب}} = \frac{\text{أ}}{\text{جا أ}}$

∴ $\frac{\text{أ} + \text{ب}}{\text{جا أ} + \text{جا ب}} = \frac{\text{أ}}{\text{جا (ب + جـ)}}$

∴ $\frac{\text{جا (ب + جـ)}}{\text{جا أ} + \text{جا ب}} = \frac{\text{أ}}{\text{أ} + \text{ب}}$

٧ (أ)

الحل :

∵ لو$_3$ (٢ س + ٣) = ٢ ∴ ٢ س + ٣ = ٣^2

∴ ٢ س + ٣ = ٩ ∴ س = ٣

٨ (أ)

الحل :

نهـا (س ← ٠) $\frac{\text{جا } 3\,\text{س}}{\text{طا } \frac{1}{3}\,\text{س}}$ = نهـا (س ← ٠) $\frac{\frac{\text{جا } 3\,\text{س}}{\text{س}}}{\frac{\text{طا } \frac{1}{3}\,\text{س}}{\text{س}}} = \frac{3}{\frac{1}{3}} = 9$

٩ (أ)

الحل :

(ب جـ)^2 = (أ ب)^2 + (أ جـ)^2 − ٢ أ ب × أ جـ × جتا أ

= ١٠٠ + ٣٦ − ٢ × ١٠ × ٦ × جتا ١٢٠°

∴ ب جـ = ١٤ سم

١٠ (ب)

١١ (أ)

الحل :

∵ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) = (س + ٢)^2

∴ (د ∘ ر) دالة المحايدة.

١٢ (د)

الحل :

∵ د متصلة عند س = ٣

∴ د (٣) = نهـا (س ← ٣) د (س)

∴ ٢ أ = نهـا (س ← ٣) $\frac{\text{س}^2 - 9}{\text{س} - 3}$

= نهـا (س ← ٣) $\frac{(\text{س} - 3)(\text{س} + 3)}{(\text{س} - 3)} = 6$

∴ أ = ٣

١٣ (أ)

الحل :

بفرض أن قياس أكبر زاوية = θ وهي تقابل أكبر الأضلاع طولًا = ٧ سم

∴ جتا θ = $\frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2\,(3)\,(5)} = \frac{-1}{2}$

∴ θ = ١٢٠°

١٤ (ب)

١٥ (ب)

الحل :

نهـا (س ← ٢) $\frac{\text{س}^2 + \text{س} - 6}{\text{س}^2 - 4}$

= نهـا (س ← ٢) $\frac{(\text{س} + 3)(\text{س} - 2)}{(\text{س} - 2)(\text{س} + 2)} = \frac{5}{4}$

١٦ (أ)

الحل :

ن = $\sqrt{5^2 + 7^2 - 2 \times 5 \times 7 \times \text{جتا } 60°}$ ≈ ٦,٢ سم

١٧ (د)

الحل :

∵ س$^{\frac{2}{5}}$ = ٤

∴ س = ± ٤$^{\frac{5}{2}}$ = ± $(\sqrt{4})^5$ = ± ٣٢

١٨ (د)

∴ (د ∘ ر) دالة أحادية

(د)

∵ أ ب حـ مثلث

$\therefore \frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{حـ}{جا حـ} = ٢ نق = ١٠$ ، ∴ جا (أ + ب) = جا حـ

∴ أ = ١٠ جا أ ، ب = ١٠ جا ب

∵ مساحة Δ أ ب حـ = ٢٤

$\therefore \frac{١}{٢}$ أ ب جا حـ = ٢٤

$\therefore \frac{١}{٢} \times ١٠$ جا أ × ١٠ جا ب × جا حـ = ٢٤

∴ جا أ جا ب جا (أ + ب) = $\frac{١٢}{٢٥}$

٢٠ (ب)

الحل :

∵ جتا حـ = $\frac{أ^٢ + ب^٢ - حـ^٢}{٢ أ ب}$

$\therefore \frac{ب}{٢ أ} = \frac{أ^٢ + ب^٢ - حـ^٢}{٢ أ ب}$ ∴ ب^٢ = أ^٢ + ب^٢ − حـ^٢

∴ أ^٢ = حـ^٢ ∴ أ = حـ

٢١ (ب)

الحل :

نهـــا$_{س \leftarrow ٠}$ $\frac{٢ س + جا ٣ س}{٥ س + ظا ٢ س}$ = نهـــا$_{س \leftarrow ٠}$ $\frac{٢ + \frac{جا ٣ س}{س}}{٥ + \frac{ظا ٢ س}{س}}$

= $\frac{٢ + ٣}{٥ + ٢} = \frac{٥}{٧}$

٢٢ (جـ)

الحل :

بوضع س = ٢ ، ∵ د دالة فردية

∴ د (−٢) = − د (٢)

∴ ٢ د (٢) + ٨ د (−٢) = ٢

∴ ٢ د (٢) − ٨ د (٢) = ٢

∴ −٦ د (٢) = ٢ ∴ د (٢) = $-\frac{١}{٣}$

الحل :

عندما س ≥ $\frac{١}{٢}$ ∴ ٢ س − ١ = س + ٢

∴ س = ٣ ∈ [$\frac{١}{٢}$ ، ∞ [

عندما س < $\frac{١}{٢}$ ∴ ٢ س − ١ = − س − ٢

∴ س = $-\frac{١}{٣}$ ∈] −∞ ، $\frac{١}{٢}$ [

∴ م.ح = { ٣ ، $-\frac{١}{٣}$ }

٢٤ (أ)

٢٥ (د)

الحل :

نهـــا$_{س \leftarrow ٢}$ $\frac{(س + ١)^٤ - ٨١}{س - ٢}$

= نهـــا$_{(س + ١) \leftarrow ٣}$ $\frac{(س + ١)^٤ - ٣^٤}{(س + ١) - ٣}$ = ٤ × ٣^٣ = ١٠٨

٢٦ (أ)

الحل :

نهـــا$_{س \leftarrow \infty}$ $\frac{أ + \frac{٧}{س}}{٥ - \frac{٧}{س}}$ = ١ ∴ $\frac{أ + ٠}{٥ - ٠}$ = ١ ∴ أ = ٥

٢٧ (أ)

الحل :

نهـــا$_{س \leftarrow ١}$ $\frac{جا (س - ١)}{س^٢ - ١}$

= نهـــا$_{(س - ١) \leftarrow ٠}$ $\frac{جا (س - ١)}{(س - ١)}$ × نهـــا$_{س \leftarrow ١}$ $\frac{١}{(س + ١)}$

= ١ × $\frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

٢٨ (ب)

الحل :

نهـــا$_{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}}$ $\frac{٣ جتا س}{\pi - ٢ س}$

= نهـــا$_{(\frac{\pi}{٢} - س) \leftarrow ٠}$ $\frac{٣ جا (\frac{\pi}{٢} - س)}{٢ (\frac{\pi}{٢} - س)} = \frac{٣}{٢}$

الحل :

لو ١٥ = لو ٥ + لو ٣ = س + ص

٣٠ (جـ)

الحل :

٢$^{٢ س}$ − ٣ × ٢$^{س + ١}$ + ٢^٣ = ٠

∴ (٢^س)^٢ − ٦ × ٢^س + ٨ = ٠

∴ (٢^س − ٤) (٢^س − ٢) = ٠

∴ ٢^س = ٤ ∴ س = ٢

، ٢^س = ٢ ∴ س = ١

∴ م.ح = { ١ ، ٢ }

٣١ (ب)

الحل :

∵ ٢ لو ٢ − لو س = لو (س + ٣) − لو ٧

∴ لو ٤ − لو س = لو (س + ٣) − لو ٧

∴ لو $\frac{٤}{س}$ = لو $\frac{س + ٣}{٧}$ ∴ $\frac{٤}{س} = \frac{س + ٣}{٧}$

∴ س^٢ + ٣ س − ٢٨ = ٠

∴ (س + ٧) (س − ٤) = ٠

∴ س = −٧ (مرفوض)

أ، س = ٤ ∴ م.ح = { ٤ }

٣٢ (د)

الحل :

∵ لو$_ص$ س = لو$_س$ ص = $\frac{١}{لو_ص س}$

∴ (لو$_ص$ س)^٢ = ١ ∴ لو$_ص$ س = ١

أ، لو$_ص$ س = −١

∴ س = ص

∴ س = $\frac{١}{ص}$

٣٣ (ب)

٣٤ (ب)

الحل :

$\frac{أ جا ب جا حـ}{أق جا أ}$ = $\frac{١}{٢}$ أ ب جا حـ

∴ أ جا ب = $\frac{١}{٢}$ ب جا أ × أق

∴ أق = ٢ × $\frac{جا ب}{ب}$ × $\frac{أ}{جا أ}$ = ٢ × ١ = ٢

٣٦ (ب)

الحل :

ص = $\frac{س + ١}{س - ٢}$ بتبديل المتغيرات

∴ س = $\frac{ص + ١}{ص - ٢}$

∴ س ص − ٢ س = ص + ١

∴ ص (س − ١) = ٢ س + ١

∴ ص = $\frac{٢ س + ١}{س - ١}$ ∴ د$^{-١}$ (س) = $\frac{٢ س + ١}{س - ١}$

∴ د$^{-١}$ (٤) = $\frac{٢ (٤) + ١}{٤ - ١}$ = ٣

٣٧ (جـ)

الحل :

بفرض أن : س + ٢ = أ

∴ س = أ − ٢ ∴ د (أ) = هـ$^{أ - ٢}$

∴ د (س) = هـ$^{س - ٢}$

٣٨ (ب)

٣٩ (أ)

الحل :

($\sqrt[٣]{س}$ − ٢) ($\sqrt[٣]{س}$ − ١) = ٠

∴ $\sqrt[٣]{س}$ = ٢ ∴ س = ٨

، $\sqrt[٣]{س}$ = ١ ∴ س = ١

∴ م.ح = { ٨ ، ١ }

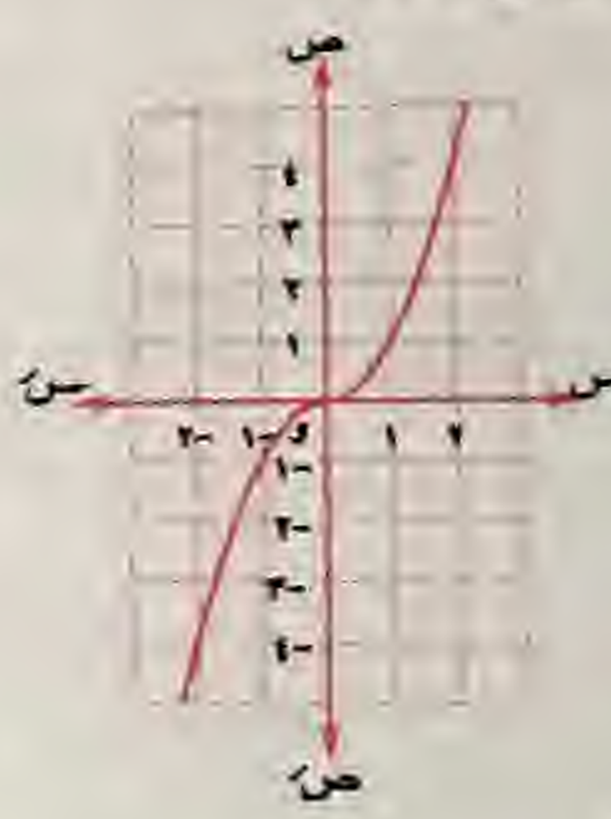
٤٠ (جـ)

الحل :

د (س) = { س (س) ، س ≥ ٠ ؛ س (− س) ، س < ٠ }

= { $س^٢$ ، س ≥ ٠ ؛ $-س^٢$ ، س < ٠ }

ومن التمثيل البيانى للدالة



مدى الدالة = ح

٤ محافظة القليوبية

١ (د)

الحل :

$(٢٥)^{س} = (٥^{س})^٢ = (٢)^٢ = ٤$

٢ (أ)

الحل :

∵ النقطة (١/٤ ، −١/٢) تنتمى للمنحنى

ص = لو٤ (١ − ٢ س)

∴ −١/٢ = لو٤ (١ − ١/٤ ٢)

∴ ١ − ١/٤ ٢ = ٤^(−١/٢) ∴ ١ − ١/٤ ٢ = ١/٢

∴ ١/٤ ٢ = ١/٢ ∴ ٢ = ٢

٣ (جـ)

الحل :

نهـا (س ← ∞) (س^٢ + ٥) / (٢ س^٢ + ٣ س) = نهـا (س ← ∞) (١ + ٥/س^٢) / (٢ + ٣/س) = (١ + ٠)/(٢ + ٠) = ١/٢

٤ (ب)

الحل :

∵ ٤ حا أ = ٣ حا ب = ٦ حا حـ بالقسمة على ١٢

∴ حا أ / ٣ = حا ب / ٤ = حا حـ / ٢

∴ أ : ب : حـ = ٣ : ٤ : ٢

∴ أ = ٣ ك ، ب = ٤ ك ، حـ = ٢ ك

∴ حتا حـ = (أ^٢ + ب^٢ − حـ^٢) / (٢ أ ب)

= (٩ ك^٢ + ١٦ ك^٢ − ٤ ك^٢) / (٢ (٣ ك) (٤ ك)) = ٧/٨

∴ ق (∠ حـ) = ٢٩°

٥ (جـ)

الحل :

لو_ب أ^٢ × لو_حـ ب^٣ × لو_أ حـ = (٢ لو أ / لو ب) × (٣ لو ب / لو حـ) × (لو حـ / لو أ) = ٦

٦ (ب)

الحل :

∵ ص = ∛س بتبديل المتغيرات

∴ س = ∛ص ∴ س^٣ = ص

∴ د^{−١} (س) = س^٣

٧ (د)

الحل :

∵ د متصلة عند س = ١

∴ د (١) = نهـا (س ← ١) د (س)

∴ ٢ أ = نهـا (س ← ١) (س^٢ − ١)/(س − ١)

= نهـا (س ← ١) (س − ١)(س + ١)/(س − ١) = ٢

∴ أ = ١

٨ (ب)

الحل :

∵ أ ب حـ مثلث ∴ أ + ب + حـ = ١٨٠°

∴ أ + ب = ١٨٠° − حـ

∴ حتا (أ + ب) = حتا (١٨٠° − حـ) = − حتا حـ

= − (أ^٢ + ب^٢ − حـ^٢)/(٢ أ ب) = (حـ^٢ − أ^٢ − ب^٢)/(٢ أ ب)

٩ (أ)

الحل :

لو٤ س + لو٤ (س − ٣) = ١

∴ لو٤ س (س − ٣) = لو٤ ٤

∴ س^٢ − ٣ س − ٤ = ٠

∴ (س − ٤) (س + ١) = ٠

∴ س = ٤ أ، س = −١ (مرفوض)

∴ م.ح = {٤}

١٠ (جـ)

١١ (ب)

الحل :

نهـا (س ← ٢) (س^٥ − ٣٢)/((س − ٢) (س + ٥)) = نهـا (س ← ٢) (س^٥ − ٢^٥)/(س − ٢)

× نهـا (س ← ٢) ١/(س + ٥) = ٥ × ٢^٤ × ١/(٢ + ٥) = ٨٠/٧

١٢ (أ)

الحل :

حـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ − ٢ أ ب حتا حـ

= ٨١ + ٢٢٥ − ٢ × ٩ × ١٥ × حتا ١٠٦°

∴ حـ ≃ ٢٠ سم

∴ محيط Δ أ ب حـ = ٩ + ١٥ + ٢٠ = ٤٤ سم

١٣ (جـ)

الحل :

∵ | ٢ س − ١٢ | ≥ ٧ ∴ ٢ س − ١٢ ≥ ٧

∴ ٢ س ≥ ١٩ ∴ س ≥ ...

٢ س − ١٢ ≤ −٧ ∴ ٢ س ≤ ٥

∴ س ≤ ٥/٢

∴ م.ح = ح −] ٥/٢ ، ١٩/٢ [

١٤ (د)

الحل :

∵ د دالة فردية ∴ د (− س) = − د (س)

∴ د (− س) + د (س) = − د (س) + د (س) = صفر

١٥ (جـ)

الحل :

نهـا (س ← ٠) (طا ٢ س + ٥ طا ٣ س)/س

= نهـا (س ← ٠) طا ٢ س / س + ٥ نهـا (س ← ٠) طا ٣ س / س

= ٢ + ٥ × ٣ = ١٧

١٦ (أ)

الحل :

حا أ / ٣ = حا ب / (٥/٢) = حا حـ / ٤

∴ أ : ب : حـ = ٣ : ٥/٢ : ٤ (بالضرب × ٢)

= ٦ : ٥ : ٨

١٧ (ب)

الحل :

| س | + س = { س + س ، س ≥ ٠ ؛ − س + س ، س < ٠ }

= { ٢ س ، س ≥ ٠ ؛ ٠ ، س < ٠ }

∴ | س | + س = ٠ لكل س < ٠

أى لكل س ∈] −∞ ، ٠ [

، عندما ٢ س = ٠ ∴ س = ٠

∴ مجموعة الحل =] −∞ ، ٠ [∪ {٠} =] −∞ ، ٠]

١٨ (جـ)

$\lim \frac{\sqrt{س+١٥}-٤}{س-١} \times \frac{\sqrt{س+١٥}+٤}{\sqrt{س+١٥}+٤}$

$= \lim \frac{١٦-(س+١٥)}{(١-س)(١+س)(٤+\sqrt{س+١٥})}$

$= \lim \frac{-(س-١)}{-(س-١)(١+س)(٤+\sqrt{س+١٥})}$

$= \frac{١}{٢\times٨} = \frac{١}{١٦}$

(د)

الحل :

بفرض أن : ق(∠أ) = ٣ ك ، ق(∠ب) = ٥ ك ، ق(∠جـ) = ٤ ك

∴ ٣ ك + ٥ ك + ٤ ك = ١٨٠°

∴ ك = ١٥°

∴ ق(∠أ) = ٣ (١٥°) = ٤٥° ، ق(∠جـ) = ٤ (١٥°) = ٦٠°

∵ $\frac{أ}{جا أ} = \frac{جـ}{جا جـ}$ ∴ $\frac{جـ}{أ} = \frac{جا ٦٠°}{جا ٤٥°}$

∴ $\frac{جـ^٢}{أ^٢} = \frac{جا^٢ ٦٠°}{جا^٢ ٤٥°} = \frac{٣}{٢}$

(جـ)

الحل :

$٢٥^{س} - ١٢ \times ٥^{س} + ٢٧ = ٠$

∴ $(٥^{س} - ٣)(٥^{س} - ٩) = ٠$

∴ $٥^{س} = ٣$ ∴ س = لو٥ ٣

، $٥^{س} = ٩$ ∴ س = لو٥ ٩

∴ مجموع الجذرين = لو٥ ٣ + لو٥ ٩ = لو٥ ٢٧

(جـ)

الحل :

∵ د تربط كل عدد حقيقي بنفسه

وبمقارنة المعاملات الطرفين

∴ ٢ – ١ = ١ ومنها أ = ١

، ب – ٢ = ٠ ومنها ب = ٢

∴ (أ ، ب) = (١ ، ٢)

(د)

الحل :

$\lim \frac{٥ + \frac{٦}{س^٢}}{١ + \frac{٣}{س^٢}} = \frac{٥ + ٠}{١ + ٠} = ٥$

(جـ)

الحل :

$\frac{٥\sqrt{٣}}{جا ٦٠°} = ٢ نق$ ∴ ٢ نق = ١٠ سم

∴ طول قطر الدائرة المارة برؤوسه = ١٠ سم

(ب)

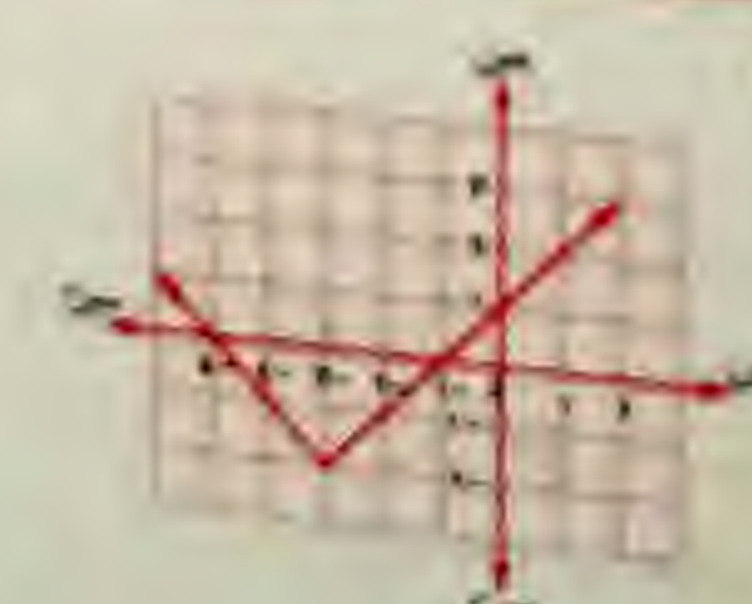
الحل :

بوضع س + ٣ ≥ ٠ ∴ س ≥ −٣

∴ مجال د = [−٣ ، ∞[

(جـ)

الحل :



من التمثيل البياني للدالتين

المساحة = $\frac{١}{٢} \times ٤ \times ٢ = ٤$ وحدة مربعة

ق(∠ب) = ق(∠أ) = ٥٠°

، ق(∠ب د جـ) = ١٨٠° − (٧٠° + ٥٠°) = ٦٠°

Δ ب جـ د فيه : $\frac{٨}{جا ٥٠°} = \frac{ب جـ}{جا ٦٠°} = \frac{د جـ}{جا ٧٠°}$

∴ ب جـ = $\frac{٨ \times جا ٦٠°}{جا ٥٠°}$ = ٩ سم

، د جـ = $\frac{٨ \times جا ٧٠°}{جا ٥٠°}$ = ١٠ سم

∴ محيط ▱ أ ب جـ د = ٢ × (٩ + ١٠) = ٣٨ سم

(د)

الحل :

(د ∘ ر)(٢) = د(ر(٢)) = د(٣^٢) = د(٩)

= ٤(٩) − ٥ = ٣١

(د)

الحل :

س + ١ = ٠ ∴ س = −١

∴ $٣^{س+١} = ٣^{-١+١} = ٣^٠ = ١$

(أ)

الحل :

$\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٧س + ٦}{٢س^٣ - ٨س + ٤}$

$= \lim \frac{(س-٢)(س^٢ + ٢س - ٣)}{(س-٢)(٢س - ٢)}$

$= \frac{٤ + ٤ - ٣}{٤ - ٢}$ … $= \frac{٥}{٤}$

(ب)

(ب)

الحل :

∵ $\sqrt{٤س^٢ - ١٢س + ٩} \le ٩$

∴ $\sqrt{(٢س-٣)^٢} \le ٩$ ∴ |٢س − ٣| ≤ ٩

∴ −٩ ≤ ٢س − ٣ ≤ ٩ ∴ −٦ ≤ ٢س ≤ ١٢

∴ −٣ ≤ س ≤ ٦ ∴ م.ح = [−٣ ، ٦]

(أ)

الحل :

$\lim \frac{١}{س}\sqrt{٢ + ٤س^٢} = \lim \sqrt{\frac{٢}{س^٢} + ٤}$

$= \sqrt{٤} = ٢$

(ب)

الحل :

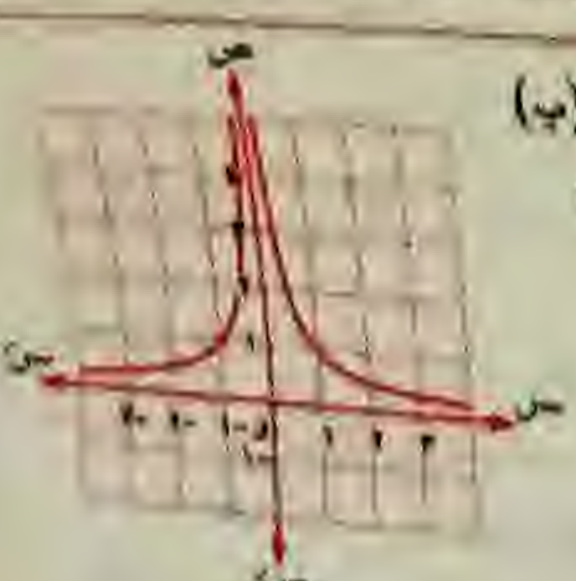
$\lim \frac{(س+٣)^٥ - ١}{س^٢ - ٤} = \lim \frac{(س+٣)^٥ - ١^٥}{س + ٢}$

$\times \lim \frac{١}{س - ٢} = \lim \frac{(س+٣)^٥ - ١^٥}{(س+٣) - ١}$

$\times \lim \frac{١}{س - ٢} = ٥ \times (١)^٤ \times \frac{١}{-٢-٢} = -\frac{٥}{٤}$

(ب)

الحل :



من التمثيل البياني للدالة د :

د(س) = $\frac{١}{|س|}$ = { $\frac{١}{س}$ ، س > ٠ ؛ $\frac{-١}{س}$ ، س < ٠ }

∴ مدى الدالة =]٠ ، ∞[

٣٧ (ب)

الحل:

∵ $لو_{٢} س + لو_{٤} س = ٣$

∴ $\frac{لو س}{لو ٢} + \frac{لو س}{٢ لو ٢} = ٣$

∴ $\frac{لو س}{لو ٢}(١ + \frac{١}{٢}) = ٣$ ∴ $\frac{لو س}{لو ٢} = \frac{٣}{\frac{٣}{٢}} = ٢$

∴ لو س = ٢ لو ٢ ∴ لو س = لو ٤

∴ س = ٤ ∴ م.ح = {٤}

٣٨ (ب)

الحل:

$\underset{س \to ٠}{نها} \frac{١ - جتا س + جا ٢ س}{١ - جتا س - جا س}$

(بقسمة البسط والمقام على س)

$= \underset{س \to ٠}{نها} \frac{\frac{١ - جتا س}{س} + \frac{جا ٢ س}{س}}{\frac{١ - جتا س}{س} - \frac{جا س}{س}} = \frac{صفر + ٢}{صفر - ١} = -٢$

٣٩ (ب)

الحل:

$\underset{هـ \to ٠}{نها} \frac{(٢ - ٣ هـ)^{٧} - ١٢٨}{٤ هـ}$

$= \frac{-٣}{٤} \underset{-٣ هـ \to ٠}{نها} \frac{(-٣ هـ + ٢)^{٧} - ٢^{٧}}{-٣ هـ}$

$= \frac{-٣}{٤} \times ٧ \times ٢^{٦} = -٣٣٦$

٤٠ (أ)

الحل:

$\underset{س \to ٠}{نها} ٥ س قتا ٢ س = \underset{س \to ٠}{نها} \frac{٥ س}{جا ٢ س} = \frac{٥}{٢}$

٥ محافظة الشرقية

١ (ب)

الحل:

[illegible]

٢ (ب)

الحل:

∵ $لو_{٣} (٩^{س - ٢}) = ٥ - س$

∴ (س − ٢) لو٣ ٩ = ٥ − س

∴ ٢ س − ٤ = ٥ − س

∴ ٣ س = ٩ ∴ $س = \frac{٩}{٣} = ٣$

٣ (ب)

الحل:

د(−س) = (−س) جتا(−س)

= −س جتا س = −د(س)

∴ د دالة فردية

٤ (ب)

الحل:

∵ $\sqrt{س^{٢} - ٢ س + ١} \geq ٤$

∴ $\sqrt{(س - ١)^{٢}} \geq ٤$ ∴ $|س - ١| \geq ٤$

∴ س − ١ ≥ ٤ ∴ س ≥ ٥

، س − ١ ≤ −٤ ∴ س ≤ −٣

∴ م.ح = ح −]−٣ ، ٥[

٥ (ب)

الحل:

∵ ٣ جا أ = ٤ جا ب = ٦ جا جـ (بالقسمة على ١٢)

∴ $\frac{جا أ}{٤} = \frac{جا ب}{٣} = \frac{جا جـ}{٢}$

∴ أ : ب : جـ = ٤ : ٣ : ٢

٦ (جـ)

الحل:

[illegible]

٧ (ب)

الحل: [illegible]

٨ (ب)

الحل: [illegible]

٩ (د)

الحل: [illegible]

١٠ (أ)

الحل: [illegible]

١١ (ب)

١٢ (د)

١٣ (أ)

١٤ (ب)

الحل: [illegible]

بقسمة البسط والمقام على س

نهـا (س^٢ − (−٢)^٢) / (س^٤ − (−٢)^٤) = ٧/٤ × (−٢)^٢ = −١٤

٢١ (جـ)

٢٢ (١)

الحل :

١ / جا ٣٠° = ٢ نق ∴ ٢ نق = ٨ سم

∴ طول قطر الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ = ٨ سم

٢٣ (١)

الحل :

س = ٣^٢ = ٩

٢٤ (ب)

٢٥ (ب)

٢٦ (جـ)

الحل :

نهـا (س→∞) (س^٢ + ٣) / (٢ س^٢ + ٣ س) = نهـا (س→∞) (١ + ٣/س^٢) / (٢ + ٣/س) = ١/٢

٢٧ (ب)

٢٨ (جـ)

الحل :

∵ د متصلة عند س = ١ ∴ د (١^+) = د (١^−)

∴ ١ − ٢ = ك − ٣ ∴ ك = ٢

٢٩ (١)

الحل :

نهـا ١٢ (١ − جتا س) / س = ١٢ × ٠ = ٠

الحل :

٣^س + ... = ٣^−٢

∴ س = −٨ ∴ س + ٥ = −٣

٣١ (ب)

الحل :

ع = √(س^٢ + ص^٢ − ٢ س ص جتا ع)

= √(١٦ + ٢٥ − ٢ (٤) (٥) جتا ٦٠°) = √٢١ سم

٣٢ (جـ)

الحل :

نهـا (س→٢) (س − ٢) (س + ٢) / ((س + ٤) (س − ٢)) = (٢ + ٢) / (٢ + ٤) = ٦/٧

٣٣ (د)

الحل :

نهـا (س→∞) (٣/س^٢ − ٢) = صفر − ٢ = −٢

٣٤ (ب)

الحل :

نهـا (س→٠) جا ٣ س / (س (٥ س − ٤)) = نهـا (س→٠) جا ٣ س / س × نهـا (س→٠) ١ / (٥ س − ٤)

= ٣ × −١/٤ = −٣/٤

٣٥ (١)

الحل :

∵ |س + ٢| ≤ ٢ ∴ −٢ ≤ س + ٢ ≤ ٢

∴ −٤ ≤ س ≤ ٠ ∴ م.ح = [−٤ ، ٠]

٣٦ (ب)

الحل :

٣ = لو_أ ٨ ∴ أ^٣ = ٨ ∴ أ = ٢

∴ د (س) = لو_٢ س ∴ د (٤) = لو_٢ ٤ = ٢

٣٧ (ب)

الحل :

لو (س + ٨) / (س − ١) = ١ ∴ (س + ٨) / (س − ١) = ١٠

∴ س + ٨ = ١٠ س − ١٠

∴ ٩ س = ١٨ ∴ س = ٢

∴ م.ح = {٢}

٣٨ (١)

الحل :

٣^س + ٣^٣ / ٣^س = ١٢ (بالضرب × ٣^س)

∴ ٣^٢س + ٢٧ = ١٢ × ٣^س

∴ ٣^٢س − ١٢ × ٣^س + ٢٧ = ٠

∴ (٣^س − ٩) (٣^س − ٣) = ٠

∴ ٣^س = ٩ ∴ س = ٢

أ، ٣^س = ٣ ∴ س = ١

∴ م.ح = {٢ ، ١}

٣٩ (جـ)

الحل :

س + ٧ = س − ٥ ومنها ٧ = −٥ (غير منطقي)

أ، س + ٧ = −س + ٥ ومنها ٢ س = −٢

∴ س = −١ ∴ م.ح = {−١}

٤٠ (١)

الحل :

∵ ∠ حـ حادة

، حـ > أ

∴ يوجد حل واحد



٧ حل الاختبار ...

١ (د)

الحل :

نهـا (ص→٢) (ص^٥ − ٢^٥) / (ص − ٢) = ٥ × ٢^٤

٢ (د)

الحل :

(د ∘ ر) (٢) = د (ر (٢)) = د (٣^٢) = د (٩)

= ٤ (٩) − ٥ = ٣١

٣ (جـ)

الحل :

(أ + ب + حـ) / (جا أ + جا ب + جا حـ) = ٢ نق = ٢ × ٤ = ٨ سم

٤ (ب)

الحل :

لو_٢ د (س) = لو_٢ ٢^س = س لو_٢ ٢ = س

٥ (جـ)

الحل :

لو س = لو ٢٧ − لو ب − لو ٢

∴ لو س = لو ٢٧ / (٢ × ب) ∴ س = ٩ / ب

٦ (جـ)

الحل :

نهـا (س→∞) (٢ س + ٢ س^−١) / (س + ٤ س^−١) × س/س

= نهـا (س→∞) (٢ س^٢ + ٢) / (س^٢ + ٤) = ٢/٤ = ١/٢

٧ (جـ)

الحل :

ص = س^٣ + ٧ بتبديل المتغيرات

∴ س = ص^٣ + ٧

∴ ص = ∛(س − ٧)

∴ د^{−١} (س) = ∛(س − ٧)

∴ د^{−١} (−١) = ∛(−١ − ٧) = −٢

٨ (أ)

الحل :

٢ س − ٤ = س + ١ ومنها س = ٥

أ، ٢ س − ٤ = − س − ١ ومنها ٣ س = ٣

∴ س = ١ ∴ م.ح = {٥ ، ١}

٩ (جـ)

١٠ (أ)

الحل :

∵ د حـ منفرجة ، حـَ > أ

∴ عدد الحلول = ١

١١ (ب)

الحل :

نهـــا (١ + ٢ س^٢ − س^٣) عندما س ← ∞

= نهـــا س^٣ (١/س^٣ + ٢/س − ١)

= ∞ (٠ + ٠ − ١) = − ∞

١٢ (أ)

الحل :

ع = √(٣ + ٢ − ٢ (٥) (٣) جتا ١٢٠°) = ٧ سم

١٣ (أ)

الحل :

لو ٢٥ / لو ٥ = لو ٥^٢ / لو ٥ = ٢ لو ٥ / لو ٥ = ٢

١٤ (أ)

١٥ (د)

١٦ (ب)

الحل :

لو (ظا θ) + لو (ظتا θ) = لو (ظا θ × ظتا θ) = لو ١

= صفر

١٧ (ب)

١٨ (جـ)

الحل :

|٣ س − ٢| ≤ ٧ ∴ ٣ س − ٢ ≤ ٧

∴ ٣ س ≤ ٩ ∴ س ≤ ٣

، ٣ س − ٢ ≥ −٧ ∴ ٣ س ≥ −٥

∴ س ≥ −٥/٣ ∴ م.ح = ح −]−٥/٣ ، ٣[

١٩ (جـ)

الحل :

−١/٢ = لو_٢ (١ − ١/٨ أ) ∴ ١ − ١/٨ أ = ٤^{−١/٢}

∴ ١ − ١/٨ أ = ١/٢ ∴ ١/٨ أ = ١/٢

∴ أ = ٤

٢٠ (أ)

الحل :

٣^{س + ١} − ٣^{س − ١} = ٢٤

∴ ٣^س (٣ − ١/٣) = ٢٤ ∴ ٣^س × ٨/٣ = ٢٤

∴ ٣^س = ٢٤ × ٣/٨ = ٩ ∴ س = ٢

٢١ (د)

٢٢ (د)

٢٣ (جـ)

٢٤ (جـ)

٢٥ (ب)

الحل :

= نهـــا (٥ + ١/س − ٢/س^٢) عندما س ← ∞ = ٥

٢٦ (أ)

٢٧ (د)

الحل :

∵ حـ^٢ = أ^٢ + بـ^٢ − ٢ أ بـ جتا حـ

∴ أ^٢ + بـ^٢ − ٢ أ بـ جتا حـ = أ^٢ + بـ^٢ + أ بـ

∴ − ٢ أ بـ جتا حـ = أ بـ

∴ جتا حـ = −١/٢

∴ ق (∠ حـ) = ١٢٠°

٢٨ (جـ)

الحل :

٢^س = ٥ ∴ لو ٢^س = لو ٥

∴ س لو ٢ = لو ٥

∴ س = لو ٥ / لو ٢ = لو_٢ ٥

٢٩ (جـ)

الحل :

∵ |س − ١| < ٥

∴ −٥ < س − ١ < ٥

∴ −٤ < س < ٦

∴ م.ح =]−٤ ، ٦[

٣٠ (جـ)

الحل :

∵ د (س − ١) = ٢^{س − ١} [illegible]

∴ د (س) = ٢^س [illegible]

٣١ (ب)

الحل :

نهـــا ((٣ + ٢/س + ١/س^٢) / (١ − ٢/س + ٢/س^٢)) = (٣/١) [illegible]

٣٢ (ب)

الحل :

نهـــا (ظا (س − ٢)) / (س − ٢) × نهـــا ١ / (س + ٢)

= ١ × ١ / (٢ + ٢) = ١/٤

٣٣ (جـ)

٣٤ (ب)

الحل :

نهـــا ((√س − ٤)(√س + ٣)) / (√س − ٤) = √٩ + ٣ = ٦

٣٥ (د)

الحل :

∵ جتا بـ = حـ / ٢أ ∴ (أ^٢ + حـ^٢ − بـ^٢) / ٢ أ حـ = حـ / ٢أ

∴ أ^٢ + حـ^٢ − بـ^٢ = حـ^٢

∴ أ^٢ = بـ^٢ ∴ أ = بـ

٣٦ (ب)

الحل :

[illegible]

∴ ٢ نق = ٦

٣٨ (د)

الحل:

د(٣⁻) = نهـا $_{س \to ٣^-}$ (٣س^٢ + أس − ٢) = ١٦

∴ ٣(٣)^٢ + أ(٣) − ٢ = ١٦

∴ أ = −٣

، د(٣⁺) = نهـا $_{س \to ٣^+}$ (٢س + ب) = ١٦

∴ ٢(٣) + ب = ١٦ ∴ ب = ١٠

∴ أ + ب = −٣ + ١٠ = ٧

٣٩ (ب)

الحل:

حـ أ جتا ب + حـ ب جتا أ

= حـ أ × $\frac{أ^٢ + حـ^٢ − ب^٢}{٢ أ حـ}$ + حـ ب × $\frac{ب^٢ + حـ^٢ − أ^٢}{٢ ب حـ}$

= $\frac{١}{٢}$ (أ^٢ + حـ^٢ − ب^٢ + ب^٢ + حـ^٢ − أ^٢)

= $\frac{١}{٢}$ × ٢ حـ^٢ = حـ^٢

٤٠ (ب)

الحل:

جا (أ + ب) = جا (١٨٠° − حـ)

∴ جا (أ + ب) = − جتا حـ

٧ محافظة الدقهلية

١ (د)

الحل:

د(−٢) = ٣$^{−٢ + ٢}$ = ٣^٠ = ١

بوضع ٤ − س ≥ ٠ ∴ س ≤ ٤

∴ مجال د =]−∞ ، ٤]

٣ (أ)

الحل:

∵ أد // ب حـ

∴ ق(∠أحـب) = ق(∠دأحـ) = ٤٠°

∴ Δ أب حـ فيه: $\frac{٤}{جا ٤٠°} = \frac{أحـ}{جا ٦٠°}$

∴ أحـ = $\frac{٤ × جا ٦٠°}{جا ٤٠°}$ ≈ ٥ سم

٤ (د)

٥ (جـ)

الحل:

لو$_٢$ (س − ٥) = ٣ ∴ س − ٥ = ٢^٣ = ٨

∴ س = ١٣ ∴ م.ح = {١٣}

٦ (ب)

الحل:

(د ∘ ر)(٣) = د(ر(٣)) = د(٢^٢) = د(٤)

= $\sqrt{٤ + ٥}$ = ٣

٧ (ب)

الحل:

نهـا $_{س \to ٤}$ (د(س) − ٤) = نهـا $_{س \to ٤}$ د(س) − نهـا $_{س \to ٤}$ ٤ = ٤ − ٤ = ٠

٨ (أ)

الحل:

٢ نق = $\frac{٦\sqrt{٣}}{جا ٦٠°}$ = ١٢ سم

٢س + ٥ = ٣ ومنها ٢س = −٢

∴ س = −١

أو ٢س + ٥ = −٧ ومنها ٢س = −١٢

∴ س = −٦

∴ م.ح = {−١ ، −٦}

١٠ (جـ)

١١ (ب)

الحل:

−٩ ≤ ٢س − ٥ ≤ ٩ ∴ −٤ ≤ ٢س ≤ ١٤

∴ −٢ ≤ س ≤ ٧ ∴ م.ح = [−٢ ، ٧]

١٢ (جـ)

الحل:

د(٢) = ٢أ + ٥

د(٢⁺) = نهـا $_{س \to ٢^+}$ (٩ − ب س) = ٩ − ٢ب

∴ ٢أ + ٥ = ٩ − ٢ب

∴ ٢أ + ٢ب = ٤

∴ أ + ب = ٢

١٣ (جـ)

١٤ (د)

١٥ (أ)

الحل:

ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٥٣° + ٤٧°) = ٨٠°

∴ $\frac{١٥}{جا ٥٣° + جا ٤٧° + جا ٨٠°} = \frac{أب}{جا ٨٠°}$

∴ أب = $\frac{١٥ × جا ٨٠°}{جا ٥٣° + جا ٤٧° + جا ٨٠°}$ ≈ ٦ سم

١٧ (جـ)

الحل:

المقدار = ... = ١

١٨ (جـ)

الحل:

١٩ (د)

الحل:

٢٠ (ب)

الحل:

٢١ (أ)

الحل :

نهـــا (س - ٤) ← ٠ $\frac{\text{جا}(س - ٤)}{(س - ٤)}$ × نهـــا س ← ٤ $\frac{١}{س + ٤}$

= ١ × $\frac{١}{٤ + ٤}$ = $\frac{١}{٨}$

٢٢ (جـ)

الحل :

لو٣ س − $\frac{٢}{\text{لو}_٣ س}$ = ١ ، بالضرب × لو٣ س

∴ $(\text{لو}_٣ س)^٢$ − ٢ = لو٣ س

∴ $(\text{لو}_٣ س)^٢$ − لو٣ س − ٢ = ٠

∴ (لو٣ س − ٢) (لو٣ س + ١) = ٠

∴ لو٣ س = ٢ ومنها س = $٣^٢$ = ٩

، لو٣ س = −١ ومنها س = $٣^{-١}$ = $\frac{١}{٣}$

م.ح = {٩ ، $\frac{١}{٣}$}

٢٣ (ب)

الحل :

∵ د ، ر كلًا منها دالة عكسية للأخرى

∴ (د ∘ ر) (س) = س

∴ د (أس + ٣) = س

∴ ٤ (أس + ٣) − ١٢ = س

∴ ٤ أس + ١٢ − ١٢ = س

∴ ٤ أ = ١ ∴ أ = $\frac{١}{٤}$

٢٤ (د)

الحل :

نهـــا $\frac{أ + \frac{٥}{س}}{٢ - \frac{٧}{س}}$ = ٣

∴ $\frac{أ}{٢}$ = ٣ ∴ أ = ٦

٢٥ (أ)

الحل :

− $\frac{١}{٣}$ = لو٨ (١ − $\frac{١}{٤}$ أ)

∴ ١ − $\frac{١}{٤}$ أ = $٨^{-\frac{١}{٣}}$ ∴ ١ − $\frac{١}{٤}$ أ = $\frac{١}{٢}$

∴ $\frac{١}{٤}$ أ = $\frac{١}{٢}$ ∴ أ = ٢

٢٦ (أ)

الحل :

٥ − س > ٠ ∴ س < ٥

∴ س ∈]−∞ ، ٥[

، س > ٠ ، س ≠ ١

∴ س ∈]٠ ، ∞[− {١}

∴ مجال د =]−∞ ، ٥[∩]٠ ، ∞[− {١}

=]٠ ، ٥[− {١}

٢٧ (جـ)

الحل :

$٣^{٢س}$ − ٨ × $٣^س$ − $٣^٢$ = ٠

∴ $٣^{٢س}$ − ٨ × $٣^س$ − ٩ = ٠

∴ ($٣^س$ − ٩) ($٣^س$ + ١) = ٠

∴ $٣^س$ = ٩ ومنها س = ٢

، $٣^س$ = −١ (مرفوضة)

٢٨ (د)

الحل :

بفرض أن قياس أكبر زاوية يساوى θ وهى الزاوية المقابلة لأكبر ضلع الذى طوله ٧ سم

∴ جتا θ = $\frac{٣^٢ + ٥^٢ - ٧^٢}{٢ (٣) (٥)}$ = $-\frac{١}{٢}$

∴ θ = ١٢٠°

٢٩ (جـ)

الحل :

نهـــا ($\frac{\text{جا}^٢ ٢ س}{س^٢}$ − $\frac{٢ \text{ظا} ٢ أس^٢}{س^٢}$) = −١

∴ $٤^٢$ − ٢أ + ١ = ٠ ∴ $(أ - ١)^٢$ = ٠

∴ أ = ١

٣٠ (جـ)

الحل :

$\sqrt{(س + ٢)^٢}$ ≥ ٧ ∴ |س + ٢| ≥ ٧

∴ س + ٢ ≥ ٧ ∴ س ≥ ٥

، س + ٢ ≤ −٧ ∴ س ≤ −٩

∴ م.ح = ح −]−٩ ، ٥[

٣١ (أ)

الحل :

نهـــا س ← ∞ $\frac{\sqrt[٣]{٨ س^٣ + ٥ س}}{س + ٦}$

(بقسمة البسط والمقام على س = $\sqrt[٣]{س^٣}$)

= نهـــا س ← ∞ $\frac{\sqrt[٣]{٨ + \frac{٥}{س^٢}}}{١ + \frac{٦}{س}}$ = $\frac{\sqrt[٣]{٨}}{١}$ = ٢

٣٢ (د)

الحل :



من التمثيل البيانى للدالة

المساحة = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٢ = ٤ وحدة مساحة

٣٣ (أ)

الحل:



[illegible] = ٦ جا ٦٠ = ٣√٣ سم

[illegible]

∴ عدد الحلول = صفر

٣٤ (أ)

الحل:

نهـــا [illegible] = صفر

٣٥ (د)

٣٦ (ب)

الحل:

بفرض أن ق(∠أ) = ٢ ك

، ق(∠ب) = ٣ ك ، ق(∠جـ) = ٤ ك

∴ ٢ ك + ٣ ك + ٤ ك = ١٨٠°

∴ ٩ ك = ١٨٠°

∴ ك = ٢٠°

∴ ق(∠أ) = ٤٠° ، ق(∠ب) = ٦٠°

، ق(∠جـ) = ٨٠° ∴ $\frac{١٢}{\text{جا} ٨٠°}$ = $\frac{أجـ}{\text{جا} ٦٠°}$

∴ أجـ = $\frac{١٢ × \text{جا} ٦٠°}{\text{جا} ٨٠°}$ = ١١ سم

٣٧ (ب)

الحل :

∵ د دالة فردية

∴ د(−س) = −د(س)

المقدار = $\frac{٥٢ \text{د}(س) - ٨ \text{د}(س)}{٥٣ \text{د}(س)}$ = $\frac{-٦ \text{د}(س)}{٥٣ \text{د}(س)}$ = [illegible]

الحل :

$\therefore$ (−٣) = نهـــا ...

$\therefore$ −٤ = −٣ + ٢ $\therefore$ ٢ = −١

(جـ)

الحل :

نهـــا $\frac{س^٣ - (-٢)^٣}{س^٢ - (-٢)^٢} = \frac{٣}{٢} \times (-٢)^١ = -٣$

(ب)

الحل :

$\therefore$ محيط ▱ أ ب جـ د = ٢ (٨ + ٥) = ٢٦ سم

٨

(أ)

(د)

الحل :

$\therefore$ مجال د =]٢ ، ∞[− {٣}

(جـ)

الحل :

بقسمة البسط والمقام على س

$\therefore$ $\frac{٢}{٢} = ٤$ $\therefore$ ٢ = ٨

(أ)

الحل :

د (−س) = $\frac{جا (−س)}{−س} = \frac{−جا س}{−س} = \frac{جا س}{س}$ = د (س)

$\therefore$ د دالة زوجية

(ب)

(ب)

الحل :

جتا θ = $\frac{٢^٢ + ٥^٢ - ٧^٢}{٢ (٣) (٥)} = -\frac{١}{٢}$

$\therefore$ θ = ١٢٠° $\therefore$ قياس أكبر زاوية = ١٢٠°

(د)

الحل :

(د)

الحل :

= ٤ (٩) − ٥ = ٣١

(ب)

الحل :

ص = ٧ س بتبديل المتغيرات

$\therefore$ س = ٧ ص $\therefore$ ص = $\frac{١}{٧}$ س

(أ)

(ب)

الحل :

(ب)

الحل :

(أ)

الحل :

$\therefore$ مجموعة الحل = ح − {٢}

(أ)

الحل :

$\therefore$ عدد الحلول = ١

(جـ)

الحل :

(ب)

(ب)

الحل :

(أ)

الحل :

(د)

الحل :

(ب)

(د)

الحل :

(ب)

الحل :

(جـ)

الحل :

(د)

الحل :

٤٦ (ب)

٤٧ (جـ)

الحل :

$\frac{س}{جا س} = ٢$ نق (بضرب الطرفين × ٢)

$\therefore \frac{٢ س}{جا س} = ٤$ نق

٤٨ (أ)

الحل :

$\underset{س \to ٠}{نهـــا} \frac{جا^٢ ٢ س}{س^٢} = \underset{س \to ٠}{نهـــا} (٢ أ + ٣ جتا س)$

$\therefore ٤ = ٢ أ + ٣$ $\therefore ٢ أ = ١$ $\therefore أ = \frac{١}{٢}$

٤٩ (جـ)

الحل :

$س > ٠$ $\therefore س \in]٠ ، \infty[$

، $١ - س > ٠$ $\therefore س < ١$

$\therefore س \in]-\infty ، ١[$

، $١ - س \neq ١$ $\therefore س \neq ٠$

$\therefore$ مجال د $=]٠ ، \infty[\cap]-\infty ، ١[- \{٠\} =]٠ ، ١[$

$\therefore ٠ < س < ١$

[illegible]

(ـ) (أ)

الحل :

$\underset{س \to ٠}{نهـــا} \frac{٥ س}{جا ٢ س} = \frac{٥}{٢}$

(ـ) (د)

(ـ) (أ)

الحل :

$\frac{لو ٦٤}{لو ٨} = \frac{لو ٨^٢}{لو ٨} = \frac{٢ لو ٨}{لو ٨} = ٢$

(ـ) (ب)

٣٤ (أ)

الحل :

$٢ نق = \frac{٧}{جا ٣٠^\circ} = ١٤$ سم

٣٥ (د)

الحل :

$د(٢) = \underset{س \to ٢}{نهـــا} د(س)$

$\therefore ٢ أ = \underset{س \to ٢}{نهـــا} \frac{س^٢ - ٢^٢}{س - ٢}$

$\therefore ٢ أ = ٢ \times ٢$ $\therefore أ = ٢$

٣٦ (د)

الحل :

لو ٥ س = ٢ $\therefore ٥ س = ١٠^٢ = ١٠٠$

$\therefore س = ٢٠$

٣٧ (د)

الحل :

بفرض أن : $س^٢ + ك س + م = (س + ١)(س + أ)$

$\therefore \underset{س \to -١}{نهـــا} \frac{(س + ١)(س + أ)}{(س + ١)(س - ١)} = ٣$

$\therefore \frac{-١ + أ}{-١ - ١} = ٣$ $\therefore أ = -٥$

$\therefore س^٢ + ك س + م = (س + ١)(س - ٥)$

$= س^٢ - ٤ س - ٥$

$\therefore ك = -٤ ، م = -٥$ $\therefore ك + م = -٩$

٣٨ (جـ)

٣٩ (جـ)

الحل :

$ح = ٥٠٠٠ (١ + ٠.٠٥)^٧ = ٧٠٣٥.٥$ جنيه

٤٠ (أ)

الحل :

$\because$ د متصلة عند س = م

$\therefore \underset{س \to م^+}{نهـــا} د(س) = \underset{س \to م^-}{نهـــا} د(س)$ $\therefore ل = م$

$\therefore ل^٢ + م^٢ - ٢ ل م = ل^٢ + ل^٢ - ٢ ل^٢ =$ صفر

٩ محافظة كفر الشيخ

١ (ب)

٢ (جـ)

الحل :

$(د \circ ر)(س) = د(ر(س)) = \sqrt{٦ - س - ٢}$

بوضع $٦ - س \geq ٠$ $\therefore س \leq ٦$

$\therefore م_١ =]-\infty ، ٦]$

، بوضع $\sqrt{٦ - س} - ٢ \geq ٠$

$\therefore \sqrt{٦ - س} \geq ٢$

$\therefore ٦ - س \geq ٤$

$\therefore س \leq ٢$

$\therefore م_٢ =]-\infty ، ٢]$

$\therefore$ مجال $د \circ ر =]-\infty ، ٦] \cap]-\infty ، ٢]$

$=]-\infty ، ٢]$

٣ (ب)

الحل :

$\underset{س \to ٢}{نهـــا} \frac{(س^٢ + ٥)(س^٢ - ٤)}{س - ٢}$

$= \underset{س \to ٢}{نهـــا} \frac{(س^٢ + ٥)(س - ٢)(س + ٢)}{(س - ٢)}$

$= (٤ + ٥)(٢ + ٢) = ٣٦$

٤ (د)

الحل :

$\underset{س \to -٤}{نهـــا} \frac{٢(س^٢ - ١٦)}{س + ٤}$

$= \underset{س \to -٤}{نهـــا} \frac{٢(س - ٤)(س + ٤)}{(س + ٤)}$

$= ٢(-٤ - ٤) = -١٦$

٥ (د)

الحل :

$\frac{ع}{جا ع} = ٢$ نق $\therefore \frac{نق}{جا ع} = ٢$ نق

$\therefore جا ع = \frac{١}{٢}$ $\therefore ق(\angle ع) = ٣٠^\circ$ أو ١٥٠°

٦ (أ)

الحل :

$٣^{س - ١ - ٢} = ٨١$

$\therefore ٣^{س - ٣} = ٣^٤$ $\therefore س - ٣ = ٤$

$\therefore س = ٧$ $\therefore م.ح = \{٧\}$

٧ (ب)

الحل :

$د(س) = \frac{٢ س - ٢ + ١}{س - ١} = ٢ + \frac{١}{س - ١}$

$\therefore$ نقطة التماثل للدالة د = (١ ، ٢)

$\therefore$ الدالة د تناقصية في $]-\infty ، ١[،]١ ، \infty[$

٨ (جـ)

الحل :



Δ أ ب جـ فيه : ق(∠ أ) $= ١٨٠^\circ - (٥٠^\circ + ٦٥^\circ)$

$\therefore$ ب جـ $= ٢٢$ سم

(ب)

الحل :

حـ = ٥٠٠٠ (١ + ٠,٠٠٥)^٧ = ٧٠٣٥,٥ جنيه

= نهـا (س → ٢) [(س + ٥) (س − ٢) (س + ٢)] / (س − ٢)

= (٤ + ٥) (٢ + ٢) = ٣٦



Δ ا ب ء فيه : ق(د ا) = ١٨٠° − (٥٠° + ٦٥°) = ٦٥°

∴ ب ا = ب ء = ٢٢ سم

ء ب = ء حـ فيه

جتا (د ء ب حـ) = [(٢٢)^٢ + (٢٥)^٢ − (١٨)^٢] / [٢ (٢٢) (٢٥)] = ١٥٧ / ٢٢٠

∴ ق (د ء ب حـ) = ٤٤° ٢٨َ ٩ً

٩ (جـ)

الحل :

نهـا (س → ٢) (س^٢ − ٢^٢) / (س^٥ − ٢^٥) = ٢/٥ × ٢^−٣ = ١/٢٠

١٠ (ا)

الحل :

نهـا (س → ١) [٢ − √(س^٢ + ٣)] / (١ − س) × [٢ + √(س^٢ + ٣)] / [٢ + √(س^٢ + ٣)]

= نهـا (س → ١) (٤ − س^٢ − ٣) / [(١ − س) (٢ + √(س^٢ + ٣))]

= نهـا (س → ١) [(١ − س) (١ + س)] / [(١ − س) (٢ + √(س^٢ + ٣))] = ٢ / (٢ + ٢) = ١/٢

١١ (د)

١٢ (د)

١٣ (ا)

الحل :

م = ١/٢ نهـا (س → ٠) [(س + ٢)^٦ − ٢^٦] / س

= ١/٢ × ٦ × ٢^٥ = ٩٦

١٤ (جـ)

الحل :

بقسمة البسط والمقام على س^٤

نهـا (س → ∞) (س^٢ − ٢/س) / (٢ − ٣/س^٢ − ٢/س^٤) = ∞/٢ = ∞

١٥ (د)

الحل :

ق (د ع) = ١٨٠° − (٨٠° + ٦٠°) = ٤٠°

∴ سَ / جا ٨٠° = ١٠ / جا ٤٠°

∴ سَ = (١٠ × جا ٨٠°) / جا ٤٠° ≈ ١٥ سم

١٦ (د)

الحل :

Δ س ص ع فيه :

ق (د س) + ق (د ص) + ق (د ع) = ١٨٠°

∴ ق (د س) + ق (د ص) = ١٨٠° − ق (د ع)

∴ جتا (س + ص) = − جتا ع

∴ ٢ سَ صَ جتا (س + ص) = ٢ سَ صَ × (− جتا ع)

= − ٢ سَ صَ × (سَ^٢ + صَ^٢ − عَ^٢) / (٢ سَ صَ)

= عَ^٢ − سَ^٢ − صَ^٢

١٧ (د)

الحل :

نهـا (س → ١) (٢ س − √س) = ٢ (١) − √١ = ١

١٨ (ا)

الحل :

نهـا (س → ٠) [جا س (١ − جتا س)] / س^٢

= نهـا (س → ٠) جا س / س × نهـا (س → ٠) (١ − جتا س) / س = ١ × ٠ = ٠

١٩ (د)

الحل :

|س| − ٢ س = ٨

∴ |س| = ٢ س + ٨

∴ عندما س ≥ ٠ يكون ٢ س + ٨ = س

ومنها س = −٨ (مرفوض)

∴ عندما س < ٠ يكون ٢ س + ٨ = − س

ومنها س = −٢

∴ م.ح = {−٢}

٢٠ (ب)

الحل :

٢^(س − ١) = ٤٤ ∴ ٢^(س − ١) / ٢ = ٤٤ / ٢

∴ ٢^(س − ٢) = ٢٢

٢١ (ب)

الحل :

٧^(س^٢) = ٧^(٢ س + ٨) ∴ س^٢ = ٢ س + ٨

∴ س^٢ − ٢ س − ٨ = ٠

∴ (س − ٤) (س + ٢) = ٠

∴ س = ٤ أو س = −٢

∴ م.ح = {٤ ، −٢}

٢٢ (د)

٢٣ (جـ)

الحل :

مساحة Δ ا ب حـ = ١/٢ × ٦ × ١٢ × جا ٣٠° = ١٨ سم^٢

٢٤ (ب)

الحل :

عند س = ١ يكون س^٢ − ٧ س + م = ٠

∴ ١ − ٧ + م = ٠ ∴ م = ٦

٢٥ (د)

الحل :

بقسمة البسط والمقام على س = √(س^٢)

نهـا (س → ∞) √(٦٤ + ٧/س^٢ − ٢/س^٢) / (٣ + ٢/س) = √٦٤ / ٣ = ٨/٣

٢٦ (جـ)

الحل :

باستخدام القسمة المطولة أو التركيبية نجد أن

٢ س^٣ + ٣ س^٢ + ٤ = (س + ٢) (٢ س^٢ − س + ٢)

∴ نهـا (س → −٢) [(س + ٢) (٢ س^٢ − س + ٢)] / [(س + ٢) (س^٢ − ٢ س + ٤)]

= (٨ + ٢ + ٢) / (٤ + ٤ + ٤) = ١٢/١٢ = ١

٢٧ (جـ)

الحل :

∵ ا / جا ا = حـ / جا حـ = ٢ نق

∴ ا = ٢ نق جا ا ، حـ = ٢ نق جا حـ

∴ ا/حـ × جا حـ / جا ا = (٢ نق جا ا) / (٢ نق جا حـ) × جا حـ / جا ا = ١

٢٨ (د)

٢٩ (ب)

الحل :

∵ ص = ٢ س + ب بتبديل المتغيرات

∴ س = ٢ ص + ب ∴ ٢ ص = س − ب

∴ ص = ١/٢ س − ١/٢ ب

∴ ١/٢ س − ١/٢ ب = حـ س + ٣

∴ حـ = ١/٢ ، −١/٢ ب = ٣

∴ ب = −٦ ∴ ب × حـ = ١/٢ × −٦ = −٣

٣٠ (ا)

الحل :

ه = لو_ب ٣٢ ∴ ب^ه = ٣٢ ∴ ب = ٢

٣١ (جـ)

الحل :

−٣ ≤ ٢ س − ١ ≤ ٣ ∴ −٢ ≤ ٢ س ≤ ٤

∴ −١ ≤ س ≤ ٢ ∴ م.ح = [−١ ، ٢]

٣٢ (د)

الحل :

∴ د س منفرجة ، سَ < صَ

∴ الشروط لا تحقق وجود أى مثلث.

---

٣٣ (أ)

الحل :

نهـا$_{س \leftarrow ٣}$ $\frac{(س - ٣)(س - ٤)}{(س - ٣)}$ = ٣ − ٤ = −١

---

٣٤ (د)

---

٣٥ (جـ)

الحل :

∵ ٥^{س} = ١٧   ∴ لو ٥^{س} = لو ١٧

∴ س لو ٥ = لو ١٧   ∴ س = $\frac{لو ١٧}{لو ٥}$ = لو$_٥$ ١٧

---

٣٦ (جـ)

الحل :

٢ لو س − (لو س)^٢ = ٠

∴ لو س (٢ − لو س) = ٠

∴ لو س = ٠ ومنها س = ١٠^{٠} = ١

، لو س = ٢   ∴ س = ١٠^٢ = ١٠٠

∴ م . ح = {١ ، ١٠٠}

---

٣٧ (ب)

الحل :

حـ = $\sqrt{٨^٢ + ٥^٢ - ٢ (٨) (٥) (جتا ٦٠°)}$ = ٧ سم

جتا أ = $\frac{٥^٢ + ٧^٢ - ٨^٢}{٢ (٥) (٧)}$ = $\frac{١}{٧}$

ق (د أ) = ٨١° ٤٧َ ١٢ً

---

٣٨ (د)

الحل :

٣$^{-س}$ = ٩   ∴ ٣$^{-س}$ = ٣^٢ ∴ س = −٢

∴ نقطة التقاطع (−٢ ، ٩)

---

٣٩ (جـ)

---

٤٠ (د)

الحل :

(لو$_٢$ س)^٢ − ٢ لو$_٢$ س − ٣ = ٠

∴ (لو$_٢$ س − ٣) (لو$_٢$ س + ١) = ٠

∴ لو$_٢$ س = ٣   ∴ س = ٢^٣ = ٨

، لو$_٢$ س = −١

∴ س = ٢$^{-١}$ = $\frac{١}{٢}$

١٠ محافظة المنيا

١ (جـ)

---

٢ (جـ)

---

٣ (ب)

---

٤ (ب)

الحل :

∵ نقطة تقاطع منحنى الدالة د مع منحنى الدالة د$^{-١}$ تقع على المستقيم ص = س

∴ ٢ ك − ٣ = ك   ∴ ك = ٣

---

٥ (ب)

---

٦ (د)

الحل :

نهـا $\frac{س^٢ + ٥}{٦}$ = $\frac{∞ + ٥}{٦}$ = ∞

٧ (أ)

الحل :

نهـا$_{س \leftarrow ٢}$ $\frac{(س - ٢)(س + ٢)}{(س + ٤)(س - ٢)}$ = $\frac{٢ + ٢}{٢ + ٤}$ = $\frac{٤}{٦}$

---

٨ (أ)

الحل :

∵ د متصلة عند س = أ

∴ د (أ) = نهـا$_{س \leftarrow أ}$ د (س)

∴ ٢٠٠ = نهـا$_{س \leftarrow أ}$ $\frac{س^٨ - أ^٨}{س^٥ - أ^٥}$

∴ ٢٠٠ = $\frac{٨}{٥}$ × أ^٣ ∴ أ^٣ = ١٢٥   ∴ أ = ٥

---

٩ (أ)

الحل :

∵ $\frac{صَ}{جا ص}$ = ٢ نق   ∴ $\frac{صَ}{٢ جا ص}$ = نق

---

١٠ (جـ)

الحل :

بالقسمة على ١٢

∴ $\frac{٦ أ}{١٢}$ = $\frac{٤ ب}{١٢}$ = $\frac{٣ حـ}{١٢}$ ∴ $\frac{أ}{٢}$ = $\frac{ب}{٣}$ = $\frac{حـ}{٤}$

ويفرض أن : أ = ٢ ك ، ب = ٣ ك ، حـ = ٤ ك

، ∵ أ طول أصغر الأضلاع

∴ ق (د أ) هى قياس أصغر الزوايا

∴ جتا أ = $\frac{ب^٢ + حـ^٢ - أ^٢}{٢ ب حـ}$

= $\frac{٩ ك^٢ + ١٦ ك^٢ - ٤ ك^٢}{٢ (٣ ك) (٤ ك)}$ = $\frac{٧}{٨}$

∴ ق (د أ) = ٢٨° ٥٧َ

---

١١ (أ)

الحل :

(د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) = د (س^٢)

= $\sqrt{س^٢}$ − س

---

١٢ (د)

---

١٣ (ب)

الحل :

بوضع س − ٢ = ٠   ∴ س = ٢

∴ مجموعة أصفار الدالة ن = {٢}

مجال $\frac{م}{ن}$ = ([٣ ، ٦] ∩ [−١ ، ٥]) − {٢}

= [−١ ، ٥] − {٢}

---

١٤ (أ)

---

١٥ (ب)

---

١٦ (د)

الحل :

د $(\frac{π}{٢}^+)$ = نهـا$_{س \leftarrow \frac{π}{٢}}$ جا (π − س) = جا (π − $\frac{π}{٢}$)

= جا $(\frac{π}{٢})$ = ١

، د $(\frac{π}{٢}^-)$ = نهـا$_{س \leftarrow \frac{π}{٢}}$ $\frac{ظتا س}{π - ٢ س}$

= نهـا$_{(\frac{π}{٢} - س) \leftarrow ٠}$ $\frac{ظا (\frac{π}{٢} - س)}{٢ (\frac{π}{٢} - س)}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ د $(\frac{π}{٢}^+)$ ≠ د $(\frac{π}{٢}^-)$

∴ نهـا$_{س \leftarrow \frac{π}{٢}}$ د (س) غير موجودة.

---

١٧ (جـ)

الحل :

نهـا$_{س \leftarrow \frac{π}{٤}}$ $\frac{ظا س}{س}$ = $\frac{ظا \frac{π}{٤}}{\frac{π}{٤}}$ = $\frac{٤}{π}$

---

١٨ (جـ)

الحل :

[illegible]

(د)

الحل :

$2\,\text{نق} = \frac{10\sqrt{3}}{\text{جا }60^\circ} = 20$ سم

(أ)

الحل :

$\frac{\text{جا أ}}{3} = \frac{\text{جا ب}}{\frac{5}{2}} = \frac{\text{جا حـ}}{4}$

∴ أ : ب : حـ = ٣ : $\frac{5}{2}$: ٤ = ٦ : ٥ : ٨

(د)

(أ)

الحل :

∵ د دالة فردية ∴ د (− ٢) = − د (٢)

∴ د (٢) + د (− ٢) = د (٢) − د (٢) = صفر

(جـ)

الحل :

$\lim\limits_{س \to 0} \frac{\text{جا }2س}{4س} \times \lim\limits_{س \to 0} \frac{\text{ظا }3س}{س} = \frac{2}{4} \times 3 = \frac{3}{2}$

(جـ)

الحل :

$س^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}}$ ∴ $س = \left(2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}}\right)^{6}$

∴ $س = 2^{3} \times 3^{2} = 8 \times 9 = 72$

(جـ)

الحل :

∵ لو (س + ١١) = ٢

∴ س + ١١ = 10^{2} = ١٠٠

∴ س = ١٠٠ − ١١ = ٨٩

(أ)

(د)

الحل :

$\lim\limits_{س \to 1} \frac{[\text{illegible}]}{[\text{illegible}]} = \lim\limits_{س \to 1} \frac{[\text{illegible}]}{[\text{illegible}]}$

$= \left(\frac{1}{ن} \div \frac{1}{م}\right) \times [\text{illegible}] = \frac{م}{ن}$

(ب)

الحل :

$\lim\limits_{س \to 2} د(س) = \lim\limits_{س \to 2} (3س - 1) = 3(2) - 1 = 5$

(جـ)

(جـ)

الحل :

أحـ = $\sqrt{8^{2} + 6^{2}}$ = ١٠ سم

ءحـ = $\sqrt{10^{2} + 5^{2} - 2(10)(5)\,\text{جتا }60^\circ} = 5\sqrt{3}$ سم

∴ Δ أءحـ فيه : $\frac{5\sqrt{3}}{\text{جا }60^\circ} = 2\,\text{نق}$

∴ نق = ٥ سم

∴ مساحة الدائرة المارة برؤوس Δ أءحـ = ٢٥ π سم²

(جـ)

(ب)

(جـ)

الحل :

∵ س ∈ [−١ ، ٤] ∴ −١ ≤ س ≤ ٤

∴ −٢ ≤ ٢س ≤ ٨ ∴ −٥ ≤ ٢س − ٣ ≤ ٥

∴ |٢س − ٣| ≤ ٥

(جـ)

الحل :

المقدار = $\frac{\text{لو }2^{3}}{\text{لو }(4 \times 3)} = \frac{\text{لو }8}{\text{لو }12} = \text{لو}_{12}\,8$

(جـ)

(ب)

الحل :

٢ + لو٣ س = [illegible]

∴ لو٣ س = ٥ ∴ س = 3^{5} = [illegible]

(جـ)

الحل :

$\lim\limits_{س \to 1} \frac{[\text{illegible}]}{[\text{illegible}]}$

$= \lim\limits_{س \to 1} [\text{illegible}] \times \lim\limits_{س \to 1} \frac{[\text{illegible}]}{[\text{illegible}]}$

$= 1 \times \frac{1 - جـ}{1 - ء} = \frac{1 - جـ}{1 - ء}$

(أ)

الحل :

$\lim\limits_{س \to 5} د(س) = \lim\limits_{س \to 5} \frac{[\text{illegible}](س + 5)}{[\text{illegible}]}$

= ٥ + ٥ = ١٠

∴ د متصلة عند س = ٥ إذا كان د (٥) = ١٠

(جـ)

الحل :

[illegible]

∴ [illegible] سم

(أ)

الحل :

حـ = [illegible] سم